LIVRES

Les carrés magiques dans les pays islamiques
JACQUES SESIANO
Presse polytechnique et universitaires romandes, Lausanne, 2004. 277 p.
ISBN : 2-88074-571-3. 41,25 €

Il n'est peut-être pas inutile de rappeler la définition générale mathématique du carré magique, en dehors de toutes considérations ésotériques ou cabalistiques.

Le carré magique par addition dit normal, est constitué d'une grille numérique carrée de côté n (n^2 cases), remplie avec les nombres de la suite naturelle des entiers, de 1 à n^2, de telle façon que la somme des termes de chaque ligne, chaque colonne et chacune des deux diagonales principales soit la même : c'est la « constante magique » ou « constante linéaire » du carré magique d'ordre n.

« *Je ne scay rien de plus beau en l'arithmétique que ces nombres que quelques uns appellent Planétarios et les autres Magicos* », écrit Pierre de Fermat dans une lettre adressée au Père Marin Mersenne, le 1er avril 1640.

La construction de ces grilles numériques pose des problèmes difficiles. Des savants et mathématiciens de renommée mondiale, Pierre de Fermat, Blaise Pascal, Jérôme Cardan, Léonhard Euler, Karl Friedrich Gauss, Édouard Lucas, pour n'en citer que quelques uns, n'ont pas dédaigné ces « récréations mathématiques », sans applications pratiques, si ce n'est dans la géométrie du tissage.

L'une des contributions scientifiques les plus originales du monde musulman est sans doute le développement de méthodes générales de construction des carrés magiques, bien avant que l'Occident s'en préoccupe. D'aucuns pensent que le concept de carré magique est originaire de Chine, puis est passé en Grèce et de là aux Indes et à l'Islam, puis à l'Occident, notamment par Manuel Moschopoulos, au XVe siècle, où on le trouve dans des textes astrologiques.

Cependant si le circuit « Chine-Grèce-Indes-Islam » était généralement admis, il apparaît maintenant que ce chemin fut suivi en sens inverse, et que la science des carrés magiques était déjà solidement établie dans le monde arabe vers l'an mil. Et les méthodes générales en usage dans les pays islamiques, qui appartiennent alors au domaine de la « Théorie des nombres », resteront ignorées en Europe jusqu'au XXe siècle.

C'est ce que montre Jacques Sesiano dans son dernier ouvrage, « Les Carrés magiques dans les pays islamiques ».

Jacques Sesiano, exploitant un créneau important en la matière, a présenté précédemment un certain nombre de méthodes arabes de construction des carrés magiques, ces « arrangements harmonieux des nombres » selon la terminologie arabe, dans différents ouvrages ou communications ([3] à [10]).

Il s'agit alors de la traduction de manuscrits arabes des Xe-XIe siècles, assortie de commentaires historiques, linguistiques et mathématiques, tous empreints de la plus grande érudition et de la plus grande précision scientifique. J'ai personnellement apprécié quelques uns de ces ouvrages, ceux que j'ai pu consulter, lors de mes recherches sur les carrés magiques ([1, 2]).

Dans son dernier ouvrage, Jacques Sesiano, qui enseigne l'histoire des mathématiques à l'École polytechnique fédérale de Lausanne, ainsi que dans le cadre de la formation continue de l'université de cette même ville, nous offre un véritable cours de carrés magiques, limité au monde arabe.

Il s'agit non seulement de traduire et commenter, mais de replacer l'auteur arabe dans le cours de l'Histoire, et de classer son œuvre dans le cadre d'une structure logique et très didactique. Il est certain que les explications de l'auteur facilitent grandement la compréhension de la traduction sèche des extraits de certains auteurs arabes donnés dans l'ouvrage.

Ainsi distingue-t-on les carrés magiques d'ordre impair ($n = 2k + 1$), pairement pair ($n = 4k$), et impairement pair ($n = 2(2k + 1)$). Et dans chaque catégorie et pour chaque groupe de méthodes apparentées, l'auteur présente en général, après la description des méthodes en cause, les principes généraux mathématiques de construction, et l'application de ces principes aux méthodes exposées. Ceci de façon claire et complète. On trouve aussi certaines démonstrations mathématiques originales, ainsi par exemple pour les carrés impairs et la méthode du cavalier d'échecs ou par cheminement continu.

Pour chaque méthode exposée, l'auteur donne sa source arabe principale (une quinzaine de sources sont référencées dans l'Introduction), mais il précise aussi les antécédents quand il y a, et ceux qui se sont inspirés de la méthode exposée : un véritable travail d'érudition.

Il se confirme que les méthodes générales de construction des « arrangements harmoniques des nombres », les carrés à magie simple pour un ordre pairement pair ($n = 4k$), n'étaient pas connues au X^{e} siècle en Orient, alors que les méthodes de construction des carrés magiques à bordures ou à enceintes, bien plus complexes, l'étaient. Signalons en particulier la méthode de Al-Antaki pour les carrés magiques normaux à bordures impairs, avec séparation des termes pairs et impairs, ces derniers dans le losange intérieur de la grille, une merveille, figure qualifiée de « Quadratus mirabilis » par Jacques Sesiano : une méthode « tout à fait générale et d'une grande finesse ». C'est loin d'être simple, mais la méthode est rigoureuse.

En face d'une méthode de construction , on peut se poser systématiquement la question : « Combien de carrés magiques différents peut-on construire en application de cette méthode ? » Certaines méthodes sont pauvres et ne donnent qu'une solution ; d'autres sont très prolifiques, et génèrent une progéniture de quelques millions de carrés magiques ! Il ne semble pas que les auteurs arabes aient abordé ce problème de dénombrement (« enumeration » chez les anglo-saxons) ; du moins Jacques Sesiano n'en parle pas.

Dans un dernier chapitre intitulé « Autres figures », l'auteur présente des constructions d'origine arabe des « Carrés littéraux », plus connus sous le nom de « Carrés latins », ainsi que celles des « Carrés à trou », lesquels sont à l'origine des amulettes. Et puis sont abordés les carrés à cases partagées (c'est-à-dire la superposition de deux carrés magiques de même ordre), le parcours du cavalier d'échecs, les triangles, cercles et rectangles magiques, les carrés planétaires et la mythologie des carrés magiques, tout cela limité aux manuscrits arabes, d'ailleurs relativement peu prolixes à ce sujet.

Le Traité de Jacques Sesiano sur « Les carrés magiques dans les pays islamiques », résultat d'un énorme travail, est, dans les limites que l'auteur s'est fixées, très riche, d'une grande érudition, d'une rigueur parfaite, d'une clarté exemplaire, très didactique, un jalon incontournable dans l'abondante littérature des carrés magiques.

Références

[1] R. Descombes – *Les carrés magiques. Histoire, théorie et technique des carrés magiques, de l'Antiquité aux recherches actuelles*, Éditions Vuibert, 2000, 500 p.

[2] ———, *La magie du carré*, Éditions Vuibert, 2004, 608 p.

[3] J. Sesiano – « Herstellungsverfahren magischer Quadrate aus islamischer Zeit », *Sudhoffs Archiv* (1980-1995), **64** (1980), p. 187–196 ; **65** (1981), p. 251–265 ; **71** (1987), p. 78–89 ; **79** (1995), p. 193–226.

[4] ———, « An arabic treatrise on the construction of bordered magic squares », *Historia scientiarum* **42** (1991), p. 13–31.

[5] ———, « Quelques méthodes arabes de construction des carrés magiques », *Bulletin de la Sté Vaudoise des Sciences naturelles* **83** (1994), p. 51–76.

[6] ———, « L'abrégé enseignant la disposition harmonieuse des nombres, un manuscrit arabe anonyme sur la construction des carrés magiques », in *From Baghdad to Barcelona* (J. Casulleras & J. Samso, éds.), Barcelona, 1996, p. 103–156.

[7] ———, *Un traité médiéval sur les carrés magiques. De l'arrangement harmonieux des nombres*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1996, 208 p.

[8] ———, « Le traité d'Abul-Wafa sur les carrés magiques », *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamichen Wissenschaften* **12** (1998), p. 121–244.

[9] ———, « Les carrés magiques de Manuel Moschopoulos », *Archives for the history oh exact sciences* **53** (1998), p. 377–397.

[10] ———, « Construction of magic squares using the Knight's move in Islamic mathematics », *Archives for the history of exact sciences* **58** (2003), p. 1–20.

[11] ———, « Quadratus mirabilis », in *The Enterprise of science in Islam*, New perspectives, Cambridge Mass., 2003, p. 199–233.

René Descombes,
Strasbourg

The Prime Number Theorem
G. J. O. Jameson
London Mathematical Society Student Texts, 53, Cambridge University Press, Cambridge, 2003. x+252 p. ISBN : 0-521-89110-8. 19,99 £

Le théorème des nombres premiers énonce que $\pi(x) := \sharp\{p \text{ premier} : p \leqslant x\} \sim \frac{x}{\log x}$ quand $x \to \infty$. Ce livre, accessible en fin de licence ou début de master, est centré sur la démonstration de ce résultat célèbre et quelques prolongements classiques.

Le livre comporte 252 pages, divisées en 6 chapitres, 8 (!) appendices, une courte bibliographie et un index. Les trois premiers chapitres démontrent le théorème des nombres premiers sous la forme $\psi(x) \sim x$ par la preuve taubérienne habituelle, avec une digression sur la méthode de Newman, et se concluent par des applications aux valeurs moyennes de quelques fonctions arithmétiques. Le quatrième chapitre est consacré au théorème de la progression arithmétique de Dirichlet, le cinquième au lien entre le terme reste et les régions sans zéros de la fonction ζ de Riemann. Le dernier chapitre sacrifie au rite de la preuve «élémentaire».

Les appendices sont courts et précisent des points d'analyse pour la plupart ; les deux plus originaux sont une introduction au calcul algorithmique des valeurs de $\pi(x)$ (méthode de Meissel), et une courte notice historique sur les protagonistes, de Euler à Selberg. (Le dernier est une table de nombres premiers, qui ne s'imposait pas.)

Les énoncés et les preuves sont soignés et très détaillés ; les sections sont courtes, typiquement 10 pages, et chacune contient plusieurs exercices. C'est une source agréable d'exercices d'analyse, où l'arithmétique se réduit à une introduction aux fonctions multiplicatives. Au final, cet ouvrage raconte une belle histoire mais, très classique et restreint aux énoncés minimaux pour arriver au but fixé, il manque de perspectives à mon goût.

Karim Belabas,
Université de Paris-Sud Orsay