

LIVRES

Galois theory of linear differential equations¹

M. VAN DER PUT AND M.F. SINGER

Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, 2003. 438 p.

ISBN : 3-540-44228-6. 89,95 €

Let me begin with my overall impression, in two words : at last! At last, a thorough exposition, including most of the facets it presents nowadays, of this beautiful analogue of the Galois theory of field extensions, initiated by Liouville on the footsteps of Galois, enriched by Lie's introduction of infinitesimal groups, turned into a theory by Picard and Vessiot, and forgotten for half a century until Kolchin gave it its "modern" form in a fundamental 1948 article ([Ko], 87-128). The theory consists, in short, of replacing polynomials over a field K by linear differential operators over a differential field (K, ∂) , splitting fields by Picard-Vessiot differential extensions, and finite groups by linear algebraic groups : you then still get a Galois dictionary. When K is a global object such as $\mathbf{C}(z)$, you can localize at one of the singular points of the differential equation, say 0, and get an array of analogues of the inertia groups : the formal differential group after base extension to the field of formal powers series $\mathbf{C}((z))$, or stopping half-way in the completion, the local analytic differential group over the field of convergent powers series $\mathbf{C}(\{z\})$. All this, and much more, will here be found.

This laudative introduction does not mean that I praise everything in the book, and I give some hopefully constructive criticisms below. It does not mean either that our authors's predecessors must be forgotten : Kaplansky's book [Ka] played a crucial role in publicizing Kolchin's Picard-Vessiot theory (and the Zariski topology). It did lack foundational material on Picard-Vessiot extensions, but this is remedied by Magid's monograph [M]. Several articles (see in particular [S], [Be], [Le]) also helped, and in spite of their inaccessible language or distribution, we can further mention lecture notes such as [P] or [La]. Finally, a special notice should be made of Kolchin's two books and of his collected works [Ko], which go beyond the (linear) Picard-Vessiot theory. In fact, non-linear differential Galois theory is still under construction, with new view-points provided by current work of Umemura, Pillay, Malgrange, and a synthesis is clearly required. Wisely for a Grundlehren volume, the book under review, which we now analyse in a more details, restricts to the linear case.

Chapter 1 gives a self-contained presentation of the foundational material on Picard-Vessiot extensions and of the Galois correspondance, all in 30-odd pages : a real treat. One difficulty in this type of exposition is the choice one has to make between the various interpretations of a linear differential equation : an element

¹ Cette recension est reproduite avec l'aimable autorisation du *Jahresbericht* de la Deutsche mathematische Vereinigung

of the ring of differential operators $K[\partial]$, a differential system, a module over $K[\partial]$ (all these are presented, together with their relationships, in Chapter 2), or the localization at the generic point of a vector bundle with connection (which will appear in Chapter 6). Chapter 2 also introduces the constructions of linear algebra in the differential context, leading to the language of tannakian categories, and to the first example (here between differential equations and representations of groups) of the numerous equivalences of categories to be met in the book. The usefulness of this approach is well conveyed by the one-line proof it provides (p. 56, *l.* 1) that the fixed field under a normal subgroup is a Picard-Vessiot extension. Chapter 3 concerns the local theory over a field \hat{K} of type $\mathbf{C}(\{z\})$, with the classical dichotomy between regular and irregular singularities : in the second case, determining factors, here called eigenvalues, produce the exponential torus, a subgroup of the formal Galois group which is in general not covered by the formal monodromy. This leads to an equivalence of categories between differential equations over \hat{K} and a category Gr_1 made of down-to-earth triples. Chapter 4 goes global, and describes general methods for computing differential Galois groups, which are supported by ingenious (and often efficient) algorithms; this is probably their first appearance in book form. It is interesting to note that just as in the study of ℓ -adic representations, Jordan's theorem on finite subgroups of GL_n plays an important role; further links with classical Galois groups are given at the end of this chapter.

For most of the rest of the book, the constant field is \mathbf{C} , allowing for an analytic description of the Galois group. Thus, Chapters 5 and 6 study regular singular systems over the Riemann sphere, and their re-interpretation, using GAGA, as local systems over the complement of the singular locus, or equivalently, as representations of its fundamental group (cf. §§6.2 and 6.4); here, the monodromy group is Zariski dense in the Galois group. The various forms of the Riemann-Hilbert problem are clearly stated, leading to Bolibrukh's negative (and sometimes positive) solution if one searches for a connection with logarithmic singularities on a trivial bundle. Chapters 7, 8, and 9 concern the much more difficult case of irregular singularities, with the study of asymptotic expansions and the Stokes phenomenon, their refined Gevrey versions and multisummation, yielding Stokes matrices and Ramis's theorem, according to which the local analytic Galois group is topologically generated by the monodromy, the exponential torus, and the Stokes group. Differential equations over $\mathbf{C}(\{z\})$ are classified in terms of the Stokes sheaf; and the category they form is shown to be equivalent to a refined version Gr_2 of Gr_1 , which is still easy to describe. The inverse problem of differential Galois theory is the subject of Chapter 11, in both local and global contexts, and from both theoretical and constructive points of view. Chapter 12 offers tentative approaches to moduli spaces of differential equations. Finally, Chapter 13 describes the work of Matzat and the first author on iterative differential equations over fields of finite characteristic, and their applications to p -adic differential equations.

Needless to say, a book with such a large scope cannot maintain a homogeneous level, and although its basic results require only standard notions from multilinear or commutative algebra, further prerequisites are needed in its more advanced parts. Fortunately, the authors have added three useful appendices to come to the

rescue. They respectively deal with algebraic geometry, including a short course on linear algebraic groups; tannakian categories, pedagogically introduced by Galois categories and affine group schemes; and sheaf cohomology. (A last appendix concerns the Picard-Vessiot theory of linear partial differential equations.)

Now for the criticisms. The book is not free of misprints, and I'll here give only a sample : on p. 31, *l.* 1-, read $C[G]$, or $\mathcal{O}(G)$, instead of $\mathcal{O}[G]$; complete the sentence on p. 220, *ll.* 17-20; add "are invertible" on p. 249, *l.* 15-; on p. 340, *l.* 18, read "reducible" instead of "irreducible"; erase "non" on p. 341, *l.* 17, ... But on the content itself, I think the book would have gained from the following additions :

- examples of how to compute the Galois groups of some classical families of differential equations (for instance, rigidity deserved more than the passing remark at the end of §5.1; more could have been said on Lie algebraic methods, as in the work of N. Katz, or on the general algorithm of Compoint and Singer in the reductive case);
- a better presented index : e.g., the word "defect" has two completely different meanings in the book (p. 177, and p. 275), while the index lists only one.
- a more thorough bibliography, or rather, a more homogeneous one : there is nothing wrong with quoting very recent articles or preprints whose impact it is still difficult to evaluate, but basic papers such as [F] or [A] should not be forgotten ;
- last, but not least : more detailed comments on the history of the recent results covered by the book. I found such shortcomings more noticeable in its analytic part (see, for instance, Lemma 7.59), even if scattered comments (7.25, 8.11, ...) do appear along the text. It would have been useful to gather them in the conclusion of each chapter, as was actually done at the end of Chapters 3 and 11. Also, unnecessary adverbs sometimes accompany the attributions, e.g. on p. 229, where Ramis's theorem is "originally" due to Ramis, or on p. 79, where Katz's criterion for formal irreducibility "also" appears in a paper of Katz.

When presenting a theory, authors are of course free to choose their favoured approach, or to put the stress on what they believe to be the final word, but this book is bound to become *the* reference on the subject, and it is a pity to downplay the role of other view-points (say, for instance, the analytic approach to multisummation via inverse and direct Laplace transforms, p. 227). Fortunately, references such as [Ko] (see in particular the second author's commentary, pp. 527-524), or the preface of [Ba], provide enough information to answer the above criticisms.

These are minor points. The book is in fact already becoming a standard reference, not only for differential Galois theory proper, but also for the many areas which have accompanied its recent growth : tannakian categories, the algorithmic aspects of differential algebra and of representation theory, multisummability, the Riemann-Hilbert and other inverse problems, moduli... On top of its intrinsic interest, differential Galois theory is an ideal testing ground for these theories. Any (young or not so young) student working in these areas will benefit from this book, which clearly belongs to all mathematical libraries.

References

- [A] Y. André : *Différentielles non commutatives et théorie de Galois différentielle ou aux différences*; Ann.Sc. ENS **34**, 2001, 685-739.
- [Ba] W. Balsler : *From divergent series to analytic functions*; Springer LN 1582, 1994.
- [Be] F. Beukers : *Differential Galois theory in "From number theory to physics"*, Chapter 10, Springer, 1992.
- [F] A. Fahim : *Extensions galoisiennes d'algèbres différentielles*; Thèse Univ. Lille, 1990; see also Pacific J. Math. **180**, 1997, 7-40.
- [Ka] I. Kaplansky : *An introduction to differential algebra*; Hermann, 1957.
- [Ko] E. Kolchin : *Selected works, with commentary*; AMS 1991.
- [La] Ê R. Lardon : *Groupes algébriques linéaires et théorie de Galois différentielle*; Notes d'un Cours de 3e Cycle, Univ. Paris 6, 1985-86.
- [Le] G. Levelt : *Differential Galois theory and tensor products*; Indag. math., **1**, 1990, 439-450.
- [M] A. Magid : *Lectures on differential Galois theory*; AMS ULS 7, 1994.
- [P] M. van der Put : *Galoistheorie van differentiaalvergelijkingen*; College Univ. Groningen, 1982.
- [S] M. Singer : *An outline of differential Galois theory*; Proc. CADE, Acad. Press, 1989, 3-57.

D. Bertrand, Université Paris VI

Probability Models

JOHN HAIGH

Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer, 2004.

256 p. ISBN : 1-85233-431-2 \$ 39,95

Probability Models est un livre d'enseignement qui se destine à des étudiants dont le niveau s'échelonne entre notre actuelle deuxième année de licence et une première année de master appliqué. Son but ambitieux est de mener, en environ 250 pages, le lecteur ignorant tout à une relative maîtrise des concepts, et surtout des outils, du calcul des probabilités.

Outre les notions classiques et incontournables (loi de probabilité, probabilité conditionnelle, indépendance, variable aléatoire, moments, convergences), Haigh n'hésite pas à proposer quelques introductions ou incursions dans des sujets plus élaborés issus de la modélisation : marches aléatoires, processus de branchement, de renouvellement, chaînes de Markov, et une initiation aux processus à temps continu. Le niveau du livre se veut résolument élémentaire; en particulier, la théorie abstraite de la mesure est bannie (ce qui pose parfois des problèmes d'exposition). L'originalité pédagogique veut reposer sur des exemples développés tout au long du texte. On notera aussi un grand nombre d'exercices (succinctement corrigés) en fin de chaque chapitre. Le lecteur, étudiant ou enseignant, dispose donc d'un matériel significatif pour pratiquer la matière.

Je diviserai le livre en deux parties : la première partie, les chapitres 1 à 6, très classique, qui correspond grossièrement à ce que l'on enseigne en premier cycle *depuis toujours* et qui, de ce point de vue, n'est pas particulièrement originale. Puis, une seconde partie, les chapitres 7 et 8, qui, sur près de soixante pages aborde les processus stochastique à temps discret et (un peu) à temps continu. Le texte est clair et agréable à lire, il manque parfois de précision. Le choix pédagogique consiste, comme souvent, à introduire la notion de loi de probabilité abstraite, en restant (volontairement) un peu vague sur l'axiomatique sous-jacente, puisque, comme on l'a dit plus haut, la théorie de la mesure est évacuée (au prix de pirouettes de style comme le paragraphe 1.7. intitulé *Intellectual Honesty*). Je n'ai rien contre cela, mais il semble qu'on pourrait dire les choses plus simplement. Le prix à payer est la difficulté usuelle lorsque l'on quitte les espaces de probabilités finis ou dénombrables. On retrouvera bien sûr plus tard cette difficulté (et des petites incohérences inévitables dans ce contexte mathématiquement simplifié) pour traiter la loi et l'espérance d'une variable aléatoire (et l'espérance conditionnelle). L'auteur n'échappe par d'ailleurs à la dichotomie espace discret – espace continu, et s'embourbe dans des considérations un peu inattendues pour parler de la loi d'une variable aléatoire réelle en toute généralité. Il n'utilise pas (ou peu) l'outil fort agréable dans ce contexte élémentaire qu'est la fonction de répartition. Ceci laisse planer sur les chapitres 1 à 4 (espaces de probabilités, probabilité conditionnelle et indépendance, lois de probabilité usuelles et variables aléatoires) une légère impression de flou, qui, il faut le reconnaître, est tout de même compensée par de nombreux exemples bien traités et utiles à la compréhension. Les chapitres 5 et 6, respectivement, sommes de variables aléatoires et convergence, sont plus ambigus. Certaines preuves ne sont pas tout à fait rigoureuses (ou bien pas *self-contained* comme dirait l'auteur), et l'auteur s'éloigne de la modélisation qui lui tenait tant à cœur lors des chapitres précédents. L'utilisation des modes de convergences classiques (convergence presque-sûre, convergence en probabilité et en loi) n'est peut-être pas suffisamment motivée, ce qui rend la compréhension des théorèmes classiques (loi des grands nombres et TCL) un peu difficile. Il est dommage que dans un tel contexte, l'auteur n'en ait pas profité pour donner quelques applications directes et simples des théorèmes limites, en statistique par exemple.

La seconde partie, les chapitres 7 et 8, traite respectivement des processus à temps discret et à temps continu. Comme je l'ai déjà dit plus haut, en s'imposant un style élémentaire, l'auteur aborde plusieurs aspects de la modélisation des processus de manière concrète et sur des exemples développés, et pas toujours triviaux. C'est à mon avis la partie la plus réussie du livre, qui pourrait très bien servir à des étudiants préparant l'épreuve de modélisation de l'Agrégation. Après les difficultés d'usage liées à la notion de loi de processus, qui, si elles sont évacuées (ce qui naturel ici) sont néanmoins trop souvent mentionnées (ce qui donne une impression inutile de malaise), Haigh traite un peu de processus de branchement, de marches aléatoires, et de chaînes de Markov. Les chaînes à temps continu sont visitées (sans preuves, équations de Chapman-Kolmogorov, semi-groupe et générateur) et développées sur des exemples pertinents (processus de vie et mort, propagation d'une épidémie). On trouve aussi, dans ce contexte, des files d'attente, et, ce qui est plus étonnant, des éléments de théorie du renouvellement.

Le livre conclut sur le processus de Wiener en admettant au passage les points trop délicats. On trouve tout de même le principe de réflexion, la loi gaussienne inverse et le pont brownien est évoqué!

Comme on l'aura constaté, mon impression générale sur *Probability models* de Haigh est mitigée. Il contient beaucoup de bonnes choses, mais aussi beaucoup d'imprécisions et de choix pédagogiques qui ne semblent pas toujours heureux. Gageons que de telles réticences sur ce livre d'enseignement très anglo-saxon sont plus culturelles qu'objectives, et qu'il pourra servir à nos étudiants ou enseignants!

Marc Hoffmann, Université de Marne-la-Vallée

Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe

CLAIRE VOISIN

Cours spécialisé, Soc. Math. France, 2002. 595 p.

ISBN : 2-85629-129-5. 69,00 €

L'objet de ce livre est d'expliquer comment la décomposition de Hodge de la cohomologie des variétés projectives permet de donner des informations profondes sur les cycles algébriques.

De nombreux ouvrages ou articles d'exposition existent sur le sujet, mais ils culminent bien souvent au théorème de décomposition de Hodge. Ce n'est pas le cas ici, loin s'en faut.

La pari de l'auteur est de donner une présentation de la théorie aussi *self-contained* que possible tout en allant très loin dans des domaines de recherches actifs (conjectures de Hodge, théorie de Noether-Lefschetz, conjectures de Bloch...). Ce pari risqué est pour l'essentiel gagné.

Le livre débute par une présentation de la théorie des formes harmoniques sur les variétés kählériennes compactes qui essentiellement ne suppose que des connaissances de maîtrise, voire de licence. On n'exige même aucune connaissance de la théorie des faisceaux, les notions de base étant rappelées. On arrive alors assez rapidement aux théorèmes de décomposition de Hodge et de Lefschetz (d'aucuns regretteront le parti-pris de cacher l'action de $s/2$).

Cette partie, très réussie, n'est pas la partie originale du livre : elle n'en est que le socle.

On poursuit en étudiant comment varient les structures de Hodge des familles de variétés projectives. Le théorème classique de trivialité topologique des submersions propres est clairement dégagé, ce qui est agréable. On prouve alors les théorèmes d'holomorphie et de transversalité de l'application des périodes (qui à une variété associe sa structure de Hodge), clef de voûte de l'histoire. Immédiatement, des applications délicieuses en découlent (Torelli générique pour les courbes par exemple).

On poursuit en construisant très soigneusement les classes fondamentales de cycles analytiques, en étudiant les compatibilités diverses ce qui permet d'introduire la conjecture de Hodge.

Après un passage sur l'application d'Abel-Jacobi, généralisation naturelle de l'intégration des 1-formes sur une courbe, on débouche sur un superbe chapitre expliquant la théorie de Lefschetz (comparaison des topologies d'une variété et

de ses sections hyperplanes). L'outil est la théorie de Morse (réelle). La version complexe permet d'introduire et d'étudier les cycles évanescents. La preuve des théorèmes de monodromie (quasi-nilpotence, irréductibilité) en découle.

A ce stade, on rentre dans l'autre partie de l'ouvrage, traitant de sujets rarement expliqués à ce niveau.

La preuve (Deligne) des cycles invariants est lumineuse. Un paragraphe explique d'abord pourquoi la décomposition de Lefschetz assure que la suite spectrale de Leray d'une submersion propre de variétés projectives dégénère en E_2 . Un argument de théorie de Hodge mixte permettant alors d'obtenir la preuve. C'est vite fait bien fait : on croirait lire un roman ! On donne ensuite des applications parfois récentes de la théorie comme le théorème de Noether-Lefschetz (les courbes d'une surface de \mathbb{P}^3 lisse générique de degré $d \geq 4$ sont intersections complètes), la preuve de Donagi du théorème de Torelli générique pour les hypersurfaces... Les derniers paragraphes sont plus avancés, mais restent très accessibles, en seconde lecture sans doute (théorèmes de connexité de Nori, non représentabilité des zéros cycles sur les surfaces qui ont une deux forme holomorphe (Mumford)...).

Avant tout, répétons-le, l'aventure que constitue l'écriture d'un tel ouvrage est un succès. Il constitue une excellente introduction dans ses premiers chapitres et un guide très efficace et clair dans sa partie plus avancée. Même si ça et là se glissent quelques petites coquilles, le texte est très précis (cf. l'effort dans le calcul des signes). Quelques petits regrets peut-être. Les exercices ne sont pas tout à fait à la hauteur de la richesse du texte. Le caractère *self-contained* n'est pas total (par exemple, une bonne connaissance de topologie algébrique, comme dans le livre de Greenberg, est très souhaitable). Du coup, le caractère extrêmement élémentaire du tout début peut surprendre. Et puis, mais l'auteur(e) n'y est pour rien, la SMF pourrait se décider à relier correctement de tels livres, qui seront des ouvrages de référence à consultation fréquente, comme elle sait le faire dans quelques-unes de ses collections.

Mais, mon sentiment est clair : précipitez-vous chez votre libraire préféré pour acheter ce livre. Vous ne regretterez pas vos 69 euros.

Yves Laszlo, Université Paris VI, Institut de Mathématiques de Jussieu

Recent developments in the Navier-Stokes problem

P.-G. LEMARIÉ-RIEUSSET

CRC press, 2002. 408 p. ISBN : 1-584-88220-4. \$ 99,95

Ce livre est une présentation de résultats récents concernant l'étude mathématique des équations de Navier-Stokes incompressibles dans tout l'espace \mathbb{R}^d ($d = 3$ en général), en particulier au sujet du problème de Cauchy. La plupart des résultats existants sur la question (jusqu'en 2002) y sont traités et démontrés, par des techniques d'analyse harmonique.

La volonté de l'auteur étant de fournir un texte auto-contenu, le premier quart de l'ouvrage (la première partie, formant une centaine de pages) est une introduction à l'analyse harmonique réelle, avec l'énoncé et la démonstration de tous les résultats qui pourront être utiles par la suite pour l'étude du problème de Cauchy des équations de Navier-Stokes, depuis les classiques injections de Sobolev jusqu'à

des résultats sophistiqués sur BMO (le théorème $T(1)$, les espaces de Hardy), en passant par deux chapitres sur les ondelettes.

Les deux parties suivantes présentent les résultats « classiques » sur les équations de Navier-Stokes : après une présentation générale des équations (projections sur les champs de vecteurs de divergence nulle, considérations sur la pression), l'auteur énonce et démontre le théorème de Leray (existence globale de solutions d'énergie finie) et les résultats d'unicité de Serrin et de von Wahl, ainsi que les résultats de Fujita et Kato d'existence et d'unicité de solutions plus régulières (H^s pour $s \geq d/2 - 1$ et L^p pour $p \geq d$). La démonstration du théorème de Leray suit la méthode d'origine de régularisation de l'opérateur non linéaire par convolution. La démonstration des résultats de Fujita et de Kato repose classiquement sur une méthode de contraction en suivant un schéma de Picard.

La quatrième partie du livre traite de résultats récents d'existence et d'unicité de solutions dans des espaces invariants d'échelle. À peu près tous les espaces de ce type sont traités, depuis les espaces de Lorentz et les Besov jusqu'à BMO^{-1} . La question de l'autosimilarité des solutions est également étudiée.

La cinquième partie consiste en une analyse de propriétés plus qualitatives des solutions : analyticité, localisation spatiale et décroissance en grand temps en particulier (aussi bien pour des solutions d'énergie finie que pour des solutions plus régulières).

Enfin la dernière partie présente des résultats fins sur les solutions faibles dans l'esprit des travaux de Caffarelli, Kohn et Nirenberg (dimension de Hausdorff de l'ensemble des points singuliers), ainsi que de résultats d'unicité fort-faible généralisant ceux de von Wahl.

De nombreuses références figurent à la fin du livre, ainsi qu'un index (par auteurs et par sujets).

Ce livre présente donc une quantité impressionnante de résultats sur le problème de Cauchy pour les équations de Navier-Stokes incompressibles dans l'espace entier. Son caractère auto-contenu en fait un outil de travail idéal pour quelqu'un voulant s'initier à cette théorie – notons qu'un travail d'édition plus soigné n'aurait certainement pas nui à la qualité de l'ouvrage, certaines preuves étant pénibles à lire pour de simples raisons de mise en page. Signalons d'autre part que ce souci d'exhaustivité a pour contrepartie un foisonnement de résultats qui ne permet pas toujours de dégager les théorèmes significatifs des autres – à cet égard, la lecture de la quatrième partie de cet ouvrage conforte dans l'impression que la théorie du problème de Cauchy pour les équations de Navier-Stokes est arrivée à un point où il devient urgent de trouver un autre angle d'attaque si l'on veut progresser, les méthodes « classiques » semblant avoir donné tout ce qu'elles pouvaient.

En conclusion je recommanderais la consultation de ce livre à quiconque voudrait s'initier à l'état de l'art sur les équations de Navier-Stokes, mais aussi à des techniques fines d'analyse harmonique utiles plus généralement dans l'étude d'équations aux dérivées partielles non linéaires dans l'espace entier.

Isabelle Gallagher, Université Paris VII

Les lendemains de l'intégrale – Lettres à Émile Borel

HENRI LEBESGUE

Préface de Gustave Choquet, Vuibert 2004. 240 p.

ISBN : 2-7117-5309-3. 29,00 €

Ce livre mérite une large audience. Ce n'est pas un ouvrage de mathématiques. C'est un témoignage, brut, sur la vie et la façon de penser d'un mathématicien d'exception.

Il rassemble des lettres de Lebesgue à Borel qui vont de 1901 à 1917. Borel avait conservé ces lettres, et je dirai plus loin comment elles ont été découvertes. Les lettres de Borel à Lebesgue sont perdues. Il s'agit donc d'une demi-correspondance, dont la lecture a le charme de la moitié qu'on lit et de la moitié qu'on devine. Lebesgue y figure en relief avec sa rugosité et ses aspérités, et Borel en creux, très présent cependant, l'aîné bien établi, séduisant et protecteur. Lebesgue écrit au fil de la plume, comme il pense, sans souci de mise en forme, sans soupçonner que d'autres que leur destinataire liront ses lettres un siècle plus tard.

Certaines lettres sont datées, d'autres non. Dans les premières, jusqu'en mars 1905, il donne à Borel, qui a quatre ans de plus que lui, du « Cher Monsieur », puis il passe à « Mon cher ami » et « Mon cher Borel ». Les sujets sont multiples : les soucis d'argent, le cours Peccot, la carrière de Lebesgue et celle de Borel, la publication des ouvrages de Lebesgue, les travaux de Borel, les approches différentes de la mesure, de l'intégrale et d'autres notions mathématiques, la famille de Lebesgue, qu'il lui faut entretenir laborieusement, et celle de Borel, qui le soutient (dès leur mariage, la femme et la belle-mère de Lebesgue sont malades ; Borel a épousé Marguerite, la fille de Paul Appell, qui se fera appeler Camille Marbo comme femme de lettres), les autres mathématiciens auxquels ils ont affaire, l'*Encyclopédie des sciences mathématiques*, la guerre, les différends scientifiques et enfin la brouille.

Ce qui est extraordinaire est le ton de ces lettres. Elles sont sincères et brutales. Lebesgue connaît sa valeur, et ses devoirs à l'égard de sa famille. Le besoin d'argent est lancinant. Le début de carrière n'est pas facile. Le cours Peccot, avant d'être un honneur et un moyen de faire connaître ses travaux, est pour lui un enjeu financier, d'où la compétition et le conflit avec Baire. Il s'en explique avec une « *franchise brutale* » ; c'est le terme utilisé par Borel, et repris en citation par Lebesgue dans la lettre du 15 octobre 1903. Il pense, ajoute-t-il, « *que sans une franchise exagérée on ne peut avoir de vrais amis* ». Cette franchise s'exprime à son endroit (« *je suis susceptible sur certaines choses, sur toutes celles qui concernent la question argent* »), dans une totale spontanéité (« *et voici encore une lettre non relue et écrite au courant de la plume, sans poids ni balance* »). L'occasion de cette lettre est « *une coïncidence bizarre* » relevée par Borel entre un travail de Lebesgue et celui d'un autre mathématicien ; le terme a heurté Lebesgue, il l'a dit à Borel avec sa « *franchise stupide* », et il y revient dans sa lettre.

Voici un autre exemple de cette franchise. En 1909, Borel va être titularisé à la Sorbonne. Lebesgue lui écrit :

« *J'ai donc appris que l'on voulait vous titulariser... Eh bien ! très franchement je regrette cette affaire. Rien de plus naturel que votre désir d'être titularisé, mais*

la titularisation dans le moment actuel ne semble être à l'étude que parce qu'Hadamard reçoit un avancement. J'aurais voulu, ce qui vous eût été bien facile, que vous légitimiez cette titularisation par des travaux. Pour tout dire je vous reproche La revue du mois. Je sais bien que vous trouvez là l'occasion de dépenser vos qualités d'action et vos ardeurs d'administrateur, mais c'est ce que j'estime le moins en vous. »

Suit une longue réponse de Borel, que nous pouvons imaginer car Lebesgue insiste dans sa lettre du 26 avril 1909 : « *Oui, vous avez fait moins de mathématiques et plus d'à-côté et c'est ce que je vous reproche car, je sais que ce que je vais dire est à la fois cruel et injuste mais je veux espérer que le seul fait que je vous le dise vous prouve que j'en vois l'outrance, vous ne renoncez pas à avancer dans l'université ni les Académies.* » Et encore, dans une lettre postérieure où il évoque sa propre situation à l'époque, et la perspective de terminer sa carrière en province : « *Vraiment il est curieux que nous nous entendions si peu. Je vous reproche à l'occasion de votre titularisation d'avoir délaissé les mathématiques et vous me prouvez que vous n'avez pas fait une carrière de gendre. Je vous laisse voir que je ne suis pas égayé par les derniers événements et vous me croyez une mentalité de méconnu, de persécuté, d'obsédé. Non.* »

Rien ne résume mieux cet aspect des relations entre Lebesgue et Borel que le début d'une lettre bien postérieure, du 11 octobre 1915 : « *J'avoue que j'ai remis plusieurs fois avant de vous écrire, j'ai trop peur de ne pas savoir dire bien ce que je devrais vous exprimer sans peine : le sentiment d'amitié profonde et jalouse que j'ai pour vous. Il ne s'est manifesté à vous que par des attrapages rudes, durs et parfois injustes : c'est qu'alors je vous en voulais âprement de ne pas avoir été complètement ce que j'aurais voulu à tort ou à raison que vous fussiez.* »

C'est bientôt la fin de la correspondance, à cause d'un différend scientifique sérieux sur le rôle de chacun dans les théories de la mesure et de l'intégrale. Le 2 novembre 1917, dans une note très sèche et ironique, Lebesgue écrit : « *J'ai vu avec plaisir que, bien que dans votre dernière notice, vous réclamiez la mesure des ensembles linéaires 'bien définis' comme vous étant 'entièrement due', il me reste comme travail 'entièrement personnel' l'introduction des mots 'de mesure nulle'.* » Puis le 21 décembre, à l'occasion d'un déjeuner esquivé, la déclaration de rupture : « *Pour le moment, toute relation qui sortirait de la camaraderie serait, de ma part, une hypocrisie. Ce ne serait pas avec vous que je déjeunerais, ce serait avec de vieux souvenirs.* »

La suite peut se lire dans le grand article de 1918 *Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration*, où Lebesgue polémique durement avec Borel, et de manière très convaincante. Lebesgue a la dent dure à l'égard de presque tous ses contemporains. Voici quelques-unes des ses appréciations :

Après son échec devant Baire pour le second cours Peccot, il est amer.

« *J'admets que vous, Picard, Hadamard, Montel nous aient lus Baire et moi. Croyez-vous qu'il y en ait d'autres ?* » [lettre du 17 décembre 1903]

« *Croyez-vous Tannery compétent ?* » [*ibidem*]

« *Je ne veux pas discuter, surtout avec vous, la compétence de M. Appell.* » [20 décembre]

« *Ce que vous avez vu dans mes lettres c'est mon dégoût de tout ce public*

mathématique qui juge en regardant l'effet que vont produire les paroles qu'il prononce et non parce qu'il exprime ce qu'il a pensé. La mode, le snobisme peuvent être mathématiques. » [17 décembre]

« Je m'étonne que chacun dans ma thèse ne voie que les parties qui intéressent. Pour Jordan j'ai défini l'aire d'une surface. Pour Picard j'ai fait des surfaces applicables et des surfaces de Plateau. Pour vous j'ai appliqué intelligemment la notion de mesure. Je serais heureux qu'il existe quelqu'un pour qui j'ai fait à la fois ces trois choses. » [*ibidem*]

« Je trouve Lindelöf incorrect. » (question de priorité) [20 décembre 1903]

« Lerch est idiot. » [17 janvier]

« *Je considère le résultat d'Arzelà comme une jolie tautologie.* » [19 mars 1904]

« Je ne suis pas si sévère que j'en ai l'air et, bien que l'on aurait pu mieux rédiger, je n'ai pas de Fréchet une trop mauvaise opinion. » (Fréchet avait rédigé les leçons de Borel) [26 août 1904]

« Il m'est apparu que Baire était égoïste et que, s'il admettait que d'autres que lui savaient raisonner sur la théorie des fonctions, c'était à condition qu'il reste le surhomme. » [11 octobre 1904]

« Je considère Young comme un jeune ou vieil élève qui cherche à glaner de ci de là quelques théorèmes à démontrer. » [14 décembre 1904]

« J'ai reçu de Couturat (le logicien) des remarques qui m'ont semblé stupides quant au fond, prétentieuses quant à la forme. » [17 décembre 1904]

« Le Lindelöf est à mon avis trop inutilement compliqué et général. » [4 mars 1905]

« J'ai reçu une charretée de brochures de Young et en particulier des choses amusantes et pontifes sur l'intégration où il me félicite d'avoir aperçu quelque chose d'équivalent à sa théorie générale, qui date de l'an dernier. Ça prouve que la vérité est en marche. On y voit aussi l'*extended Heine-Borel theorem*. Je finis par croire que ces gens-là sont inconscients et s'imaginent de bonne foi avoir fait des choses énormes. Je finirai par comprendre Lindelöf. » [15 novembre 1905]

« Les bêtises de Pompeiu. » [9 mars et 23 mars 1906]

« Heine a démontré incidemment un théorème dont il n'a aperçu ni l'énoncé, ni l'intérêt ; bien d'autres que Heine sont dans le même cas, Goursat par exemple. » (Lebesgue s'insurge contre l'appellation « Heine-Borel ») [5 janvier 1906]

« Je ne connais rien de plus désolant, de plus décourageant que la lecture d'un article de l'Encyclopédie. » (il s'agit de l'Encyclopédie allemande, dont s'occupe Molk pour l'édition française) [31 janvier 1906]

« Je connais peu, moi aussi, les travaux de Cartan, mais ils me semblent être de bons travaux sans originalité. » [11 décembre 1908] (c'est le moment où Cartan et Lebesgue sont candidats sur le même poste à la Sorbonne)

« Je ne crois en vouloir à personne du choix fait, à Cartan moins qu'à tout autre. J'ai, bien qu'incompétent, beaucoup d'estime pour les travaux de Cartan que j'estime solides, bien faits, difficiles et utiles, tout au plus je lui reproche de ne pas avoir donné à leur auteur occasion de faire preuve de qualité d'invention, ce qui ne prouve pas qu'il soit incapable de création véritable. » [27 avril 1909]

« J'ai été très intéressé par l'article de Cartan, au moins pour certaines parties, bien qu'à ce moment j'avais des raisons particulières pour ne pas trouver épatant ce que faisait Cartan. » [30 septembre 1909] (il s'agit d'un article dans l'Encyclopédie, commandé par Molk ; le début de la lettre est un assassinat de Molk)

« Le livre de Fabry est grotesque, on le croirait pensé et rédigé par d'Adhémar. » [30 mai 1910]

« La conférence de Russell n'a eu que peu de succès ; ce qu'il a dit était fort obscur et peu nouveau. » [23 mars 1911]

« J'ai vu Janiszewski, il est évidemment aussi têtue et étroite d'idées qu'on peut le souhaiter. » [10 avril 1911]

« Il faut peut-être aussi soutenir Brouwer à cause de son mauvais caractère, qui doit lui avoir fait quelques ennemis. Pour moi je suis au plus mal avec lui... » [1^{er} janvier 1912]

Il faut replacer ces roseries dans leur contexte, car elles sont éclairées par les circonstances ou par des discussions serrées.

Lebesgue est rigoureux, il a un goût sûr et un jugement solide sur les matières qu'il connaît. En particulier, sa brouille avec Baire n'est pas seulement affaire de heurts personnels et de torts mutuels : la controverse scientifique latente est très bien exposée par Lebesgue. Par contre, son jugement sur Élie Cartan est biaisé, et il le sait. Il n'a pas su apprécier Janiszewski, qui l'avait choisi comme directeur de thèse et qui se révélera un remarquable topologue et l'artisan principal de l'essor des mathématiques polonaises. Au cours des années 1920, c'est d'ailleurs en Pologne et en Russie et non en France qu'il fallait chercher l'héritage de Lebesgue. Lebesgue en est responsable pour une part, parce qu'il ne s'intéresse plus à l'intégrale ; on en trouve une preuve dans sa lettre du 11 octobre 1915, où il parle à Borel de l'invitation de Charles de la Vallée Poussin au Collège de France : « *Maintenant se pose la question de l'auditoire, si bien que je vais sans doute être obligé cet hiver d'aller étudier au Collège de France les intégrales de Lebesgue (que c'est vieux ces choses-là)* ».

Lebesgue a de l'estime et de la sympathie pour un petit nombre de mathématiciens : Montel, son camarade de promotion, Fatou, son élève, et Denjoy, qui « *nage dans le Baire comme dans son élément naturel.* » [lettre du 10 décembre 1904] On trouve dans les lettres à plusieurs reprises une évocation de leurs travaux.

Le contenu mathématique des lettres peut être écarté à première lecture. La matière en est riche, mais elle doit être étudiée en confrontation avec les œuvres publiées. Choquet en donne un aperçu dans sa préface. En règle générale, on comprendra mieux les mathématiques de Lebesgue en lisant ses articles que sa correspondance. Par contre, même un lecteur non-mathématicien doit pouvoir apprécier combien la pensée de Lebesgue est agile et son expression fulgurante.

Il faut lire en premier la préface de Choquet. Avant de commenter le contenu du livre il en indique la genèse, et l'histoire vaut d'être contée ici.

Borel conservait beaucoup de choses, et il avait entreposé ses archives dans le sous-sol de l'Institut Henri Poincaré. En 1988, Jean Lefebvre, cherchant à y mettre de l'ordre, découvre 230 lettres de Lebesgue à Borel, s'étageant entre mai 1901 et décembre 1918. Denise Lardeux les répertorie. Bernard Bru et Pierre Dugac, aidés d'Hélène Nocton, les déchiffrent, les confrontent à d'autres textes, les annotent et les publient en 1991 dans le volume 12 des *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*. Choquet et Dugac pensent alors qu'une sélection de ces lettres compléterait bien les *Œuvres scientifiques* de Lebesgue publiées en 1972 et 1973 par la revue de Genève *l'Enseignement mathématique*. Ils sélectionnent 111 lettres

et en préparent l'édition, négocient, et contre leur attente c'est l'échec. En 2000 meurt Dugac, laissant en chantier projets et travaux. André Warusfel entre en scène, il éveille l'intérêt de Marc Jammet aux éditions Vuibert. Des révisions sont encore nécessaires, en confrontant les lettres manuscrites et leur transcription dans les *Cahiers* : c'est Florence Greffe, la directrice des Archives de l'Académie des sciences, très intéressée aux mathématiques depuis qu'elle a reçu le fonds Borel et déterré le pli cacheté de Doebelin, qui se charge de ce travail minutieux. Autre travail nécessaire, la constitution d'un index : il est exécuté par Hélène Gispert. Choquet met au point la préface. Et Vuibert sort sous une forme très agréable les lettres préfacées, annotées, illustrées, indexées et complétées par une riche bibliographie.

Je me réjouis personnellement de l'échec des négociations avec Genève et de la forme trouvée pour la publication. Le livre peut s'adresser à un bien plus large public que les *Œuvres*. Il peut amener des lecteurs ayant une bonne formation en mathématiques à s'intéresser non seulement à la personnalité de Lebesgue, mais au contenu mathématique des commentaires ou des controverses qui se trouvent dans les lettres. Il peut les conduire à consulter les œuvres de Lebesgue, celles de Borel, celles de Baire, les études déjà menées par les historiens des mathématiques et en particulier par Dugac, et à se renseigner sur les œuvres des mathématiciens que Lebesgue apprécie ou déteste. Les notes de Bru et Dugac constituent à cet égard un bon guide.

Mais ce beau livre n'avait pas bien sa place dans l'édition savante que constituent les *Œuvres* publiées en 1972 et 1973, et on comprend les réticences des Genevois à l'accueillir comme dernier volume. Certaines des lettres de Lebesgue se trouvent déjà dans les *Œuvres*. D'autre part la nature des notes utiles n'est pas tout à fait la même pour un large public et pour des mathématiciens, et celles qui figurent dans le livre me paraissent plutôt adaptées à un large public (je pense par exemple à la note 421, relative à Élie Cartan, qui rectifie l'image qu'en donne Lebesgue), et parfois un peu sommaires dans les jugements énoncés (la note 243, qui dit seulement « *Lebesgue se trompe* », à propos des approches de Borel et de Tchebycheff de la théorie de l'approximation, dont Lebesgue dit qu'elles n'ont rien en commun). Reste que l'ensemble des notes constitue à lui seul une belle contribution à l'histoire des mathématiques au début du vingtième siècle.

Le sous-titre du livre s'appelle *Les lendemains de l'intégrale*. Il est remarquable que le centenaire de l'intégrale de Lebesgue ait éveillé tant d'écho. La force maîtresse dès le départ a été celle de Gustave Choquet. L'Académie des sciences, la SMF et en particulier la *Gazette*, l'ÉNS de Lyon, l'université de Rennes, et la rédaction de *Panoramas et synthèses* ont œuvré à la célébration du centenaire et à l'exploration des pistes ouvertes par la thèse de Lebesgue. L'écho hors de France a été important. C'était sans doute le bon moment d'attirer l'attention sur les lettres de Borel à Lebesgue. Encore une fois, on peut se réjouir d'en disposer maintenant sous la forme de ce beau livre.

Jean-Pierre Kahane, Université Paris Sud

L'enseignement mathématique à l'école primaire de la Révolution à nos jours (tome 1 : 1791-1914)

RENAUD D'ENFERT

Institut national de la recherche pédagogique (2003).

374 p. ISBN : 2-7342-0909-8. 32,00 €

Renaud d'Enfert, avec la collaboration d'Hélène Gispert et de Josiane Hélayel, nous propose avec ce livre un recueil de textes officiels concernant comme le titre l'indique, l'enseignement des disciplines relevant des mathématiques à l'école primaire (en France) durant ce qu'il est convenu d'appeler le long 19^e siècle, soit de la Révolution française au début de la première guerre mondiale. Les 70 textes sont précédés d'une passionnante introduction justifiant le choix de ces textes tout en replaçant les directives régissant l'enseignement des disciplines mathématiques dans le contexte général de la politique de l'enseignement primaire pendant le 19^e siècle.

Durant cette période, l'enseignement primaire ne constitue pas un cycle préparatoire à l'enseignement secondaire. En effet, deux systèmes d'enseignement coexistent parallèlement : l'école primaire qui scolarise les enfants des couches populaires et l'enseignement secondaire² réservé aux enfants de la bourgeoisie. Ainsi, l'enseignement primaire possède sa propre voie d'enseignement prolongé : les écoles primaires supérieures ; l'enseignement secondaire, quant à lui, englobe des classes élémentaires régies par des textes relevant de cet ordre d'enseignement.

Si l'enseignement primaire élémentaire est durant presque tout le 19^e siècle consacré à la trilogie «lire, écrire, compter», à laquelle s'ajoute à partir de la Restauration, l'instruction morale et religieuse ainsi que le système légal des poids et mesure, les écoles primaires supérieures prolongent cet enseignement et préparent à la vie professionnelle. Il comprend

«les éléments de la géométrie et ses applications usuelles, spécialement le dessin linéaire et l'arpentage, des notions des sciences physiques et de l'histoire naturelle applicables aux usages de la vie, le chant, les éléments de l'histoire et de la géographie, et surtout de l'histoire et de la géographie de la France.»

[Extrait de la loi Guizot – 28 juin 1833 – p. 72]

L'enseignement mathématique est emblématique de la place de l'école primaire dans le dispositif éducatif et social français durant le 19^e siècle. Celle-ci ne doit offrir que des connaissances pratiques et usuelles. Ainsi, les programmes de l'école primaire quant à l'enseignement mathématique ne concernent essentiellement que le calcul ou l'arithmétique. Ceux des écoles primaires supérieures peuvent, selon les périodes, proposer des éléments de géométrie (le plus souvent en liaison avec des applications comme l'arpentage) et ceux des écoles normales où se forment les futurs instituteurs, une introduction à l'algèbre.

Les textes régissant l'instruction primaire illustrent l'ambivalence des objectifs que les divers gouvernements qui se succèdent durant cette période assignent à la

² Pour plus de précisions sur l'enseignement scientifique dans l'enseignement secondaire durant le 19^e siècle, on peut consulter le livre de Bruno Belhoste : *Les sciences dans l'enseignement secondaire français. Textes officiels, 1789-1914*, Paris : INRP/Economica, 1995.

formation des classes populaires. D'une part, il s'agit d'assurer à chacun une instruction élémentaire minimale; sans sous-estimer les préoccupations humanistes des éducateurs, il ne faut pas oublier les intentions centralisatrices des promoteurs de la généralisation de l'instruction :

La langue française ajoutée à la lecture et à l'écriture, le système légal des poids et mesure ajouté au calcul, sont deux enseignements qui doivent être universels pour que le langage uniforme des lois soit partout compris, et pour resserrer de jour en jour davantage les liens qui unissent déjà toutes les parties de la population, et augmenter encore cette admirable unité française qui est notre gloire et notre force.

[Victor Cousin – 21 mai 1833 – p. 71]

D'autre part, l'enseignement des écoles primaires doit rester pratique, concret et appliqué pour ne pas produire des «déclassés», ou pire des «savants de village», dont les connaissances et la formation seraient «incompatibles avec leur destinée naturelle». Tout ce qui est de l'ordre de l'abstraction ou de la théorie relève de l'enseignement secondaire.³

Renaud d'Enfert distingue quatre périodes : la première (1791-1815) correspond à la période révolutionnaire et napoléonienne. Elle est caractérisée par un important décalage pour l'école primaire entre les ambitions affichées et la perpétuation en fait des «petites écoles» de l'Ancien Régime. Ainsi, malgré la volonté originelle d'introduire dans les *curricula* des notions de géométrie pratique, incluant le toisé et l'arpentage, l'enseignement mathématique se cantonnera (y compris dans les textes officiels) très rapidement à l'apprentissage du calcul. La seconde période est celle de la Restauration et de la Monarchie de Juillet avec un regain d'intérêt pour les écoles primaires et l'apparition des écoles primaires supérieures (loi Guizot du 28 juin 1833). Cette période est caractérisée par «l'école mutuelle», une organisation des *curricula* dans laquelle les apprentissages de la lecture, de l'écriture et du calcul se font simultanément alors que dans la tradition des petites écoles, l'enseignement du calcul était relégué en fin de scolarité après l'apprentissage de la lecture et de l'écriture et donc souvent sacrifié. Le souci de développer l'enseignement primaire se traduit par l'introduction effective dans les programmes d'éléments de géométrie et des applications de celles-ci comme «le dessin linéaire et l'arpentage». La place de la géométrie dans les *curricula* de l'école primaire est un enjeu entre ceux qui veulent faire évoluer cette voie de formation et en particulier développer un enseignement professionnel et ceux qui «réclament un enseignement véritablement primaire, détaché de tout raisonnement abstrait».

La troisième période (1850-1870), celle du Second Empire, est caractérisée par une réaction et un rejet de l'extension donnée à l'enseignement primaire depuis 1830. Cela se traduit par une limitation des programmes et l'exclusion de la géométrie de l'enseignement mathématique primaire. Seuls, le calcul et le système métrique subsistent ainsi que de manière facultative, quelques applications utiles de la géométrie

³ Sur la question des objectifs de l'enseignement primaire et de la place assignée aux enseignements mathématiques durant le 19^e siècle, on peut consulter l'article de Teresa Assude et Hélène Gispert, *Les mathématiques et le recours à la pratique : une finalité ou une démarche d'enseignement ?* dans le volume édité par P. Kahn et D. Denis, *L'école républicaine et la question des savoirs : Enquête au cœur du Dictionnaire de pédagogie de Ferdinand Buisson* (Paris : CNRS éditions, 2003). Dans le même volume, dans son article, «Manuel (travaux)» : *préparer au métier ou éduquer ?*, Renaud d'Enfert reprend aussi cette problématique en s'intéressant au travail manuel et aux liens que les exercices manuels entretiennent avec l'enseignement mathématique.

comme l'arpentage, le nivellement et le dessin linéaire. Les instructions aux instituteurs excluent explicitement tout raisonnement, toute approche abstraite ou spéculative :

Le maître évitera donc toutes les questions oiseuses qui n'ont d'application dans aucune profession, ou qui offrent seulement de l'intérêt comme préparation à des études que les élèves n'entreprendront jamais, ou comme curiosité et exercice de l'esprit. [...] L'arithmétique, avons nous dit, est, de toutes les branches de l'enseignement primaire, celle qui trouve le plus une application directe dans les toutes les positions de la vie. Profitons donc du caractère particulier de cette science, et puisque le sens pratique des populations leur fait dédaigner les recherches et les spéculations purement théoriques dont ils ne comprennent pas la portée, exerçons de préférence l'esprit de nos élèves sur des questions qui touchent à des besoins de chaque jour. [De la direction à donner par les instituteurs à leur enseignement – février-mars 1855 – p. 137.]

L'arrivée en 1863 de Victor Duruy au ministère de l'Instruction publique amène une extension modérée des programmes de l'école primaire avec l'introduction de nouvelles matières facultatives comme la géométrie. Ces mesures annoncent la quatrième période (1870-1914), celle de l'avènement de la République auquel correspond, selon Renaud d'Enfert, un renouvellement pédagogique sans précédent. Les rythmes d'apprentissage sont modifiés ; par exemple, à partir de 1882, les programmes de l'école primaire comportent un enseignement scientifique élémentaire de sciences naturelles, physique et mathématiques. Dès le début de la scolarité, l'apprentissage du calcul et l'initiation au système métrique sont généralisés. En particulier, l'introduction de notions de système métrique dans les programmes des premières années de l'école primaire entraîne un bouleversement de l'enseignement de l'arithmétique : l'étude des nombres entiers et décimaux dès le cours élémentaire. L'enseignement de la géométrie commence aussi dès le cours élémentaire et bénéficie du renouvellement pédagogique qui prône autant l'acquisition de connaissances qu'une «éducation intellectuelle».

L'éducation intellectuelle, telle que peut la faire l'école primaire publique [...] ne donne qu'un nombre limité de connaissances. Mais ces connaissances sont choisies de telle sorte, que non seulement elles assurent à l'enfant tout le savoir pratique dont il aura besoin dans la vie, mais encore elles agissent sur ses facultés, forment son esprit, le cultivent, l'étendent et constituent vraiment une éducation.

[Programmes annexés au règlement d'organisation pédagogique des écoles primaires publiques – 27 juillet 1882 – p. 216]

Enfin, il ne faut pas oublier que durant le 19^e siècle, l'enseignement des filles et celui des garçons sont régis par des textes différents. L'enseignement mathématique féminin est systématiquement simplifié par rapport à celui des garçons ; en particulier, la géométrie est quasiment inexistante jusqu'en 1893. De plus, la formation des maîtres subit les évolutions de la politique générale de l'enseignement primaire. Ainsi, en même temps que, comme on l'a vu, les programmes de l'école primaire sont revus à la baisse au moment de l'avènement du Second Empire, les écoles normales sont reprises en main ; leur objectif est alors de former selon le ministre Fortoul, «des instituteurs sages et modestes» recrutés après une enquête de moralité.

Outre l'introduction, le lecteur appréciera les trois index (onomastique, géographique et thématique). Ce livre constitue bien entendu une source indispensable pour tout ceux qui s'intéressent à l'histoire de l'enseignement ou à celle

du 19^e siècle. Mais de plus, dans la mesure où l'histoire des mathématiques n'est plus heureusement depuis longtemps une histoire des résultats mathématiques et des mathématiciens, mais s'intéresse autant aux conditions de production de ces résultats qu'à la place des mathématiques dans la société, ce recueil est une importante contribution à l'histoire des mathématiques surtout si l'on se souvient que l'enseignement primaire est celui de l'immense majorité de la population. Pour finir, au moment où de nombreuses voix se font entendre pour «revenir aux fondamentaux» dans l'enseignement et/ou pour professionnaliser les formations, ce livre permettra, en nous rappelant qu'un des soucis constants de l'état en matière d'éducation durant le 19^e siècle est l'encadrement des classes populaires, d'interroger les intentions réelles de ceux qui ne mettent pas au centre des objectifs de l'école l'apprentissage du raisonnement et d'une pensée critique exigeante.

Philippe Nabonnand, Université Nancy II

Épures de géométrie descriptive
Concours d'entrée à l'École normale supérieure

BORIS ASANCHEYEV

Préface de Gabriel Ruget, Hermann 2002. 231 p.

ISBN : 2-7056-6447-5. 22,00 €

Je dois à René Thom le fait que certaines assertions, du genre « tout ou rien », bien qu'elles semblent triviales, ne le sont pas tellement. Un cas typique est celui de la géométrie descriptive. Ceux des générations qui ont eu affaire à elle par force pour passer les concours des grandes écoles sont répartis en deux classes, pas une de plus : ceux qui la haïssaient, ceux qui l'adoraient. Le livre de Boris Asanchev s'adresse donc exclusivement aux membres de la deuxième classe. Notre analyse enthousiaste ne fera pas changer ceux de la première. Mais ces enthousiastes existent : juste après avoir reçu de la SMF le livre à recenser, un ancien polytechnicien nous a demandé comment se procurer les épures du concours ! Et appris récemment que de nombreux « Compagnons du Tour de France » raffolent plus de la géométrie descriptive (la « DES ») que même la taille des pierres elle-même.

On lira dans le chapitre 1 une très bonne histoire de cette discipline. Le but est de représenter un objet de l'espace (notre espace à trois dimensions) par deux projections sur des plans perpendiculaires (on parle d'une « épure » : cela fait quatre paramètres, alors que trois seulement sont nécessaires, mais il y a un alignement nécessaire pour les points des deux projections qui finalement réduit bien ce nombre à trois, ce sont les fameuses « lignes de rappel », exigées en rouge, mais qui sont en traits noirs fins dans le livre). On verra ensuite comment l'auteur a mélangé programmation d'ordinateur et géométrie personnelle pour finalement présenter ces épures du concours de l'ÉNS de 1865 à 1959. Certaines ont un aspect esthétique qui nous a beaucoup plu.

Très brièvement : construite et développée par Monge vers 1794, la « DES » est enseignée très peu de temps par lui à l'École normale supérieure (ÉNS), mais dès 1826 elle fait partie du cursus de l'école, puis dès 1858 fait partie du programme du concours. Le présent livre résout toutes les épures du concours de l'ÉNS : à l'oral jusqu'en 1904, la DES constitue une des quatre épreuves de l'écrit à partir de 1905,

et n'en est supprimée qu'en 1959. Elle aussi à l'écrit du concours de Polytechnique jusqu'en 1958, et reste encore à l'écrit des écoles Centrale, des Ponts et Chaussées et des Mines jusqu'en 1962.

Il nous semble raisonnable de dire que la « DES » est restée longtemps à l'écrit de ces concours pour une double raison : d'une part faire de la géométrie pour elle-même, d'autre part pour former à une vision de l'espace. La composante géométrique explique l'insistance de l'épure de « DES » à l'ÉNS, mais aussi sa disparition car la géométrie des épures du concours était devenue, si ce n'est obsolète, en tout cas n'était plus dans le courant principal de cette discipline (en gros la géométrie algébrique). Pour les autres écoles il s'agit plutôt de la composante « vision dans l'espace ». Ici cette disparition est plus surprenante. Ce qui va suivre est assez polémique, mais nous semble important pour l'avenir. En passant signalons que le livre comporte une bibliographie, dont le livre (Sakarovich 1998) est probablement le plus intéressant. On pourra y ajouter la recension (Patras 1991) de la réimpression de l'ouvrage original de Monge.

La vision dans l'espace reste aujourd'hui encore une nécessité pour de nombreuses professions. Nous en laissons un essai de liste complète au lecteur. Mentionnons seulement : les pilotes d'avion, plus encore les contrôleurs aériens, les chirurgiens (la coelioscopie ne fait que rendre cette vision encore plus nécessaire), les dentistes, un grand nombre d'ingénieurs, tous ceux qui doivent concevoir des robots, les architectes, en fait tous les métiers de la mécanique. L'affirmation simpliste que la CAO (conception assistée par ordinateur), ou que la modélisation, permettent de s'en passer est un leurre. Certes la CAO est utile, voire indispensable, mais de l'avis de toutes les personnes que nous avons consultées, des constructeurs d'avions aux architectes, on ne peut vraiment bien s'en servir si l'on n'a pas déjà d'une façon ou d'une autre, développé cette fameuse, voire redoutée, vision. Pour beaucoup ce sont des esquisses, des petits dessins « à la main », qui sont nécessaires, etc. En outre la CAO peut avoir parfois des conséquences graves. Un cas subtil est celui du moulage des pièces, car il faut que l'on puisse les démouler !

Pour en revenir d'abord à la vision dans l'espace, elle est une chose difficile, même si certains l'ont plus ou moins naturellement. Le texte (Cartier 1991) est une réflexion importante à ce sujet : même une compréhension profonde de la géométrie plane est encore un sujet « trop » difficile pour les mathématiciens aujourd'hui. Reste la question fondamentale : comment enseigner, dans les écoles ou les universités qui préparent à des professions qui en ont besoin, cette vision dans l'espace ? Répétons le problème : sur les deux exemples typiques, les contrôleurs aériens et les chirurgiens, surtout en coelioscopie, ils doivent réaliser des choses à trois dimensions alors qu'ils ne disposent sur leurs écrans d'ordinateur que de configurations planes. La lecture d'un livre d'anatomie, décrivant la crosse de l'aorte, est instructive à ce sujet. Certes on peut l'apprendre « sur le tas », mais au prix parfois d'erreurs. Pour le cas historique du pont de Navier (le même que celui de l'équation de Navier-Stokes et du prix Clay), voir le texte passionnant (Cannone and Friedlander 2003), entre autres la citation du « Curé de village » de Balzac.

Or actuellement, au mieux de notre connaissance la DES est abandonnée dans toutes les écoles d'ingénieurs, et pire, en amont, la géométrie dans l'espace a pratiquement disparue des programmes du secondaire, et même de l'agrégation (de mathématiques), programme duquel par exemple ont disparu pratiquement les

coniques, et en tout cas les quadriques. La DES reste enseignée dans les écoles d'architecture, et nous avons entendu dire que le quai Malaquais (jargon pour la direction des études d'architecture à l'école des Beaux-Arts de Paris) envisageait de renforcer cet enseignement, qui avait été réduit à quelques quatre épures dans tout le cursus ! La Suisse est plus sérieuse que nous : si les ingénieurs n'y ont pas de DES, outre certes des cours de CAO, ils ont quand même un cours de géométrie euclidienne (géométrie vectorielle), transformations affines et isométries, initiation aux courbes et surfaces. Pour les architectes, ils font 4 ou 5 semaines de DES (Monge-Perspective-Axonométrie). Mieux, en amont, les lycéens de certains cantons ont encore un cours assez poussé de DES dans certaines filières scientifiques (mais je doute que cela soit encore le cas dans 10 ans). Dans les années 1940-1950 il y avait encore un peu de DES en France dans l'ex-section « math. élém. », et les années où les trois questions de cours en étaient, cela frôlait le drame.

Il y a en France une exception notable au niveau des ingénieurs, c'est celle de l'École des Arts et Métiers. Même s'il s'y montre de plus en plus une forte tendance vers les professions purement commerciales, voire, financières, une grande partie des élèves qui en sortent ont eu, tant dans leur préparation au concours qu'à l'école, une formation à la vision des mécanismes les plus compliqués, par des dessins à analyser, des croquis à faire, etc. En fait les ingénieurs des Arts et Métiers forment une très grande partie des ingénieurs « de terrain » de nombreuses usines et contribuent à la qualité exceptionnelle de l'industrie française de pointe. *A contrario*, nous savons que quand certains polytechniciens ont été embauchés au service des recherches pétrolifères d'ELF Aquitaine, il leur a fallu plusieurs mois avant de réaliser que la recherche pétrolifère est un problème à trois (et pas à deux) dimensions !

Revenons à la CAO, la modélisation, et sur un problème qui généralise celui de la vision dans l'espace. C'est celui du fossé qui va grandissant, avec la complexité et la technicité du monde actuel, entre le pathos d'un utilisateur de CAO et le résultat qui sort de l'ordinateur. Ici il n'est plus seulement question « d'ordre de grandeur », mais d'une discontinuation absolue. Il suffit que l'on rentre mal les données dans l'ordinateur pour que le produit final soit complètement inadéquat, ce qui est un moindre mal dont on s'aperçoit au montage de la pièce sur l'ensemble à construire. Mais si c'est la résistance, la souplesse, etc. qui est en cause, une catastrophe peut arriver. À moins que dans l'usine il n'existe encore un ingénieur de terrain, un contre-maître, un ouvrier qualifié, auquel sa vieille expérience dira qu'il faut reprendre les choses, refaire les calculs, etc. Pour Navier, rappelons d'abord qu'il n'avait pas fait de maquette, et ensuite (c'est plus grave) qu'il n'avait pas ajouté les canoniques 10% de marge.

Il ne s'agit pas de science-fiction ; nous savons de source directe que de telles erreurs sont arrivées, entre autres dans la fabrication d'avions, et dans des constructions de bâtiments, où tout récemment des dalles de béton se sont effondrées, causant plusieurs morts. L'histoire suivante est entièrement véridique, et montre que le trou « pathos-ordinateur » peut parfois être comblé. Le viaduc de l'autoroute qui entre à Lyon par le tunnel de Fourvière ne s'est jamais écroulé, *i.e.* n'a jamais bronché lors des mesures régulièrement faites. Ceci grâce au savoir-faire, au « know how » des gens de terrain. Car il avait été construit par la même entreprise, et avec exactement les mêmes normes, que le viaduc de l'autoroute Lyon-Chambéry sur le

lac d'Aiguebelle. Or celui-ci a commencé à s'enfoncer, et il ne fallut rien moins que doubler le tablier. On a consulté le chef de chantier du viaduc de Lyon, et il y a répondu : « *quand j'ai vu les normes demandées pour le métal du béton armé, je les ai trouvées trop faibles et j'ai simplement fait doubler les fers* ».

Avant de conclure, rétablissons quelque peu l'équilibre entre savoir-faire, pratique sur le terrain, et approche conceptuelle. Il est évident que cette dernière est essentielle pour progresser. C'est ainsi que Monge devint célèbre immédiatement par son étude des défilements, et par celle de l'optimisation des déblais-remblais. Assez récemment, un jeune élève de Polytechnique en stage chez Renault put expliquer pourquoi un pourcentage de lunettes arrière des R11 devaient être recassées ; la raison était que le schéma numérique mis en place à l'usine, même avec des maillages de plus en plus fins, était trop primitif dans la géométrie différentielles des surfaces (usage trop simplifié de la forme fondamentale de la surface des dites lunettes). Reste que cette histoire montre une fois de plus la tendance actuelle à faire trop confiance à la modélisation, alors que d'une part le programme peut être insuffisant ou erroné, mais aussi que la rentrée manuelle des paramètres peut elle aussi être erronée.

Terminant donc en insistant bien sur le fait que la DES n'est probablement pas le meilleur moyen pour façonner une vision de l'espace, mais à part les dessins et la théorie de la perspective (enseignée dans les écoles d'Art systématiquement) et en souhaitant, au vu des drames de plus en plus nombreux qui vont probablement arriver dans plusieurs domaines, que trois études soient faites : une enquête sur ce problème de vision dans l'espace et de son apprentissage, une enquête sur comment combler le vide devenu presque absolu entre le pathos des utilisateurs d'ordinateurs (modélisation, CAO), et les résultats qui sortent de ces machines. Et troisièmement mettre au point un (ou des) système(s) de vérification, de certification de projets de constructions, qui soit meilleur, et surtout plus sûr que celui qui est en place actuellement.

Marcel Berger, IHÉS

Cannone, M. and S. Friedlander – *Navier : Blow-up and collapse*, Notices of the AMS **50**, number 1, 2003, p. 7-13.

Cartier, P. – *Le calcul des structures à deux ou trois dimensions est un défi pour les mathématiciens*, Pour la Science **168**, octobre 1991, p. 8-10.

Patras, F. – *Géométrie descriptive*, Gaspard Monge, recension dans la *Gazette des mathématiciens*, Soc. Math. de France, **48**, 1991, p. 62-64.

Sakarovich, J. – *Épures d'architecture. De la coupe des pierres à la géométrie descriptive*, Birkhäuser, 1998.