
Géométrisation des variétés de dimension 3 via le flot de Ricci¹

Michael T. Anderson²

Introduction

La classification des surfaces fermées a été une étape importante du développement de la topologie, tellement importante qu'elle est maintenant enseignée au cours des premières années d'université en guise d'introduction à la topologie. Depuis la résolution du problème de l'uniformisation des surfaces par Poincaré et Koebe, cette classification topologique est mieux comprise en termes de géométrisation des surfaces : toute surface fermée Σ admet une métrique à courbure de Gauss constante qui vaut soit $+1$, soit 0 , soit -1 , et ainsi elle est « uniformisée » par l'une des surfaces modèle \mathbb{S}^2 , \mathbb{R}^2 ou \mathbb{H}^2 . Ainsi toute surface Σ est le quotient soit de \mathbb{S}^2 , soit de \mathbb{R}^2 , soit de \mathbb{H}^2 par un groupe discret Γ agissant librement et isométriquement.

La classification des variétés de dimension plus grande est, bien sûr, beaucoup plus difficile. En effet, à cause de la complexité du groupe fondamental, une classification complète comme dans le cas des surfaces n'est pas possible en dimension supérieure ou égale à 4. En dimension 3 cet argument ne s'applique pas et la classification complète des variétés de dimension 3 est depuis longtemps le rêve des topologues. Un cas particulier est d'ailleurs la conjecture de Poincaré.

Dans cet article nous évoquerons le remarquable travail récent de Grisha Perelman [15]-[17], qui pourrait bien avoir résolu le problème de la classification des variétés de dimension 3 (dans un sens très naturel). Le travail de Perelman est en ce moment l'objet d'intenses investigations et vérifications par plusieurs groupes de chercheurs à travers le monde. À l'heure qu'il est, l'essentiel de ce travail a été validé par les experts de ce domaine. Même s'il est trop tôt pour annoncer une solution définitive à ce problème, on peut affirmer que les idées de Perelman sont hautement originales et très profondes. De plus, ses résultats sont déjà utilisés par d'autres chercheurs dans d'autres domaines. Tout ceci justifie, même à ce stade, l'écriture d'un article, ce qui pourrait paraître prématuré autrement.

Le travail de Perelman est bâti sur des travaux antérieurs de Thurston et Hamilton. Dans les deux sections suivantes nous présenterons les points de vue de Thurston sur les variétés de dimension 3 et du flot de Ricci introduit et étudié par Hamilton. Pour des informations complémentaires, en particulier sur la conjecture de Poincaré on renvoie à l'article de Milnor [14] (et qui a été traduit par la Gazette des Mathématiciens dans le numéro 99) ainsi qu'aux références contenues dans cet

¹ Ce texte a été publié par les *Notices* de l'AMS volume 51, numéro 2, sous le titre "Geometrization of 3-manifolds via the Ricci flow". Il a été traduit pour la *Gazette* par Zidine Djadli (Université de Cergy-Pontoise).

² E-mail : anderson@math.sunysb.edu

article. Pour plus d'informations et de détails sur le travail de Perelman on renvoie à [13].

La conjecture de géométrisation

Alors que la conjecture de Poincaré date d'environ un siècle, les remarquables idées de Thurston à la fin des années 70 ont amené à une possible et réaliste classification des variétés fermées de dimension 3 de manière analogue à la classification des surfaces via le théorème d'uniformisation.

Pour expliquer cela, nous avons besoin de préciser ce que sont les « géométries » correspondantes en dimension 3. En terme de géométrie riemannienne, une structure « géométrique » sur une variété M est la donnée d'une métrique riemannienne g complète et localement homogène. Ainsi M peut être décrite comme un quotient $\Gamma \backslash G/H$, où G est le groupe d'isométries du revêtement universel (\tilde{M}, g) et Γ et H sont des sous-groupes du groupe de Lie G , Γ étant discret et H étant compact. Thurston a montré qu'il n'y a que 8 quotients de ce type (G/H) qui soient simplement connexes et qui admettent des quotients compacts³.

Comme en dimension 2, les géométries les plus importantes sont celles qui sont à courbure constante : géométrie hyperbolique \mathbb{H}^3 de courbure -1 , géométrie euclidienne \mathbb{R}^3 de courbure 0 et géométrie sphérique \mathbb{S}^3 de courbure $+1$. Les cinq autres géométries modèles sont des produits ou des produits tordus de surfaces. Les fibrés \mathbb{S}^1 triviaux sur une surface de genre $g > 1$ ont une géométrie $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, tandis que les fibrés non triviaux ont une géométrie $\tilde{S}L(2, \mathbb{R})$; les fibrés \mathbb{S}^1 non triviaux sur \mathbb{T}^2 ont une *Nil*-géométrie, tandis que les fibrés \mathbb{T}^2 sur \mathbb{S}^1 ont une *Sol*-géométrie (ou une *Nil*-géométrie ou une géométrie de type \mathbb{R}^3); finalement, les fibrés \mathbb{S}^1 sur \mathbb{S}^2 ont une géométrie du type $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ (ou \mathbb{S}^3). Par exemple, toute variété de dimension 3 Seifert fibrée (une variété qui admet une action de \mathbb{S}^1 localement libre), a une structure géométrique.

Les variétés « géométriques » de dimension 3, c'est-à-dire les variétés de dimension 3 admettant une structure géométrique, sont les briques élémentaires pour construire des variétés de dimension 3 plus compliquées. Pour simplifier on supposera dans cet article que toutes les variétés considérées sont orientables. Les briques élémentaires sont donc « assemblées » le long de sphères de dimension 2, en utilisant l'opération de somme connexe, et le long de tores de dimension 2. Comme exemple d'un tel assemblage, soit $\{M_i\}$ une famille finie de variétés Seifert fibrées de dimension 3 sur des surfaces Σ_i à bord non vide, de tel façon que ∂M_i soit un tore pour tout i . Ces tores peuvent être « collés » les uns aux autres par paire en utilisant des difféomorphismes pour obtenir une variété fermée de dimension 3 ou une variété de dimension 3 à bord torique. Une variété de dimension 3 assemblée de cette façon est appelée une variété graphe (on associe un sommet à chaque espace Seifert fibré et une arête à chaque tore qui relie deux espaces Seifert fibrés). Un fibré en tore au-dessus de \mathbb{S}^1 est une variété graphe puisqu'union de deux espaces Seifert fibrés au-dessus de $\mathbb{S}^1 \times I$. Les variétés graphes ont été introduites, et complètement analysées par Waldhausen.

³ La classification de Thurston est essentiellement un cas particulier de la classification plus ancienne de Bianchi des métriques homogènes apparaissant en relativité générale; voir [3] pour des remarques supplémentaires sur la correspondance entre ces classifications

Réciproquement soit M une variété fermée de dimension 3 quelconque (mais orientable comme on l'a dit précédemment). On peut alors décomposer ou éclater la variété en pièces élémentaires, à savoir des sphères ou des tores. Topologiquement ceci peut se faire grâce au résultat suivant de topologie des variétés de dimension 3.

Décomposition en sphère (ou prime decomposition) (d'après Kneser, Milnor)

Soit M une variété fermée de dimension 3. Alors M peut être décomposée comme somme connexe

$$(1) \quad M = (K_1 \# \dots \# K_p) \# (L_1 \# \dots \# L_q) \# (\#_1^r \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1).$$

Les facteurs K et L sont des variétés fermées de dimension 3 et qui sont irréductibles, c'est-à-dire que toute sphère de dimension 2 qui y est plongée borde une boule de dimension 3. Les facteurs K ont un groupe fondamental infini et sont asphériques, tandis que les facteurs L ont un groupe fondamental fini et leur revêtement universel est une sphère d'homotopie. Puisque $M \# \mathbb{S}^3 = M$ on suppose qu'aucun facteur L n'est une sphère sauf si M est elle-même une sphère. Les facteurs dans cette écriture sont ainsi uniques à une permutation près et sont obtenus à partir de M par chirurgie sur une famille de sphères de dimension 2 essentielles (i.e. topologiquement non triviales) qui sont incluses dans M (en remplaçant les régions du type $\mathbb{S}^2 \times I$ par deux copies de B^3). Voir la figure 1 pour une représentation schématique de cela.

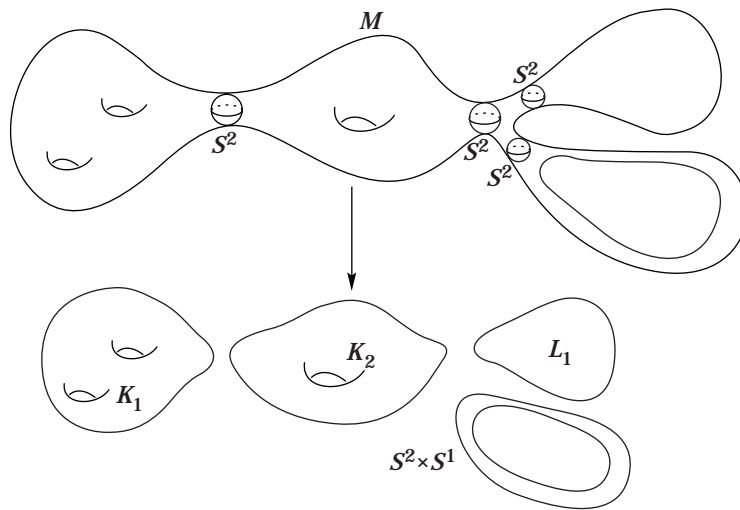


FIG. 1. Décomposition en sphères

Les facteurs K peuvent aussi contenir des tores topologiquement essentiels. Un tore \mathbb{T}^2 plongé dans M est dit incompressible si l'inclusion canonique induit une injection sur Π_1 . Une variété de dimension 3 N est dite toriquement irréductible si tout tore plongé incompressible peut être déformé en un tore dans ∂N . Ainsi si $\partial N = \emptyset$ alors N ne possède aucun tore incompressible.

Décomposition en tore (Jaco-Shalen, Johannsen)

Soit M une variété de dimension 3, fermée, irréductible. Alors il existe une famille finie, éventuellement vide, de tores disjoints incompressibles dans M qui séparent M en une collection finie de variétés de dimension 3 compactes (à bord torique), et qui sont chacun soit toriquement irréductible soit Seifert fibré.

Une décomposition plus complexe, mais essentiellement équivalente, est donnée par des tores séparant M en des composantes toriquement irréductible ou des variétés graphes. Voir la figure 2.

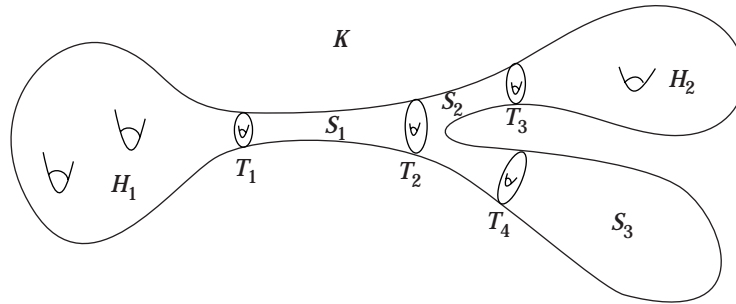


FIG. 2. Décomposition en tores

À l'exception de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ et son quotient $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$, les sphères de dimension 2 essentielles sont des obstructions à l'existence de structure géométriques sur une variété de dimension 3. La même chose est vraie pour les tores essentiels, sauf si M est Seifert fibrée ou une Sol variété de dimension 3.

Donc les décompositions en sphères et tores divisent M topologiquement en composantes où ces obstructions connues sont éliminées.

Conjecture d'hyperbolisation (Thurston). — Soit M une variété de dimension 3, fermée et orientée. Alors chaque composante de la décomposition en sphères et tores admet une structure géométrique.

La conjecture de géométrisation donne une classification complète et effective de toutes les variétés fermées, ressemblant de très près sur plusieurs aspects à la classification des surfaces. Plus précisément, elle réduit la classification à celle des variétés géométriques de dimension 3. La classification des variétés géométriques de dimension 3 est assez simple et complètement comprise, sauf dans le cas des variétés hyperboliques, qui reste un champ de recherche actif.

Pour illustrer la puissance de la conjecture de Thurston, voyons maintenant pourquoi elle implique la conjecture de Poincaré. Soit M une variété de dimension 3, simplement connexe; alors la décomposition (1) implique que M doit être de type L . La conjecture de géométrisation dit alors que L est géométrique, et donc $L = \mathbb{S}^3/\Gamma$. Et donc $M = L = \mathbb{S}^3$.

La formulation de la conjecture de géométrisation et le travail de Thurston sur celle-ci ont véritablement révolutionné la topologie des variétés de dimension 3. Voir à ce propos [18] et [19] et les références contenues dans ces articles. Il a ainsi mis le doigt sur le fait que dans la classe de toutes les variétés de dimension 3

irréductibles, les variétés hyperboliques sont celles qui prévalent le plus, comme dans le cas des surfaces, et il a développé un vaste champ d'idées nouvelles et de méthodes neuves pour comprendre la géométrie des variétés de dimension 3. Thurston et de nombreux autres auteurs ont prouvé la conjecture de géométrisation dans des cas particuliers importants, le plus important d'entre eux étant le cas des variétés Haken : si M est une variété de dimension 3 Haken et irréductible (i.e. M contient une surface incompressible de genre supérieur ou égal à 1), alors la conjecture de géométrisation est vraie pour M .

Un ingrédient important dans l'approche de Thurston est la déformation et la dégénérescence des structures hyperboliques sur les variétés non compactes (ou la déformation des variétés hyperboliques singulières sur les variétés compactes). Les huit structures géométriques sont rigides au sens où il n'y a pas de géométrie qui les « interpole » continûment. Ainsi, sur un assemblage de telles structures, chaque composante doit dégénérer en passant d'une composante à l'autre ; il n'y a pas de structure unique ou de métrique donnant la géométrie totale de la variété M . Par exemple, sur la figure 2 les composantes H peuvent être des variétés hyperboliques séparées par des tores, des variétés Seifert fibrées S . Même si cet éclatement est bien défini, les géométries ne s'accordent pas bien dans la région du recollement, et métriquement il n'y a pas de région naturelle où faire ce recollement.

Indépendamment et à peu près simultanément, Gromov [6], [7] a aussi étudié la déformation et la dégénérescence de métriques riemanniennes plus générales ayant une courbure bornée plutôt que constante. L'idée est que l'on peut contrôler le comportement d'une métrique, ou d'une famille de métriques en se donnant une borne uniforme sur le tenseur riemannien $Riem$ de la métrique⁴. Cela conduit à l'important théorème de compacité de Gromov, le théorème de structure des variétés presque plates et la théorie du « collapsing » qui fut développée en détails par Cheeger et Fukaya.

Une version de ces résultats est particulièrement utile pour notre propos. Soit (M, g) une variété riemannienne fermée, avec volume normalisé et supposons que

$$(2) \quad |Riem| \leq \Lambda,$$

pour un certain Λ fini. La métrique g fournit alors une décomposition naturelle de M en parties fine et épaisse, $M = M^\nu \cup M_\nu$, où

$$(3) \quad \begin{aligned} M^\nu &= \{x \in M, Vol B_x(1) \geq \nu\}, \\ M_\nu &= \{x \in M, Vol B_x(1) \leq \nu\}; \end{aligned}$$

ici $B_x(1)$ est la boule géodésique de centre x et de rayon 1 et $\nu > 0$ est un réel arbitraire mais que l'on fixe petit. Maintenant considérons la classe de toutes les variétés de dimension n de volume 1 et qui vérifient (2), et considérons la décomposition correspondantes (3). Alors la géométrie et la topologie de M sont contrôlées a priori. Pour tout $\nu > 0$ donné, il existe un nombre fini (nombre ne dépendant que de λ et de ν) de type topologique possible pour M^ν . De plus, l'espace des métriques sur M^ν est compact dans un sens très naturel ; toute suite

⁴ Le tenseur de courbure est un tenseur de type $(3, 1)$ compliqué qui s'exprime à l'aide des dérivées secondes de la métrique ; dans un système de coordonnées locales en un point il est donné par $R_{ijk}^l = -\frac{1}{2}(\partial_i \partial_k g_{jl} + \partial_j \partial_l g_{ik} - \partial_j \partial_k g_{il} - \partial_i \partial_l g_{jk})$.

de métriques sur M^ν possède une sous-suite qui converge au sens $C^{1,\alpha}$, $\alpha < 1$ (modulo les difféomorphismes). Pour ν assez petit, la partie fine M_ν admet une F -structure au sens de Cheeger et Gromov ; en dimension 3 cela signifie simplement que M_ν est une variété graphe à bord torique ou vide. En particulier la topologie de M_ν est fortement restreinte. Une métrique sur M_ν s'effondre très fortement au sens où les cercles dans les composantes Seifert fibrées et les tores recollant ces composantes ont un diamètre très petit, dépendant de ν ; voir la figure 3 pour une illustration schématique. De surcroît, pour tout $\nu > 0$ fixé, la distance entre M^ν et la partie fine arbitraire $M_{\nu'}$ devient arbitrairement grande lorsque $\nu'/\nu \rightarrow 0$.

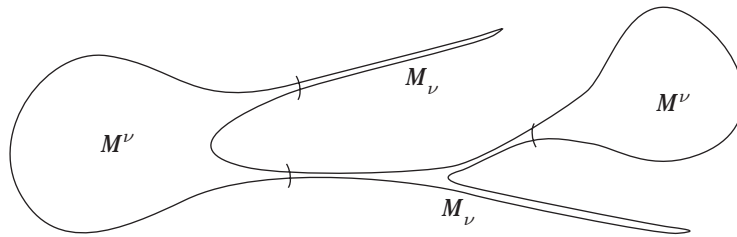


FIG. 3. Décomposition en partie fine et partie épaisse

Nous insistons sur le fait que des résultats similaires sont vrais localement et pour des variétés non compactes ; il en découle que l'hypothèse de volume normalisé faite plus haut n'est pas essentielle.

L'approche de Thurston du problème de géométrisation a fait faire d'énormes progrès sur la partie « hyperbolique » de la conjecture. En comparaison avec cela, très peu de progrès ont été faits sur la partie « à courbure positive » de la conjecture, par exemple la conjecture de Poincaré. Il est important de noter que parmi les huit géométries possibles, \mathbb{H}^3 et \mathbb{S}^3 sont les plus importantes à comprendre (dans le sens de la caractérisation des variétés géométriques). Les autres géométries (mixtes) sont en comparaison plus simples.

Du point de vue de la géométrie riemannienne, la conjecture de Thurston affirme l'existence d'une « meilleure » métrique sur une variété fermée de dimension 3 arbitraire. Dans le cas où M n'est pas elle-même géométrique, on peut autoriser cette métrique optimale à avoir des régions de dégénérescence. La discussion que nous avons eue précédemment ainsi que les figures qui l'illustrent suggèrent que ces dégénérescences doivent se produire via le pincement de sphères de dimension 2 (décomposition en sphère) et l'effondrement de variétés graphes le long de cercles ou de tores (décomposition en tore).

Le flot de Ricci

Une méthode pour trouver une métrique optimale sur une variété consiste à trouver une équation d'évolution naturelle, décrite par un champ de vecteurs dans l'espace des métriques, et essayer de prouver que le flot admet des solutions en tout temps et converge vers une limite (géométrique). Si le flot ne converge pas,

les métriques correspondantes dégènèrent et on doit relier la dégénérescence à la topologie de M .

Il y a essentiellement un seul champ de vecteurs qui soit simple et naturel (ou plus précisément une famille de champs de vecteurs) dans l'espace des métriques. Il est donné par

$$(4) \quad \frac{d}{dt}g(t) = -2Ric_{g(t)} + \lambda(t)g(t).$$

Ici Ric est le tenseur de Ricci, donné en coordonnées locales par $R_{ij} = \sum_k R_{ijk}^k$, de telle façon que Ric est la trace du tenseur riemannien. La constante 2 est seulement placée là pour des raisons de confort et pourrait être changée en faisant un changement homotétique sur le temps; $\lambda(t)$ est une constante dépendant du temps. Le flot de Ricci, introduit par Hamilton [11], est obtenu en prenant $\lambda = 0$, c'est-à-dire

$$(5) \quad \frac{d}{dt}g(t) = -2Ric_{g(t)}.$$

La raison pour laquelle (4) est le seul flot naturel est essentiellement la même que celle qui conduit aux équations du champ d'Einstein en relativité générale. Le tenseur de Ricci est une forme bilinéaire symétrique, tout comme la métrique. À part les multiples de la métrique, c'est la seule forme bilinéaire symétrique qui dépende au plus des dérivées secondes de la métrique et invariante par changement de coordonnées. En faisant un changement homotétique sur la métrique et sur le temps, on peut transformer (5) en (4). Par exemple, en faisant un changement homothétique sur la métrique de telle façon que le volume de $(M, g(t))$ soit constant on récupère (4) avec $\lambda(t) = \frac{2}{Vol(M, g(t))} \int_M R_{g(t)}$ où R est la courbure scalaire.

Dans un système de coordonnées adéquat, l'équation (5) a une forme très naturelle. En effet, au temps t , choisissons des coordonnées harmoniques locales de telle façon que les fonctions coordonnées soient localement des fonctions harmoniques pour $g(t)$. (5) prend alors la forme

$$(6) \quad \frac{d}{dt}g_{ij} = \Delta g_{ij} + Q_{ij}(g, \partial g),$$

où Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur les fonctions pour la métrique $g = g(t)$, et Q est un terme quadratique en g et les dérivées d'ordre inférieur de g . C'est une équation de la chaleur non linéaire pour g_{ij} . À partir de l'analyse de cette équation aux dérivées partielles, on obtient l'existence et l'unicité (pour une donnée initiale arbitraire) d'une solution de cette équation sur un intervalle de temps. C'est la raison de la présence du signe $-$ dans (5); un signe $+$ donne une équation de la chaleur « rétroactive » (c'est-à-dire dans les temps antérieurs), qui n'a pas de solution en général.

Donnons quelques exemples de solutions explicites pour le flot de Ricci. Si la métrique initiale est à courbure de Ricci constante, $Ric = a.g$, alors $g(t) = (1 - 2at)g(0)$. Notons que si $a > 0$ le flot contracte la métrique, tandis que si $a < 0$ le flot dilate la métrique, et cela uniformément dans toutes les directions. Ainsi si on fait un changement homothétique pour avoir un volume constant la solution est constante. Les points stationnaires du flot de Ricci avec volume

normalisé sont exactement les métriques d'Einstein, c'est-à-dire les métriques à courbure de Ricci constante. En dimension 3 les métriques d'Einstein sont à courbure constante et donnent donc les modèles \mathbb{H}^3 , \mathbb{S}^3 et \mathbb{R}^3 .

Plus généralement, si $Ric(x, t) > 0$ alors le flot contracte la métrique $g(t)$ au voisinage de x , dans le futur, tandis que si $Ric(x, t) < 0$, alors le flot dilate $g(t)$ au voisinage de x . D'une façon générale, il y aura des directions à courbure de Ricci positives et des directions à courbure de Ricci négatives le long desquelles la métrique se contracte ou se dilate localement.

Supposons que $g(0)$ est une métrique produit sur $\mathbb{S}^1 \times \Sigma$, où Σ est une surface à courbure constante. Alors $g(t)$ reste une métrique produit, la longueur restant constante sur le facteur \mathbb{S}^1 et se contractant ou se dilatant sur la surface selon le signe de la courbure de Σ .

Finalement, le flot de Ricci commute avec l'action du groupe des difféomorphismes et ainsi préserve les isométries de la métrique initiale. Ainsi, les variétés géométriques de dimension 3 restent géométriques. Pour les géométries mixtes « négatives » ($\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\tilde{S}L(2, \mathbb{R})$, *Nil* et *Sol*), le flot de Ricci normalisé contracte les fibres \mathbb{S}^1 ou \mathbb{T}^2 et dilate le facteur constitué par la surface de base; pour les géométries mixtes « positives » $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, le flot de Ricci normalisé contracte le facteur \mathbb{S}^2 et dilate le facteur \mathbb{R} .

Maintenant considérons le flot de Ricci (5) en général. D'après la forme de l'équation il est clair que le flot $g(t)$ existera si et seulement si la courbure de Ricci reste bornée. Cela suggère le fait que l'on peut considérer le flot induit sur la courbure par le flot sur la métrique. Le plus simple étant le flot induit par le flot sur la métrique sur la courbure scalaire :

$$(7) \quad \frac{d}{dt}R = \Delta R + 2|Ric|^2.$$

En évaluant cette relation en un point qui réalise le minimum R_{min} de R sur M on obtient le fait important que R_{min} est monotone croissante le long du flot. En particulier le flot de Ricci préserve la positivité de la courbure scalaire (en toute dimension). De plus si $R_{min}(0) > 0$, par le même argument on a $\frac{d}{dt}R_{min} \geq \frac{2}{n}R_{min}^2$ (notons qu'on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|Ric|^2 \geq \frac{1}{n}R^2$). Une simple intégration par parties donne donc

$$(8) \quad t \leq \frac{n}{2R_{min}(0)}.$$

Ainsi le flot de Ricci existe pour un temps fini T et $T \leq \frac{n}{2R_{min}(0)}$. Par opposition, dans les régions où la courbure de Ricci est définie négative le flot existe en tout temps.

L'évolution de la courbure de Ricci a la même forme que l'équation (7) :

$$(9) \quad \frac{d}{dt}R_{ij} = \Delta R_{ij} + \tilde{Q}_{ij}.$$

L'expression de \tilde{Q} est beaucoup plus compliquée que le second terme du membre de droite de (7) mais ne fait intervenir que des termes quadratiques en la courbure. Malgré tout \tilde{Q} fait intervenir le tenseur riemannien et pas seulement la courbure de Ricci (tout comme (7) fait intervenir la courbure de Ricci et pas seulement la

courbure scalaire). Un fait important en dimension 3 est que le tenseur riemannien est entièrement déterminé par le tenseur de Ricci. Cela implique qu'en général le flot de Ricci a de meilleures chances de « marcher » en dimension 3. Par exemple, l'analyse du terme \tilde{Q} montre que le flot de Ricci conserve la positivité du tenseur de Ricci en dimension 3 : si $Ric_{g(0)} > 0$ alors $Ric_{g(t)} > 0$ pour tout $t > 0$. Ceci n'est pas le cas en dimension plus grande. D'un autre côté, en dimension supérieure ou égale à 3, le flot de Ricci ne préserve pas la négativité du tenseur de Ricci pas plus qu'il ne préserve une borne inférieure $Ric \geq -\lambda$ pour $\lambda > 0$. Dans tout le reste de cet article nous supposons que la dimension de la variété est 3.

Dans le théorème de compacité de Gromov et la décomposition fine/épaisse (3), l'hypothèse $|Riem|$ bornée peut aussi être remplacée par une borne sur $|Ric|$ (car nous sommes ici en dimension 3). Il en découle que sur les intervalles de temps où $|Ric|$ reste bornée les métriques $g(t)$ sont toutes quasi-isométriques : à savoir qu'il existe c et C dépendant du temps t tels que $cg(0) \leq g(t) \leq Cg(0)$. De ce fait, la région fine M_ν pour $\nu \ll 1$ ne peut apparaître, sous l'hypothèse $|Ric|$ bornée, que pour des temps très grands.

De tout cela il vient que le flot de Ricci est très naturel et a de nombreuses propriétés intéressantes. On peut en effet voir des liens avec la vision de Thurston des variétés de dimension 3. Pourtant, la première indication que le flot de Ricci est un outil important pour traiter des problèmes géométriques est le résultat suivant de Hamilton :

Space form theorem. — *Si $g(0)$ est une métrique à courbure de Ricci strictement positive sur une variété de dimension 3, alors le flot normalisé a une solution en tout temps et converge vers la métrique standard de \mathbb{S}^3/Γ , où Γ est un sous-groupe fini de $SO(4)$ agissant librement sur \mathbb{S}^3 .*

Ainsi le flot de Ricci « géométrise » les variétés de dimension 3 à courbure de Ricci strictement positive. Depuis ce résultat important, la question de savoir si ce résultat peut être étendu aux variétés à courbure scalaire strictement positive reste complètement ouverte.

Même si l'évolution de la courbure le long du flot est très compliquée pour des métriques initiales quelconques, une analyse détaillée de (9) donne le résultat suivant :

Estimation sur le pincement de la courbure : [10], [12]. — *Soit $g(t)$ une solution du flot de Ricci sur une variété fermée M de dimension 3. Alors il existe une fonction $\varphi :]-\infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, qui tend vers 0 en l'infini, et une constante C ne dépendant que de la métrique initiale $g(0)$ telles que*

$$(10) \quad Riem(x, t) \geq -C - \varphi(R(x, t)) \cdot |R(x, t)|.$$

Cet énoncé signifie que toutes les courbures sectionnelles R_{ijji} de $g(t)$, où e_i est une base orthonormée en (x, t) , sont minorées par le membre de droite de (10).

Cette estimation n'implique pas une borne inférieure sur $Riem(x, t)$ uniforme en temps. Pourtant lorsqu'on la combine avec le fait que la courbure scalaire est minorée uniformément en temps, elle implique que lorsque $R(x, t) \gg 1$ alors $|Riem(x, t)| \gg 1$. Par conséquent pour contrôler la taille de $|Riem|$, il est suffisant de contrôler la courbure scalaire par le haut. Ceci est tout à fait remarquable puisque

la courbure scalaire est un invariant de la métrique beaucoup moins rigide que le tenseur riemannien. De surcroît, aux points où la courbure est assez grande, (10) montre que $\frac{Riem(x,t)}{R(x,t)} \geq -\delta$ avec δ petit. Il est donc clair que si on normalise la métrique de façon que $R(x,t) = 1$ alors $Riem(x,t) \geq -\delta$. Pour une telle normalisation la métrique a une courbure presque positive au voisinage de (x,t) .

Inégalité de Harnack : [9]. — *Soit $(N, g(t))$ une solution du flot de Ricci telle que $Riem \geq 0$ et $|Riem|$ bornée, et supposons que $g(t)$ est une métrique complète sur N . Alors pour tout $0 < t_1 \leq t_2$,*

$$(11) \quad R(x_2, t_2) \geq \frac{t_1}{t_2} \exp\left(-\frac{d_{t_1}(x_1, x_2)}{2(t_2 - t_1)}\right) R(x_1, t_1),$$

où d_{t_1} est la distance sur (M, g_{t_1}) .

Cette estimation nous permet de relier ou de contrôler la géométrie des solutions en différents points de l'espace-temps.

L'obtention d'une estimée analogue à celle de (11) en général (*i.e.* sans l'hypothèse $Riem \geq 0$) a été l'un des obstacles majeurs pour des progrès plus importants sur le flot de Ricci.

L'analyse faite plus haut montre que le flot de Ricci semble favoriser la courbure strictement positive. Le flot tend à évoluer de manière à rendre la courbure plus positive, et les résultats les plus forts ont été prouvés dans le cas de la courbure strictement positive, et cela contraste d'une certaine façon avec l'approche de Thurston.

La formation des singularités

L'analyse la plus profonde du flot de Ricci concerne les singularités pouvant apparaître le long du flot en temps fini. Comme (8) le montre déjà, le flot de Ricci n'existera pas en général en tout temps. Dans le cas d'une métrique initiale à courbure de Ricci strictement positive, ce problème est écarté grâce à une renormalisation du volume. Le Space Form Theorem d'Hamilton montre que le flot normalisé existe en tout temps et converge C^∞ vers la métrique ronde. Pourtant la situation est nécessairement plus compliquée en dehors de la classe des variétés à courbure de Ricci strictement positive. Considérons par exemple des métriques initiales à courbure scalaire strictement positive. Toute variété qui est une somme connexe de facteurs pouvant être \mathbb{S}^3/Γ ou $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ possède une métrique à courbure scalaire strictement positive (comparer cela avec la décomposition en sphère (1)). Ainsi pour des raisons topologiques évidentes, le flot de Ricci normalisé ne peut pas converger vers une métrique ronde ; même le flot normalisé peut développer des singularités.

Des singularités apparaissent fréquemment dans de nombreux types d'EDP non linéaires et celles-ci ont été intensivement étudiées depuis plusieurs décennies. Tout spécialement dans un contexte géométrique, le problème classique pour comprendre la structure des singularités est de renormaliser ou de faire un changement d'échelle sur une suite qui converge vers la singularité de manière à rendre la solution bornée et essayer de passer à la limite sur la solution renormalisée. Une telle solution limite sert de modèle pour cette singularité, et l'on peut espérer (ou attendre) que

la singularité possèdera certaines caractéristiques qui la rendra plus simple qu'une solution arbitraire de l'équation.

Un singularité ne peut se former le long du flot de Ricci que là où la courbure devient non bornée. Supposons $\lambda_i^2 = |\text{Riem}|(x_i, t_i) \rightarrow \infty$ pour une suite de points $x_i \in M$ et une suite de temps $t_i \rightarrow T < \infty$. Il est alors naturel de considérer les métriques renormalisées et le temps renormalisé

$$(12) \quad \tilde{g}_i(\tilde{t}_i) = \lambda_i^2 g(t), \quad \tilde{t}_i = \lambda_i^2(t - t_i).$$

Les métriques \tilde{g}_i sont aussi solutions du flot de Ricci et sont à courbure bornée en $(x_i, 0)$. Pour un choix adéquat de x_i et t_i , la courbure sera bornée au voisinage de x_i , et pour des temps voisins négatifs $\tilde{t}_i \leq 0$; par exemple, on pourrait prendre les points où la courbure est maximale sur $(M, g(t))$, $0 \leq t \leq t_i$.

La renormalisation (12) dilate les distances d'un facteur λ_i et le temps d'un facteur λ_i^2 . Donc on en vient à étudier de très petites régions, de tailles spatiales d'ordre $r_i = \lambda_i^{-1}$, et en utilisant un « microscope » pour examiner les phénomènes à petite échelle dans cette région sur une échelle de taille environ 1. Bien sûr, un changement de coordonnées est implicitement fait dans cette analyse, i.e. l'utilisation de difféomorphismes locaux en accompagnement de la renormalisation de la métrique.

Une version locale du théorème de compacité de Gromov autorise donc à passer à la limite sur les solutions du flot de Ricci, au moins localement en temps et espace, à condition que les volumes locaux de la renormalisation soient minorés par une quantité strictement positive; plus précisément on a besoin que $x_i \in M^\nu(\tilde{g}_i(\tilde{t}_i))$, pour un certain $\nu > 0$; voir (3). En terme de flot original (non normalisé), cela signifie que la métrique $g(t)$ ne doit pas s'effondrer localement, à l'échelle de sa courbure, i.e.

$$\text{Vol}B_{x_i}(r_i, t_i) \geq \nu r_i^3.$$

Une limite maximal connexe $(N, \bar{g}(\bar{t}), x)$ contenant le point base $x = \lim x_i$ est alors appelée un modèle singulier. Observons que la topologie de la limite N peut très bien être différente de celle de la variété originale M , beaucoup de celle-ci pouvant avoir été envoyée à l'infini par la renormalisation.

Pour décrire l'utilité potentielle de ce procédé, supposons que nous avons un non effondrement local sur les métriques normalisées et que nous avons choisi des points en temps et en espace de courbure maximale. On a alors, au moins pour une sous-suite, une solution limite du flot de Ricci $(N, \bar{g}(\bar{t}), x)$, avec point base x , définie au moins sur $]-\infty, 0]$; de plus $\bar{g}(\bar{t})$ est une métrique riemannienne complète sur N . Elles sont appelées « ancient solutions » du flot de Ricci dans la terminologie d'Hamilton. Les estimations dans (10) et (11) peuvent maintenant être utilisées pour montrer que les modèles singuliers ont en fait d'importantes caractéristiques qui les rendent plus simples que les solutions générales du flot de Ricci. Comme nous le disions à la suite de (10), l'estimation de pincement implique que la limite est à courbure positive ou nulle. De plus, la topologie des variétés complètes N à courbure positive ou nulle est complètement comprise en dimension 3. Si N est non compacte alors N est difféomorphe à \mathbb{R}^3 , $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ ou un quotient de ces variétés. Si N est compacte, alors une forme légèrement plus forte du théorème d'Hamilton

ci-dessus implique que N est difféomorphe à \mathbb{S}^3/Γ , $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ ou $\mathbb{S}^2 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{S}^1$. De plus l'inégalité de Harnack (11) est vraie à la limite.

Ces propriétés générales des modèles singuliers sont certainement encourageants. Néanmoins il reste de nombreux problèmes à résoudre pour tirer un vrai bénéfice de ceci.

- I On doit prouver le non-effondrement à l'échelle de la courbure pour obtenir un modèle singulier.
- II En général, la courbure peut exploser à différentes échelles ou vitesses, et il n'est pas entièrement suffisant de comprendre seulement les modèles singuliers aux points de courbure maximale. Ce type de phénomène (appelé généralement « bubbling ») se produit dans beaucoup d'autres problèmes variationnels issus de la géométrie, par exemple les applications harmoniques, les champs de Yang-Mills, les métriques d'Einstein, et d'autres. Dans de tels problèmes elliptiques ces problèmes d'échelles multiples ont effectivement été résolus.
- III Même en sachant résoudre les deux premiers problèmes listés ci-dessus, on doit tout de même relier la structure des singularités avec la topologie de la variété sous-jacente.

L'étude de la formation des singularités le long du flot de Ricci a été initiée par Hamilton [10]; voir aussi [4] pour un survey récent. Même s'il y a eu de nombreux progrès techniques en la matière pendant la dernière décennie, les problèmes essentiels sur l'existence et la structure des modèles singuliers et de leurs relations avec la topologie restaient ouverts jusqu'à l'apparition des travaux de Perelman en 2002 et 2003.

Le travail de Perelman

Le travail récent de Perelman [15]-[17] (ainsi qu'un article moins crucial et qui reste à paraître) implique une solution complète de la conjecture de géométrisation. Ceci se fait grâce à l'introduction de nombreuses idées hautement originales en géométrie et de nombreuses techniques nouvelles pour comprendre le flot de Ricci. En particulier, le travail de Perelman résout complètement les questions I-III ci-dessus. Commentons maintenant, nécessairement brièvement, certaines des avancées dues à Perelman.

I Non effondrement

Considérons la fonctionnelle d'Einstein-Hilbert

$$(13) \quad \mathcal{R}(g) = \int_M R(g) dv(g)$$

définie sur l'espace des métriques riemanniennes \mathbb{M} sur une variété M . Les points critiques de \mathcal{R} sont les métriques Ricci-plates ($Ric = 0$). Cette fonctionnelle peut être modifiée, par exemple en ajoutant une constante cosmologique -2Λ , pour donner une fonctionnelle dont les points critiques seraient des métriques d'Einstein à courbure de Ricci constante⁵. Il est naturel d'essayer de relier le flot de Ricci

⁵ L'action (13) mène à l'équation de champ d'Einstein dans le vide en relativité générale pour les métriques de Lorentz sur une variété de dimension 4. Le terme $\lambda(t)$ dans (4) est l'analogue de la constante cosmologique.

à \mathcal{R} ; par exemple la flot de Ricci est-il le flot du gradient de \mathcal{R} (par rapport à la métrique naturelle L^2 sur \mathbb{M})? Même s'il semblait que ce devait être presque vrai, il fut reconnu que tel n'est pas le cas. En fait le flot du gradient de \mathcal{R} n'existe même pas puisqu'il implique une équation rétroactive de la chaleur pour la courbure scalaire R (similaire à (7) mais avec un signe moins devant le laplacien).

Considérons maintenant la fonctionnelle suivante

$$(14) \quad \mathcal{F}(g, f) = \int_M (R + |\nabla f|^2) e^{-f} dv(g).$$

C'est une fonctionnelle sur l'espace plus grand $\mathbb{M} \times C^\infty(M, \mathbb{R})$, ou de façon équivalente une famille de fonctionnelles sur \mathbb{M} paramétrée par $C^\infty(M, \mathbb{R})^6$. Prenons une mesure lisse dm sur M et considérons le couplage de Perelman demandant que (g, f) satisfasse

$$(15) \quad e^{-f} dg(g) = dm.$$

La fonctionnelle ainsi obtenue

$$(16) \quad \mathcal{F}^m(g, f) = \int_M (R + |\nabla f|^2) dm$$

devient une fonctionnelle sur \mathbb{M} . Au premier abord il pourrait sembler que ceci est beaucoup plus compliqué que (13); pourtant pour tout $g \in \mathbb{M}$, il existe une large classe de fonctions f (ou de mesures dm) telles que le flot du gradient L^2 de \mathcal{F}^m existe en g , et il est donné par

$$(17) \quad \frac{d\tilde{g}}{dt} = -2(\text{Ric}_{\tilde{g}} + D^2f),$$

où D^2f est la hessienne de f pour la métrique \tilde{g} . L'équation d'évolution (17) pour \tilde{g} est simplement le flot de Ricci (5) modifié par une difféomorphisme infinitésimal : $D^2f = \frac{d}{dt}(\varphi_t^* \tilde{g})$, où $\frac{d}{dt}\varphi_t = \nabla f$. Il s'ensuit que le flot du gradient de \mathcal{F}^m est le flot de Ricci aux difféomorphismes près. Différents choix de dm correspondent à des choix différents de difféomorphismes. En particulier la fonctionnelle \mathcal{F}^m croît le long du flot de Ricci.

Que peut-on faire avec cette fonctionnelle plus compliquée? Il s'avère qu'étant donnée une métrique initiale $g(0)$ et $t > 0$, la fonction f (et ainsi la mesure dm) peut être librement déterminée en $g(t)$ ($g(t)$ étant l'évolution de $g(0)$ le long du flot de Ricci (5)). Perelman utilise alors cette « liberté » pour vérifier la géométrie de $g(t)$ avec des choix adéquats de f .

Par exemple, on peut montrer par une analyse très simple de \mathcal{F}^m que l'effondrement ou le non effondrement de la métrique $g(t)$ au voisinage d'un point $x \in M$ peut être détecté à partir de la taille de $\mathcal{F}^m(g(t))$ en choisissant e^{-f} de telle façon qu'elle soit une approximation d'une masse de Dirac en x . Plus l'effondrement de $g(t)$ en x est grand plus la valeur de $\mathcal{F}^m(g(t))$, sera négative. L'effondrement est donc écarté à toutes les échelles en temps fini en associant ceci avec le fait que la fonctionnelle \mathcal{F}^m croît avec le temps le long du flot de Ricci. En fait, cet argument

⁶ La fonctionnelle (14) apparaît en théorie des cordes comme énergie de moindre action [5]; la fonction ou le champ scalaire f est appelée la dilatation. Il est intéressant de noter dans ce contexte que le champ gravitationnel et le champ de dilatation proviennent simultanément de la quantification du « string world sheet » (σ -model) [5]

est mis en œuvre en utilisant une fonctionnelle plus compliquée que \mathcal{F}^m , et invariante par changement d'échelle; motivé par certaines analogies avec la physique statistique Perelman l'appelle la fonctionnelle entropie.

Modèles singuliers. — Une seconde avancée de [15] est essentiellement une classification de tous les modèles singuliers complets $(N, g(t))$ pouvant apparaître en temps fini. Ici complet signifie que la métrique $g(0)$ est une métrique complète sur N . Si N est compacte et lisse, il s'ensuit grâce au space-form theorem d'Hamilton que N est difféomorphe à \mathbb{S}^3/Γ , $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ ou $\mathbb{S}^2 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{S}^2$. Dans le cas plus difficile où N est complète non compacte, Perelman prouve que la géométrie de N à l'infini est la plus simple et la plus naturelle possible. Au temps $t = 0$ et en un point x avec $r(x) = \text{dist}(x, x_0) \gg 1$, pour un point base fixé x_0 , un voisinage « de grande taille » de x à une échelle où $R(x) = 1$ est ε -proche d'un voisinage « de grande taille » sur $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ muni de sa métrique standard. Ici ε peut être rendu arbitrairement petit en choisissant $r(x)$ grand. Une telle région est appelée ε -neck. Ainsi la géométrie à l'infini de N est celle d'une réunion de ε -necks, où le rayon de \mathbb{S}^2 variant lentement peut être soit uniformément borné soit diverger vers l'infini, mais seulement à une vitesse inférieure à celle de $r(x)$. De surcroît, cette structure est aussi valable sur un intervalle long pour des temps négatifs, de telle façon que sur ces régions la solution est proche de celle du flot de Ricci rétroactive sur $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Topologiquement N est difféomorphe à \mathbb{R}^3 ou (N, g) est isométrique à $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Perelman montre que ce résultat de structure pour les modèles singuliers est aussi vrai pour la solution $g(t)$ au voisinage d'un temps singulier T . Ainsi, pour un point de base (x, t) où la courbure est assez grande, le changement d'échelle fait en (12) sur l'espace-temps par la courbure est suffisamment proche, sur des domaines compacts de grande taille, de domaines de grande taille sur un modèle singulier complet. Le modèle singulier complet « idéal » décrit en réalité la géométrie et la topologie près d'une singularité. Par conséquent, on a une compréhension détaillée de la géométrie à petite échelle et de la topologie partout sur $(M, g(t))$ pour t proche de T . En particulier cela montre une version générale de l'inégalité de Harnack (11).

Ces résultats sont bien sûr assez techniques et les preuves ne sont pas simples. Pourtant elles ne sont pas exceptionnellement difficiles et elles reposent sur des idées novatrices et des outils nouveaux pour comprendre le flot de Ricci. Une idée clé est l'utilisation du résultat de non effondrement ci-dessus à toutes les échelles.

III Lien avec la topologie

Le point important maintenant est l'apparition de sphères de dimension 2 au voisinage des singularités. Rappelons, d'après (1), que l'on doit d'abord faire une décomposition en sphère de M avant de pouvoir la géométrer. Il n'y a pas de géométrie correspondant à la décomposition en sphère⁷. Alors que la décomposition en sphère est l'opération la plus simple topologiquement, géométriquement et analytiquement elle est de loin la plus difficile à comprendre. Comment peut-on repérer des sphères de dimension 2 dans M sur lesquelles faire de la chirurgie à partir de la géométrie donnée par une métrique? Nous allons voir maintenant que de telles

⁷ On pourrait penser que la géométrie de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ correspond à la décomposition en sphère mais ceci n'est pas tout à fait exact; au mieux ceci pourrait avoir un sens dans un contexte limité.

sphères, plongées dans les ε -necks dont on a parlé ci-dessus, apparaissent naturellement au voisinage des singularités du flot de Ricci.

L'idée est alors de faire de la chirurgie sur M le long de sphères de dimension 2 juste avant le temps T d'apparition de la première singularité. La figure 4 donne une description schématique d'une métrique partiellement singulière $g(T)$ sur M . La métrique $g(T)$ est lisse sur un domaine maximal Ω , où la courbure est localement bornée mais singulière, *i.e.* pas complètement définie, sur le complémentaire de l'ensemble où la courbure explose lorsque $t \rightarrow T$.

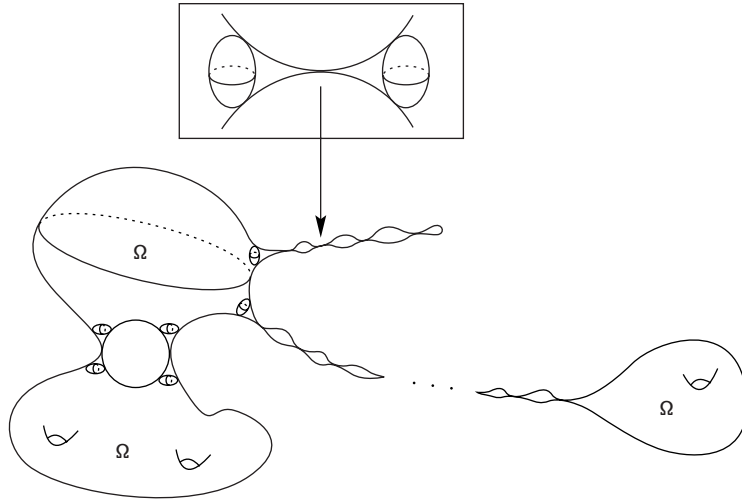


FIG. 4. Cornes sur la limite singulière

Supposons d'abord que Ω est vide, de telle manière que la courbure de $g(t)$ explose partout sur M quand $t \rightarrow T$. On dit que la solution du flot de Ricci s'éteint au temps T . Notons que $R(x, t) \gg 1$ pour tous $x \in M$ et t au voisinage de T (d'après l'estimation de pincement (10)). Etant entendu que nous avons une compréhension complète des modèles singuliers, il n'est pas difficile de voir que M est alors difféomorphe à \mathbb{S}^3/Γ , $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ ou $\mathbb{S}^2 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{S}^1$. Dans cette situation on a fini et M est géométrique.

Si Ω n'est pas vide le point important est que les petits voisinages de $\partial\Omega$ sont composés de cornes. Une corne est une métrique sur $\mathbb{S}^2 \times [0, \delta]$ où le facteur \mathbb{S}^2 est presque rond de rayon $\rho(r)$ avec $\rho(r)$ petit et $\frac{\rho(r)}{r} \rightarrow 0$ lorsque r tend vers 0. Alors une corne est une union de ε -necks assemblés à des échelles de plus en plus petites. La figure 4 représente une métrique partiellement singulière sur une variété lisse $\mathbb{S}^2 \times I$, constituée de paires de cornes jointes par une métrique dégénérée. Au temps T il peut y avoir une infinité de composantes de Γ , de taille arbitrairement petite, contenant de telles cornes. Pourtant seul un nombre fini de telles composantes sont des cornes doubles, qui sont toutes topologiquement de la forme $\mathbb{S}^2 \times I$. En termes quantitatifs, il existe une constante petite $\rho_0 > 0$ telle que si Ω ne contient pas de cornes contenant une sphère $\mathbb{S}^2 \times \{\delta\}$ de rayon supérieur ou égal à ρ_0 , alors, comme ci-dessus dans le cas Ω vide, M est difféomorphe à \mathbb{S}^3/Γ , $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ ou $\mathbb{S}^2 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{S}^1$ et on

a fini. S'il existe des cornes contenant une sphère $\mathbb{S}^2 \times \delta$ d'une taille fixée ρ_0 dans Ω , alors on peut faire de la chirurgie sur chacune de ces cornes en la tronquant le long de \mathbb{S}^2 de rayon ρ_0 et en recollant une boule de dimension 3, donnant ainsi une famille disjointe de variétés de dimension 3.

Maintenant que l'on a déconnecté M par chirurgie sur des sphères de dimension 2 en un nombre fini de composantes, on continue ainsi avec le flot de Ricci sur chaque composante. Un argument conceptuellement simple mais techniquement difficile basé sur la décroissance du volume associé à chaque chirurgie, montre que le nombre de ces chirurgies est localement fini : sur tout segment de temps il n'y a qu'un nombre fini de temps où des singularités peuvent se former.

Comme exemple concret supposons que la métrique de départ soit à courbure scalaire strictement positive. Alors l'estimée (8) montre que le flot de Ricci est complètement terminé, i.e. il s'éteint en temps fini. Ainsi on ne fait qu'un nombre fini de chirurgies sur M le long du flot de Ricci et il s'ensuit que M est difféomorphe à une somme connexe d'un nombre fini de facteurs de la forme \mathbb{S}^3/Γ ou $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Le point important de cette procédure est que si successivement on ignore ces composantes qui s'éteignent en temps fini (et qui ont déjà été identifiées topologiquement), le flot de Ricci avec chirurgie existera sur $[0, \infty[$. À quoi ressemble alors la géométrie des composantes $\{\hat{M}_i\}$ pour un temps très grand T_0 ? Ici la décomposition fine et épaisse de Gromov-Thurston apparaît. Fixons $\hat{M} \in \{\hat{M}_i\}$ et regardons la métrique normalisée $\hat{g}(t) = t^{-1}g(t)$, pour $t = T_0$. Il est facile de voir en utilisant l'équation du flot de Ricci que le volume de $(\hat{M}, g(t))$ est uniformément borné. Pour ν assez petit Perelman montre qu'il y a un contrôle suffisant sur la partie ν -épaisse \hat{M}^ν pour montrer que \hat{M}^ν est difféomorphe à une variété hyperbolique complète H de dimension 3 (ayant un nombre fini de composantes connexes). Le flot de Ricci existe sur \hat{M}^ν en tout temps, et les métriques normalisées $t^{-1}g(t)$ convergent vers la métrique hyperbolique de courbure $-\frac{1}{4}$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Alors qu'il y a moins de contrôle sur la partie ν -fine, il y en a assez pour conclure que \hat{M}_ν est difféomorphe à une variété graphe G (ayant un nombre fini de composantes). Même s'il y peut y avoir une infinité de chirurgies cette fois pour pouvoir continuer le flot, elles ont toutes lieu dans G . Ainsi la variété originale M a été décomposée topologiquement (pour des temps très grands)

$$M = (K_1 \# \dots \# K_p) \# (\#_1^q \mathbb{S}^3/\Gamma_i) \# (\#_1^r \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1).$$

Perelman a montré récemment [17] que les facteurs \mathbb{S}^3/Γ et $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ s'éteignent nécessairement en temps fini (avec une borne sur ce temps d'extinction qui dépend de la métrique initiale), et donc seuls les facteurs K subsistent après un temps assez long (ce résultat n'est de toute façon pas nécessaire pour la conjecture de géométrisation).

De plus chaque $K = K_i$ se décompose en partie fine et épaisse comme union

$$K = H \cup G,$$

où H est une variété hyperbolique complète de volume fini (qui peut être non connexe) et G est une variété graphe (qui peut être non connexe). L'union de H et G se fait le long d'une collection de tores plongés. Perelman utilise les preuves de [11] ou [1] et [2] pour conclure que chacun de ces tores est incompressible dans K .

Ce procédé donne donc à la fois la décomposition en sphère et en tore de la variété M . Même s'il n'est pas avéré que le flot de Ricci détecte les décompositions de G en composantes Seifert fibrées, ceci devrait être comparativement plutôt élémentaire d'un point de vue topologique. Les composantes toriquement irréductibles de K sont en fait des variétés hyperboliques.

Ceci termine notre survol de la conjecture de géométrisation. Le travail de Perelman a provoqué beaucoup d'émulation au sein de la communauté mathématique, ainsi que parmi les gens qui s'intéressent à la science en général. Alors même que des vérifications détaillées du travail de Perelman sont en cours, la beauté et la profondeur de ses contributions sont évidentes.

Je suis très reconnaissant à Bruce Kleiner, John Lott et Jack Milnor pour leurs nombreuses suggestions et commentaires, qui ont contribué à améliorer de manière significative le contenu de cet article.

Références

- [1] M. Anderson, Scalar curvature and geometrization conjectures for 3-manifolds, in Comparison Geometry, (Berkeley 1993-94), MSRI Publications, **30**, (1997), 49-82.
- [2] M. Anderson, Scalar curvature and the existence of geometric structures on 3-manifolds, I, Jour. Reine Angew. Math. **553**, (2002), 125-182.
- [3] L. Andersson, The global existence problem in general relativity, (preprint, 1999), gr-qc/9911032, to appear in "50 Years of the Cauchy Problem in General Relativity", eds. P.T. Chruściel and H. Friedrich.
- [4] H.-D. Cao and B. Chow, Recent developments on the Ricci flow, Bull. Amer. Math. Soc, **36**, (1999), 59-74.
- [5] E. D'Hoker, String theory, in Quantum Fields and Strings : A Course for Mathematicians, 2, Amer. Math. Soc. (1999).
- [6] M. Gromov, Structures Métriques pour les Variétés Riemanniennes, Cedric/Fernand Nathan, Paris, (1981).
- [7] M. Gromov, Volume and bounded cohomology, Publ. Math. I.H.E.S. **50**, (1982), 5-100.
- [8] R. Hamilton, Three manifolds of positive Ricci curvature, Jour. Diff. Geom. **17**, (1982), 255-306.
- [9] R. Hamilton, The Harnack estimate for the Ricci flow, Jour. Diff. Geom. **37**, (1993), 225-243.
- [10] R. Hamilton, Formation of singularities in the Ricci flow, in Surveys in Differential Geometry, Vol. 2, International Press, (1995), 7-136.
- [11] R. Hamilton, Non-singular solutions of the Ricci flow on three-manifolds, Comm. Anal. Geom. **7**, (1999), 695-729.
- [12] T. Ivey, Ricci solitons on compact three-manifolds, Diff. Geom. and Appl. **3**, (1993), 301-307.
- [13] B. Kleiner and J. Lott, Ricci flow website : <http://www.math.lsa.umich.edu/research/ricciflow/perelman.html>
- [14] J. Milnor, Towards the Poincaré Conjecture and the classification of 3-manifolds, (preprint, 2003), to appear in Notices Amer. Math. Soc.
- [15] G. Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, (preprint, 2002), math.DG/0211159.
- [16] G. Perelman, Ricci flow with surgery on three-manifolds, (preprint, 2003), math.DG/0303109.
- [17] G. Perelman, Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, (preprint, 2003), math.DG/0307245.
- [18] W. Thurston, The Geometry and Topology of Three-Manifolds, (preprint, 1978), Princeton University; available online at <http://www.msri.org/publications/books/gt3m>, and Three-Dimensional Geometry and Topology, Vol. 1, Princeton University Press, (1997).
- [19] W. Thurston, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bull. Amer. Math. Soc. **6**, (1982), 357-381.