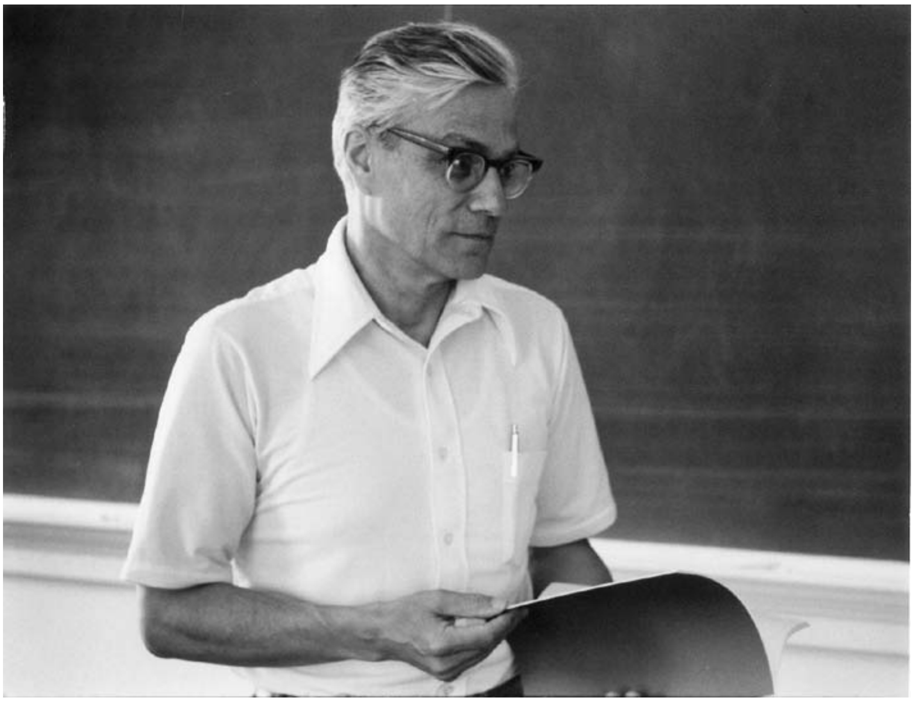

A. Borel, IAS 1980

MATHÉMATIQUES

Hommage à Armand Borel

Armand Borel (1923-2003)

André Haefliger

Armand Borel est décédé le 11 août 2003 à Princeton à l'âge de 80 ans après une courte maladie, alors qu'il était encore en pleine activité. Son œuvre mathématique est considérable et présente une remarquable cohérence. Ses travaux, hormis une douzaine de livres ou de notes de cours et ses articles publiés après 1999, ont été publiés par Springer Verlag dans quatre gros volumes réunissant plus de 150 articles (cités ci-après sous [Oe]). Plus de 50 d'entre eux sont écrits en collaboration avec plus de 30 coauteurs différents (notamment dix travaux communs avec J-P. Serre, cinq avec J. Tits). Ils sont centrés sur les groupes de Lie et leurs actions, ainsi que sur les groupes algébriques et arithmétiques, et abordent des questions centrales concernant une multitude de domaines : topologie algébrique, géométrie différentielle, analytique et algébrique, théorie des nombres, etc. Ils ont joué un rôle fondamental dans le développement des mathématiques de la seconde moitié du 20^{e} siècle.

Armand Borel est né à la Chaux-de-Fonds en Suisse le 21 mai 1923. Après des études secondaires faites à Genève, puis dans des institutions privées, il entre en 1942 à l'École polytechnique fédérale (EPF) de Zurich dans la section mathématiques et physique, tout en accomplissant son service militaire obligatoire, et obtient son diplôme en mathématiques au printemps 1947 (son travail de diplôme lui avait été proposé par E. Stiefel). Il sera assistant à l'EPF pendant deux ans. Pendant cette période il publie deux travaux, l'un sur la caractérisation des sous-groupes connexes de rang maximum des groupes de Lie compacts (en collaboration avec J. de Siebenthal), et l'autre sur les groupes de Lie compacts opérant transitivement sur des sphères ou des tores. Ils témoignent déjà de ses solides connaissances sur les groupes de Lie compacts et les systèmes de racines, ainsi qu'en topologie algébrique, sujets auxquels il s'est initié en suivant les cours de E. Stiefel et de H. Hopf (tous deux des pédagogues exceptionnels). Ces premiers travaux montrent qu'il a parfaitement assimilé le papier [St] de Stiefel et les deux travaux fondamentaux [H1] et [H2] de Heinz Hopf.

Il désirait préparer une thèse sur les groupes de Lie mais Stiefel s'était déjà résolument tourné vers les mathématiques appliquées. Grâce à une bourse d'échange entre l'EPF et le CNRS, il passe l'année académique 1949-1950 à Paris. Il s'intègre immédiatement à la vie mathématique parisienne bouillonnante de cette époque. Il participe activement au séminaire de H. Cartan à l'École normale supérieure consacré cette année là à la topologie des espaces fibrés ; il y fait deux exposés où il donne un tableau complet de ce qui est connu à cette époque sur les groupes d'homotopie des groupes de Lie compacts. Au Collège de France, J. Leray expose ses conceptions révolutionnaires en topologie algébrique, la théorie des faisceaux et la suite spectrale ; parmi les rares auditeurs figurent Borel et Serre ; ce dernier, découragé, finit par abandonner, mais Borel tenace s'accroche jusqu'au bout (il complète même la théorie et la simplifie dans [Oe, I, 10]). Voici comment Serre évoque dans son entretien avec Marian Schmidt [Sc] le rôle joué par Borel dans les débuts de sa vie de chercheur, alors qu'il était à la recherche d'un sujet de thèse : « *J'ai fini, deux ans après ma sortie de l'École normale, par démarrer. Ce démarrage, je le dois en grande partie au mathématicien suisse Armand Borel ; venu de Zurich, où il avait été l'élève de H. Hopf, il était arrivé à Paris à l'automne 1949 et il y est resté deux ans*[1]*. Nous avons fait connaissance au séminaire Cartan et nous avons immédiatement sympathisé. Un peu plus âgé que moi, il avait déjà plusieurs publications à son actif et il m'a beaucoup appris sur la technique de la recherche. De plus, ce qui a été capital, il avait réussi à comprendre la mystérieuse théorie de Leray, suites spectrales incluses, et il me l'a expliquée. Un certain dimanche de juin 1950 (le jour où a commencé la guerre de Corée), nous avons trouvé une application de cette théorie qui, sans être difficile, était d'un genre nouveau : nous avons démontré qu'il n'existe pas de fibration d'un espace euclidien dont les fibres soient compactes et non réduites à des points. Nous avons rédigé là-dessus une note pour les Comptes rendus de l'Académie des sciences ; présentée le lendemain à l'Académie par Elie Cartan, elle est parue deux semaines plus tard. Mis en confiance par ce succès, j'ai entrepris d'explorer la théorie de Leray pour voir quelles autres applications on pouvait en tirer* ». Et un peu plus loin, à la question : quelles sont les principales influences que vous avez subies ? Serre répond : « Celles d'Henri Cartan et d'Armand Borel ont été décisives pour ma formation. Ensuite celle d'André Weil ». Ce premier travail commun avec Serre évoqué ci-dessus a joué un rôle de déclic pour l'un comme pour l'autre, car ils ont réalisé le parti que l'on pouvait tirer de l'étude de la suite spectrale d'une fibration pour établir des relations entre les cohomologies de l'espace total, de la fibre et de la base.

Borel donne aussi un rapport au séminaire Bourbaki sur les travaux d'Iwasawa et Gleason, en relation avec le 5^e problème de Hilbert. Peu après il fera d'autres exposés au séminaire Bourbaki et deviendra bientôt un membre actif de Bourbaki, qu'il quittera à l'âge réglementaire de 50 ans. Durant son séjour parisien, Borel assimile aussi les nouvelles idées développées par A. Weil, H. Cartan, C. Chevalley et J.-L. Koszul (exposées par H. Cartan au Colloque de Topologie de Bruxelles [Ca]) sur la transgression dans la cohomologie réelle des espaces fibrés et l'homomorphisme de Chern-Weil. Le but de sa thèse (dont le directeur fut J. Leray) sera de réinterpréter ces résultats dans leur cadre géométrique et de les étendre en cohomologie entière et modulo p, en utilisant la suite spectrale de Leray d'une fibration.

De 1950 à 1952, il remplace le professeur d'algèbre à l'université de Genève tout en faisant des séjours fréquents à Paris et à Zurich, où il donne au semestre d'été 1951 un cours sur la *Cohomologie des espaces localement compacts, d'après J. Leray*. Les notes polycopiées de ce cours, publiées plus tard dans les Springer

[1] en fait Borel n'est resté à Paris qu'une année.

Lecture Notes in Mathematics, vol 2, ont circulé partout et ont été très utiles car elles constituaient le premier exposé systématique et détaillé abordable des théories de Leray. C'est pendant cette période qu'il rédige sa thèse, soutenue à Paris au printemps 52 (le jury était composé de J. Leray, président, H. Cartan et A. Lichnerowitz). Ce travail monumental intitulé « Sur la cohomologie des fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts » sera publié dans les *Annals of Math* [Oe, I, 23]. Sa seconde thèse sur les fonctions automorphes de plusieurs variables complexes (un sujet qui lui tiendra à cœur tout au long de sa carrière) fera l'objet d'un article d'exposition dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France* [Oe, I, 22].

C'est aussi cette année qu'il épouse Gaby Pittet qui est restée sa compagne dévouée jusqu'au bout. En automne 1952, le jeune couple s'embarque pour les États-Unis, Armand étant invité à Princeton, comme membre visiteur de l'Institute for Advanced Study (IAS). Ce séjour de deux ans à Princeton sera crucial pour l'élargissement de son champ mathématique, tout autant que son séjour parisien en 1949-1950. Dans son rapport intitulé *The School of Mathematics of the Institute for Advanced Study* [Oe, IV, 138], il décrit avec enthousiasme l'ambiance mathématique exaltante de cette époque (voir pages 212-215). Il retrouve F. Hirzebruch qu'il avait déjà rencontré à Zurich en 1949 et qui comme lui est visiteur à l'IAS ; ensemble ils commencent leur grand travail *Characteristic classes and homogeneous spaces*. Il évoque la genèse du théorème de Riemann-Roch, ses contacts avec D. Montgomery, H. Samelson, J. Moore, et bien d'autres, qui conduisirent à des publications et des collaborations. Après avoir participé à une école d'été sur les groupes et algèbres de Lie organisée par l'AMS où il expose les résultats de sa thèse et où Chevalley donne un cours sur les groupes algébriques, il retourne en automne 53 à l'Institut pour une seconde année et y poursuit sa collaboration avec Hirzebruch. Influencé par les nouveaux développements de la géométrie analytique et algébrique dus à H. Cartan, J-P. Serre, C. Chevalley, F. Hirzebruch, K. Kodaira, D. Spencer et A. Weil, il commence à s'intéresser à l'aspect analytique complexe et algébrique des groupes de Lie. Ainsi le théorème de Borel-Weil est issu d'une conversation avec Weil à Chicago à la fin de 1953. Il est amené à penser aux groupes algébriques linéaires globalement, plutôt qu'en terme d'algèbres de Lie. Il développera ce point de vue plus profondément pendant l'année académique suivante 1954-1955 qu'il passera à Chicago comme professeur invité, bénéficiant des contacts avec André Weil. De là sortira son travail fondateur monumental *Groupes algébriques linéaires* [Oe, I, 39] qui marque un tournant décisif dans le sujet.

En cet automne 1955, il a publié plus de vingt travaux qui représentent déjà une œuvre mathématique importante. Il est nommé professeur à l'école polytechnique fédérale de Zurich (Heinz Hopf avait toujours été soucieux de le voir revenir en Suisse). Parmi ses obligations, il doit enseigner la géométrie descriptive en français ; il donne également un cours avancé sur le théorie des groupes de Lie. L'année suivante il reçoit une offre prestigieuse : un poste de professeur permanent à l'Institute for Advanced Study (IAS) de Princeton. Après quelques hésitations (voir [Oe, IV, p. 215]), il accepte ; il quitte Zurich au printemps 1957 et arrive à Princeton. Dès lors c'est là qu'il effectuera toute sa carrière, qu'il s'épanouira pleinement, élargissant encore ses domaines de recherches dans de multiples directions, et qu'il consacrera toute son énergie pour animer les activités mathématiques de l'Institut et défendre inlassablement avec André Weil, qui le rejoindra une année plus tard, le niveau d'excellence de cette institution (cf. [Oe, IV, 138]). Il organisera des séminaires sur des sujets d'actualité qui connaîtront un grand succès en y faisant participer de nombreux collaborateurs. La maison de Gaby et d'Armand à Princeton deviendra aussi un lieu d'accueil chaleureux et privilégié pour tant de visiteurs.

Armand Borel a reçu plusieurs distinctions, telles un doctorat *honoris causa* de l'université de Genève en 1972, la médaille Brouwer en 1978, le Steele Prize de l'American Mathematical Society en 1991 et le prix Balzan en 1992. Il a été nommé membre de plusieurs institutions, en particulier de l'American Academy of Arts and Sciences en 1976, de la National Academy of Sciences, USA, en 1987, associé étranger à l'Académie des Sciences de Paris en 1981, etc.

Quelques résultats mathématiques d'Armand Borel

L'œuvre mathématique d'Armand Borel est considérable et touche à tant de domaines différents qu'une analyse détaillée de ses travaux exigerait le concours de plusieurs spécialistes. Je renvoie à l'article de Serre pour une vue générale de son œuvre, et à celui de Gopal Prasad pour ses contributions aux groupes arithmétiques. Je me bornerai ici à n'évoquer que très brièvement quelques spécimens de ses résultats, ne donnant hélas qu'une vue très limitée de la richesse de son œuvre.

Un des buts de la thèse de Borel [Oe, I, 23] est de calculer la cohomologie entière ou modulo p, pour p premier, des groupes de Lie compacts connexes G, ainsi que la cohomologie de l'espace B_G classifiant pour les espaces fibrés principaux de groupe G (les éléments de cette cohomologie sont par définition les classes caractéristiques universelles pour ces fibrés). Un des résultats typiques est que si l'algèbre de cohomologie entière (resp. modulo p) de G est une algèbre extérieure dans des générateurs $x_1, \ldots, x_r$ de degrés impairs $2m_i - 1$, alors la cohomologie de B_G entière (resp. mod p) est une algèbre de polynômes dans des générateurs $y_1, \ldots, y_r$, les y_i étant de degrés pairs $2m_i$. L'hypothèse est vérifiée si la cohomologie enière de G est sans torsion (resp. sans p-torsion). Plus précisément si $\pi : E_G \to B_G$ est un espace fibré principal universel de groupe G, on peut choisir les générateurs x_i et y_i de sorte que y_i soit obtenu par restriction à la fibre G d'une cochaine x_i' de E_G dont le cobord est $\pi^*(y_i)$. On dit alors que les éléments x_i sont transgressifs et que y_i est l'image de x_i par la transgression. Ce résultat est obtenu à l'aide de la suite spectrale de Leray. Un autre résultat important est le suivant. Si T est un tore maximal dans G, on a une application $B_T \to B_G$ induite par l'inclusion. Sous l'hypothèse précédente, l'application induite en cohomologie est injective et applique isomorphiquement la cohomologie de B_G sur I_G, le sous-espace de la cohomologie de B_T (qui est une algèbre de polynômes dans des variables de degré 2) formé des éléments invariants par l'action du groupe de Weyl. Ainsi par exemple pour $G = U(n)$, la cohomologie entière de B_T est une algèbre de polynômes dans n générateurs $t_1, \ldots, t_n$ de degré 2 , la cohomologie entière de $BU(n)$ est l'algèbre des polynômes dans les classes de Chern qui apparaissent comme les fonctions symétriques élémentaires dans les t_i. Borel a obtenu un peu plus tard un résultat analogue pour la cohomologie modulo 2 de $O(n)$ (cf. [Oe, I, 25]). Dans ce cas T est remplacé par le sous-groupe $Q(n)$ des matrices diagonales. La cohomologie modulo 2 de $BQ(n)$ est l'algèbre des polynômes dans n générateurs v_i de degré 1 et les classes de Stiefel-Whitney s'identifient aux fonctions symétriques élémentaires dans les $v_1, \ldots, v_n$.

Auparavant, dans le chapitre II de sa thèse, il extrait du travail fondamental [H1] de Hopf la condition algébrique que Hopf avait mise en évidence pour l'algèbre de cohomologie d'un espace muni d'un produit et qu'il appelle algèbre de Hopf. Il détermine la structure de telles algèbres sur un corps parfait, en particulier il montre que c'est un produit tensoriel d'algèbres de Hopf avec un seul générateur. Le survol *Topology of Lie groups and characteristic classes* [Oe, I, 33] paru en 1955 dans le Bulletin de l'AMS, qui fait suite à un rapport de Samelson sur le même sujet publié dans le même journal trois ans auparavant, montre combien les méthodes topologiques développées dans la thèse de Borel ont supplanté les techniques précédentes et ont permis d'unifier et de faire progresser la théorie.

Signalons une application intéressante d'un travail commun avec Serre [Oe, I, 16], à savoir que, parmi les sphères, seules celles de dimension 2 et 6 admettent des structures presque-complexes.

Issue d'une collaboration avec F. Hirzebruch commencée en automne 1952 (cf. [Oe, IV, p. 212-214]) la série des trois articles *Characteristic classes and homogeneous spaces* [Oe, I, 43 et II, 45 et 47], a eu une influence considérable à l'époque, même avant sa publication (1958-1961), en particulier dans la genèse des théorèmes de périodicité de R. Bott, comme en témoigne son long rapport dans les *Math. Reviews* et ses remarques dans l'annonce de ses résultats (cf. R. Bott, « The stable homotopy of the classical groups », *Proc. Nat. Acad. of Sci.*, 43 (1957) p. 934). Le but initial de ce travail est de déterminer les classes caractéristiques d'un espace homogène G/U, où U est un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie compact G, à partir de certaines racines de G. Les auteurs obtiennent une foule de résultats concrets, en particulier un théorème de divisibilité de la classe de Chern d'un fibré vectoriel sur une sphère de dimension paire qui fournit une information sur certains groupes d'homotopie des groupes de Lie, et qui contredisait un résultat erroné de Toda, en désaccord avec la périodicité (cf. [Oe, I, p. 706]).

Borel a écrit une série de papiers ([Oe, I, 24 avec Serre, 28, 29, 35 avec Chevalley, 37, II, 51, 52]) dont le but est de calculer la p-torsion de l'algèbre de cohomologie entière des groupes de Lie compacts connexes G et d'établir des relations avec les sous-groupes commutatifs de G. Par exemple il montre que $H^*(G, \mathbb{Z})$ n'a pas de p-torsion si et seulement si tout sous-groupe abélien produit de groupes cycliques d'ordre p est contenu dans un tore maximal. Ou encore si G a de la p-torsion, alors p divise l'ordre du groupe de Weyl de G (supposé simplement connexe). L'article récent [B4] s'inscrit dans la lignée de ces travaux.

C'est dans le séminaire que Borel avait organisé à Princeton en 1958-1959 sur les groupes de transformations (« Seminar on transformations groups », *Ann. Math. Studies*, 46, 1960) qu'il a défini et exploité systématiquement la cohomologie équivariante : si X est un espace sur lequel opère continûment un groupe topologique G, la cohomologie équivariante du G-espace X est la cohomologie de l'espace X_G, quotient de $EG \times X$ par l'action diagonale de G (c'est ce qu'on appelle maintenant la *construction de Borel*).

Je voudrais mentionner aussi la conjecture que Borel avait énoncée oralement en 1953 dans une conversation informelle, à savoir qu'une variété compacte sans bord dont le revêtement universel est contractible est déterminée à homéomorphisme près par son groupe fondamental. Cette conjecture, appelée maintenant *conjecture de Borel* et probablement motivée par le résultat de Mostow sur les quotients des groupes de Lie connexes résolubles par des sous-groupes discrets cocompacts, est l'objet d'intenses recherches.

Ce qu'on appelle le théorème de Borel-Weil, qui date de la fin de 1953 et dont le manuscrit ne fut pas publié à l'époque (voir [Oe,I, 30 et son commentaire p. 704, ainsi que IV, p. 214]), est le résultat suivant. Le quotient G/T d'un groupe de Lie simple compact G par un tore maximal T est muni d'une structure complexe invariante. Ainsi G opère sur les espaces de sections holomorphes des fibrés homogènes holomorphes de rang 1 sur G/T. Un tel fibré est déterminé par un caractère χ de T. Le théorème montre en particulier qu'une représentation de G ainsi obtenue est irréductible de poids dominant χ.

Le travail fondamental de Borel *Groupes algébriques linéaires*, achevé en 1955 ([Oe, I, 39]), marque un tournant décisif dans sa carrière et aussi dans l'évolution de la théorie. Borel considère des groupes linéaires algébriques définis sur un corps algébriquement clos K de caractéristique quelconque ; il doit éviter toute allusion aux algèbres de Lie puisque l'application exponentielle ne peut plus être définie en caractéristique p, et comme il le dit, il s'est inspiré des méthodes globales développées dans les années quarante par Hopf [H1 et H2], Samelson et Stiefel [St] (cf. [B2, p. 124 et p. 158] pour la genèse de ce travail). Un résultat de base est l'existence et l'unicité à conjugaison près d'un sous-groupe résoluble fermé connexe maximal, conséquence immédiate d'un théorème d'existence de point fixe démontré géométriquement de manière très directe en quelques lignes (voir [B2, p. 124]). Un tel sous-groupe résoluble connexe maximal sera appelé *sous-groupe de Borel* par Chevalley. Borel développe aussi la théorie des tores maximaux et des éléments réguliers et singuliers (un tore étant défini comme un produit de K^*). Chevalley qui avait lu le manuscrit a immédiatement vu le parti que l'on pouvait en tirer et dès l'année suivante il obtenait la classification des groupes algébriques simples sur un corps algébriquement clos quelconque. L'étude des groupes algébriques sur un corps quelconque fera l'objet à partir de 1965 d'une série impressionnante de cinq travaux en commun avec J. Tits et conduira à la théorie de Borel-Tits.

Un résultat utile est le théorème de densité de Borel [Oe, II, 50]. Soit G un groupe algébrique connexe défini sur $\mathbb{R}$, sans composantes compactes. Soit $\Gamma \subset G$ un sous-groupe topologique fermé tel que G/Γ ait une mesure finie G-invariante. Alors Γ est Zariski dense dans G.

Une autre étape très importante est bien sûr le travail *Arithmetic subgroups of algebraic group* avec Harish-Chandra [Oe, II, 54], suivi d'une série d'autres sur les groupes arithmétiques, pour lesquels je renvoie à l'article de Gopal Prasad.

Je voudrais pourtant signaler le beau théorème d'existence de réseaux cocompacts [Oev II, 62] : Un groupe de Lie G semi-simple algébrique connexe possède toujours un sous-groupe discret Γ sans torsion tel que G/Γ soit compact.

Un autre résultat frappant est le suivant (cf. [Oe IV, 129]). Soit G un groupe de Lie connexe linéaire semi-simple, K un compact maximal. Alors si le rang de G est égal au rang de K, la cohomologie L^2 de l'espace symétrique $X = G/K$ est nulle en dimension différente de $\dim X/2$.

Enfin un des résultats les plus remarquables de Borel, une belle incarnation de sa foi dans l'unité des mathématiques, est le calcul de la cohomologie réelle stable des groupes arithmétiques, de ses applications à la K-théorie et ses relations avec les valeurs de la fonction ζ d'un corps de nombres aux points entiers (cf. [Oe III, 93, 100, 101, 108, 116, 118 et le survol dans IV, 157]). Il montre par exemple que $H^*(\lim_{n\to\infty} Sl_n(\mathbb{Z}); \mathbb{R})$ est une algèbre extérieure dans une infinité de générateurs x_i de degré $4i+1$. Il en résulte que les groupes de K-théorie $K_n(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ sont de dimension 1 pour $n \equiv 1 \bmod 4$ et sont nuls autrement $(n > 1)$.

Un homme de communication et de culture

Le quatrième volume de ses œuvres complètes, fort de 700 pages, contient l'ensemble des articles qu'il a publiés jusqu'en 1999 alors qu'il avait plus de 60 ans. À part de nombreux travaux de recherche, il contient une quinzaine d'articles destinés à un public plus large et qui sont passionnants à lire. Dans certains (cf. [Oe III, 119, IV, 149, 150, 153]) il dévoile sa conception personnelle des mathématiques ou encore ses expériences vécues au sein de la communauté mathématique, à l'IAS de Princeton ([Oe IV, 138]) ou chez Bourbaki [Oe IV, 165]. Dans d'autres, à caractère historique, il analyse avec une rigueur, une compétence et une objectivité rares, les travaux scientifiques de ses prédécesseurs (E. Cartan, H. Weyl), ou de ses aînés qu'il a côtoyés de près, J. Leray, A. Weil, C. Chevalley, E. Kolchin, D. Montgomery, ou encore Harish-Chandra. Il met en évidence les motivations, la genèse des idées, les influences réciproques, le tout émaillé de souvenirs personnels précieux, lui qui a été un acteur et un témoin privilégié de grands moments de l'évolution des mathématiques de son temps. Son analyse de la part de Poincaré à la relativité restreinte (voir [Oe IV, 173] et son commentaire aux pages 709-710), ainsi que son analyse de la controverse entre H. Weyl et E. Cartan sur les connexions projectives [B3] sont des modèles d'impartialité et sont fascinantes à suivre dans leurs tenants et aboutissants.

Comme le relèvent à la fois les citations du Steele Prize et du prix Balzan, Armand Borel a aussi joué un rôle essentiel comme organisateur et animateur de multiples activités mathématiques (séminaires, écoles d'été aux États-Unis, en Chine, en Inde, etc) et comme propagateur enthousiaste d'idés nouvelles. Il en est résulté de nombreux livres qui sont devenus des ouvrages de référence.

Je me bornerai à citer un seul exemple. Alors qu'il était retourné en Suisse comme professeur à l'EPF de Zurich de 1983 à 1986, il a organisé pendant les semestres d'été un séminaire qui a réuni des étudiants et des professeurs de toutes les universités suisses ainsi que des invités. Les réunions avaient lieu un jour par semaine à l'Institut mathématique de Berne situé à deux pas de la gare. Leur but était d'étudier en commun un sujet d'actualité (tel que l'homologie d'intersection ou les D-modules) et de faire participer activement à la fois des spécialistes et des non-spécialistes qui s'y préparaient durant le semestre d'hiver. Il en résultait des discussions animées et fructueuses pendant la pose de midi et les trajets en train. La tradition du séminaire suisse de Berne (qui porte aujourd'hui son nom) s'est poursuivie après son départ et a grandement contribué à développer les contacts entre les mathématiciens suisses et donné lieu à plusieurs publications de grande valeur.

D'une très grande force de caractère, encore plus exigeant pour lui que pour les autres, d'une honnêteté jamais mise en défaut et d'une prodigieuse puissance de travail, il était un homme de grande culture. Il était aussi passionné dans ses loisirs que dans son travail. Très sportif, il pratiquait la natation avec une stricte discipline et il aimait beaucoup faire des excursions en montagne. Grand amateur avec Gaby de voyages, il les préparait soigneusement pour pouvoir visiter des sites archéologiques ou des trésors architecturaux et découvrir des paysages nouveaux (en Inde, au Mexique, en Chine, etc). Il était aussi un grand connaisseur de peinture et un passionné de musique, d'abord de jazz (il adorait fréquenter les boîtes de Chicago et de New-York dans les annés cinquante), puis de musique contemporaine (Bartok en particulier) et enfin de musique classique indienne dont il était devenu un réel expert. Pendant plusieurs années il a organisé à l'Institut de Princeton une série de concerts, proposant des programmes originaux en dehors des chemins battus.

Armand Borel était resté très attaché à la Suisse et à Genève, la ville de son enfance et de son adolescence. Chaque année il passait l'été à la Conversion dans la maison familiale de Gaby qui domine le lac Léman. Il en profitait pour revoir ses amis (par exemple G. de Rham quand il était encore en vie), nager dans le lac et faire des balades en montagne. Fidèle dans ses amitiés, il ne manquait jamais de nous contacter et nous nous retrouvions chaque été en famille avec grand bonheur.

Avec son épouse Gaby et ses deux filles Dominique et Anne, nous partageons le sentiment d'avoir perdu un être d'exception.

Références

[Oe] A. Borel – *Œuvres-Collected Papers*, vol. I, II, III et IV, Springer-Verlag, 1983 et 1999.

[H1] H. Hopf – « Ueber die Topologie der Gruppen-Manigfaltigkeirten und ihrer Verallgemeinerungen », *Ann. Math.* **42** (1941), p. 22–52.

[H2] H. Hopf – « Ueber den Rang geschlossener Liescher Gruppen », *Comm. Math. Helv.* **13** (1940-1941), p. 119–143.

[St] E. Stiefel – « Ueber eine Beziehung zwieschen geschlossenen Lieschen Gruppen und diskontinuerlichen Bewegungsgruppen, etc. », *Comm. Math. Helv.* **14** (1941-1942), p. 350–380.

[Ca] H. Cartan – « La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal », *Colloque de Topologie, Bruxelles* (1950), p. 57–71.

[Sc] M. Schmidt – *Hommes de Sciences (28 portraits)*, Paris, Hermann, 1990.

Travaux de A. Borel publiés après 1999

[B1] A. Borel, G. Henkin & P. Lax – « Jean Leray (1906-1998) », *Notices A.M.S.* **47** (2000), p. 350–359.

[B2] A. Borel – *Essays in the history of Lie groups and algebraic groups*, Amer. Math. Soc., Providence, RI ; London Math. Soc., Cambridge, 2000.

[B3] A. Borel – « Élie Cartan, Hermann Weyl et les connexions projectives », Essays on Geometry and Related Topics, Monographies de l'Enseignement Mathématique N°. 38, 2001, pp. 43–58.

[B4] A. Borel, R. Friedman & J. Morgan – « Almost commuting elements in compact Lie groups », *Mem. Amer. Math. Soc.* **157** (2002).

[B5] A. Borel & L. Ji – « Compactifications of symmetric and locally symmetric spaces », *Math. Res. Lett.* **9** (2002).

[B6] A. Borel & L. Ji – « Compactifications of symmetric and locally symmetric spaces », Livre à paraître chez Birkhäuser.

Borel's contributions to arithmetic groups and their cohomology

Gopal Prasad[1]

Armand Borel made profound contributions to the study of arithmetic groups and their cohomology. The general theory of reductive groups over arbitrary fields, which he developed with Jacques Tits, played a fundamental role in this and several other areas.

The purpose of this article is to give a glimpse of Borel's work on arithmetic groups. We will only consider reductive algebraic groups defined over $\mathbb{Q}$, since using the Levi decomposition one can easily reduce to the case where the group is reductive, and given a reductive group over a number field, by restriction of scalars we obtain a reductive group over $\mathbb{Q}$. So let us assume that G is a connected reductive algebraic group defined over $\mathbb{Q}$. We realize G as a subgroup of GL_n, for some n, in terms of a fixed $\mathbb{Q}$-embedding of G in GL_n. Let $G_{\mathbb{Z}} := G(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. A subgroup Γ of $G(\mathbb{Q})$ is said to be an *arithmetic subgroup* of G if it is commensurable with $G_{\mathbb{Z}}$, i. e., if $\Gamma \cap G_{\mathbb{Z}}$ is of finite index in both Γ and $G_{\mathbb{Z}}$. It is easy to see that the notion of arithmetic subgroups is independent of the specific embedding of G in GL_n. It was observed by Minkowski that the *principal congruence subgroup* of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ of level m, i. e., the subgroup of matrices congruent to the identity matrix modulo an integer m, is torsion-free provided $m \geqslant 3$. Thus, any arithmetic subgroup contains a torsion-free subgroup of finite index.

An arithmetic subgroup is obviously a discrete subgroup of $G(\mathbb{R})$, and it is usually a rather "large" subgroup; in fact, as Borel showed in (70), if G is semi-simple and does not contain a nontrivial connected normal $\mathbb{Q}$-subgroup N such that $N(\mathbb{R})$ is compact, then Γ is dense in G in the Zariski-topology. These subgroups arise in several different contexts, for example, in the special orthogonal, symplectic or unitary group of a rational quadratic, alternating or hermitian form, or as the fundamental group of locally symmetric spaces of finite volume. Their study is an integral part of the general theory of automorphic forms, Shimura varieties, and the Langlands program.

The origins of the theory of arithmetic groups can be traced back to the work of Lagrange, and later Gauss, on the reduction theory of binary quadratic forms (this work provided the reduction theory for the arithmetic subgroup $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$). Generalizing Lagrange's approach, Hermite studied positive-definite, as well as indefinite, quadratic forms in several variables. Minkowski then developed a reduction theory for positive definite quadratic forms giving a fundamental domain, for the action of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ on the space of $n \times n$-positive symmetric matrices, which is a convex polyhedral cone. (For a nice account of all this, see [SO].) After this, Siegel developed the reduction theory for the arithmetic subgroups Γ of the automorphism group G of a semi-simple $\mathbb{Q}$-algebra with involution. He showed that the

[1] Department of Mathematics, University of Michigan, Ann Arbor MI 48109-1109 USA
e-mail:gprasad@umich.edu

"fundamental set" he constructed has the following three properties, and moreover it is of finite volume with respect to any Haar measure on $G(\mathbb{R})$ (which implies that $G(\mathbb{R})/\Gamma$ is of finite volume) if the central torus of G is anisotropic (over $\mathbb{Q}$).

(i) For some maximal compact subgroup K of $G(\mathbb{R})$, $K \cdot \Omega = \Omega$,

(ii) $\Omega \cdot \Gamma = G(\mathbb{R})$;

and furthermore the following property, known as the *Siegel property*,

(iii) for any $g \in G(\mathbb{Q})$, the set $\{ \gamma \in \Gamma \,|\, \Omega g \cap \Omega\gamma \neq \varnothing \}$ is finite.

A subset Ω of $G(\mathbb{R})$ is said to be a *fundamental set* for Γ if it has the above three properties. The goal of the reduction theory is to construct a "nice" fundamental set for any arithmetic subgroup.

In the 1950's, Weil gave a classification of classical semi-simple groups. He showed that up to isogeny these groups are the automorphism groups of semi-simple algebras with involutions. Thus Siegel's reduction theory covered most of the classical groups. Weil taught a course on Siegel's reduction theory at the University of Chicago (mimeographed notes of his course were prepared and distributed in 1958). In this course, he also proved the following compactness criterion for several of the classical groups : $G(\mathbb{R})/\Gamma$ is compact if and only if G is of $\mathbb{Q}$-rank zero, or, equivalently, either Γ, or the Lie algebra $\mathfrak{g}(\mathbb{Q})$ of G, consists entirely of semi-simple elements. (Based on the evidence provided by this result, and the classical results on the orthogonal groups, it was later conjectured by Godement that this compactness criterion holds for all semi-simple groups.) Subsequently Weil gave some lectures on this topic at Paris.

Harish-Chandra attended these lectures in Paris and found the situation – where results were known only for certain reductive groups, and where an explicit description of these groups was required for the study of their arithmetic subgroups – to be quite unsatisfactory, so he determined to find a general theory. This turned out to be very fortuitous, both for the subject and for his own later work on the general theory of automorphic forms where reduction theory of arithmetic subgroups plays an absolutely crucial role. He was able to quickly prove important results on arithmetic groups in a general set-up. The famous paper (58) of Borel and Harish-Chandra was an outgrowth of these results.

In the Borel and Harish-Chandra paper, a nice fundamental set for any arithmetic subgroup is constructed using the Minkowski-Siegel fundamental set for $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, and the Godement compactness criterion is proved in full generality (an independent and more popular proof of this criterion was given by Mostow and Tamagawa). I will now describe the fundamental set constructed by Borel and Harish-Chandra, and a more usable variant given by Borel (for a different approach to reduction theory due to Godement and Weil which leads to a similar fundamental set, see [G]).

Standard Siegel sets in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$: Let K be the orthogonal group $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, which is known to be a maximal compact subgroup of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Let A be the subgroup of diagonal matrices with strictly positive entries, and N be the subgroup of upper triangular unipotent matrices. For positive real numbers c and t, let

$$A_t = \{ a \in A \,|\; a_{i,i} \leqslant t a_{i+1,i+1} \},$$

and

$$N_c = \{ x \in N \,|\; |x_{i,j}| \leqslant c, \;\; 1 \leqslant i < j \leqslant n \}.$$

The subset $\mathfrak{S}_{t,c} = KA_tN_c$ is called a standard Siegel set (in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$). It is known that if $t \geqslant 2/\sqrt{3}$ and $c \geqslant 1/2$, then $\mathfrak{S}_{t,c}$ is a fundamental set for $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$; that it has the Siegel property was shown by Siegel.

The fundamental set constructed by Borel and Harish-Chandra is given in terms of an embedding of the underlying reductive group in GL_n. So now let G be a connected reductive $\mathbb{Q}$-subgroup of GL_n. It is known that we can find an element $a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ such that $aG(\mathbb{R})a^{-1}$ is self-adjoint. We fix such an a. Then given an arithmetic subgroup Γ of $G(\mathbb{Q})$, and a standard Siegel set $\mathfrak{S}$ in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ which is a fundamental set for $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, there exist finitely many elements $x_i \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ such that $\Omega = G(\mathbb{R}) \cap \bigcup a^{-1}\mathfrak{S}x_i$ is a fundamental set for Γ in $G(\mathbb{R})$. The main ingredient in the proof of this assertion is the important "finiteness lemma" which appears in §6 of Borel's book [B]. This book gives an excellent exposition of the general theory of arithmetic groups and it contains complete proofs of the main results. In this book, Borel used the above fundamental set to construct an intrinsically described fundamental set as follows. Let K be a maximal compact subgroup of $G(\mathbb{R})$. Let P be a minimal parabolic $\mathbb{Q}$-subgroup of G and let U be the unipotent radical of P. Let S be a maximal $\mathbb{Q}$-split torus of G contained in P. The centralizer M of S in G is actually contained in P and is a Levi-subgroup of P, i. e., it is a connected reductive subgroup and $P = M \cdot U$ (a semi-direct product). Let Δ be the basis of the root system of G, with respect to S, determined by P. Given a positive real number t and a relatively compact subset ω of $P(\mathbb{R})$, the subset $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{t,\omega} = K \cdot A_t \cdot \omega$, where

$$A_t = \{\, x \in A := S(\mathbb{R})^\circ \mid \ \alpha(x) \leqslant t \ \text{ for all } \alpha \in \Delta \,\},$$

is called a *Siegel set* of $G(\mathbb{R})$ (with respect to K, P and S). In §13 of [B], Borel showed that there exists a Siegel set $\mathfrak{S}$ ($= \mathfrak{S}_{t,\omega}$, for some t and ω), and a finite subset C of $G(\mathbb{Q})$ such that $\Omega \subset \mathfrak{S} \cdot C$; where Ω is the fundamental set for the arithmetic subgroup Γ given above. Then $G(\mathbb{R}) = \mathfrak{S} \cdot C \cdot \Gamma$. Making a clever use of the Bruhat and Iwasawa decompositions, Harish-Chandra showed that any Siegel set $\mathfrak{S}$ has the Siegel property, see [B : §15]. Consequently, the set $\mathfrak{S} \cdot C$ also has the Siegel property and so it is a fundamental set for Γ .

The existence of a fundamental set (recall that such a set has the Siegel property by definition) implies (see §5 of (61)) that Γ has a finite presentation, and its finite subgroups form finitely many conjugacy classes. It is not difficult to see that if G is semi-simple, or, more generally, if G does not admit a nontrivial character defined over $\mathbb{Q}$, then the volume of any Siegel set $\mathfrak{S}$, with respect to a Haar measure on $G(\mathbb{R})$, is finite, and hence, $G(\mathbb{R})/\Gamma$ carries a finite $G(\mathbb{R})$-invariant Borel measure, i. e., Γ is a lattice in $G(\mathbb{R})$.

Borel (and independently, Godement and Weil, see [G]) showed that $P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})/\Gamma$ is finite (or, equivalently, there are only finitely many Γ-conjugacy classes of parabolic $\mathbb{Q}$-subgroups of G), and for a finite subset C of $G(\mathbb{Q})$, $P(\mathbb{Q}) \cdot C \cdot \Gamma = G(\mathbb{Q})$ if and only if there is a Siegel set $\mathfrak{S}$, with respect to K, P, and S, such that $G(\mathbb{R}) = \mathfrak{S} \cdot C \cdot \Gamma$. The finiteness of the set of Γ-conjugacy classes of parabolic $\mathbb{Q}$-subgroups is a very useful result.

In (60), Borel employed the ideas and results of his joint paper (58) with Harish-Chandra to construct a fundamental set for the discrete subgroup $G(k)$ of the adele group $G(A)$, where G is a connected reductive algebraic group defined over a number field k, and A is the k-algebra of adeles of k. As a consequence, he deduced that $G(k)$ is a lattice in $G(A)$ if G does not admit a nontrivial character defined over k. He also proved the finiteness of the "class number", and the finiteness of the subset of the Galois cohomology set $H^1(k, G)$ consisting of cohomology-classes which are trivial at every place of k, using an adelic analogue of the "finiteness lemma" mentioned above.

Existence of cocompact discrete subgroups. Borel used the Godement compactness criterion to show that any connected semi-simple real Lie group $\mathcal{G}$ contains a cocompact discrete subgroup (62). It would clearly suffice to prove the existence of such a discrete subgroup assuming that $\mathcal{G}$ is an adjoint group. In this case Borel proved, by showing that the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of $\mathcal{G}$ has a form defined over a totally real extension of $\mathbb{Q}$ of degree > 1, all but one of whose conjugates are compact, that there exists a connected semi-simple algebraic group G, which is defined and anisotropic over $\mathbb{Q}$, such that $G(\mathbb{R})^\circ$ is isomorphic to the direct product of $\mathcal{G}$ and a compact group. Now, in view of the Godement compactness criterion, the projection into $\mathcal{G}$ of any arithmetic subgroup of $G(\mathbb{Q})$ would be a discrete cocompact subgroup of $\mathcal{G}$.

In a latter joint work (109) of Borel with Harder, it is shown that given a number field k and a finite set S of places of k, and an absolutely simple algebraic k-group G, the natural map

$$H^1(k, \mathrm{Aut}\, G) \to \prod_{v\in S} H^1(k_v, \mathrm{Aut}\, G)$$

is surjective. This theorem provides, in particular, S-arithmetic cocompact subgroups in a finite product of simple real and p-adic groups of the same type.

Some finiteness results. In the joint work (139) of Borel with the present author, a natural Haar measure on any semi-simple group over a local (i. e., locally compact nondiscrete) field is given and it is shown that, up to natural equivalence, there are only finitely many S-arithmetic subgroups whose covolume with respect to this Haar measure is less than a given positive number c. Here the underlying global field k, the semi-simple k-group, and the finite set S of places of k, are all allowed to vary arbitrarily. This paper also provides new, more geometric proofs of several other finiteness assertions, including the finiteness of class numbers. It uses a formula for the covolume of *principal* S-arithmetic subgroups given in [P].

Compactifications of locally symmetric spaces and cohomology of arithmetic groups. I will next describe Borel's two important contributions to compactifications of locally symmetric spaces $V = X/\Gamma$, where G is a connected reductive group defined over $\mathbb{Q}$, Γ is a torsion-free arithmetic subgroup of $G(\mathbb{Q})$, and X is the symmetric space $K\backslash G(\mathbb{R})$ of $G(\mathbb{R})$, K being a maximal compact subgroup of the latter. The first one (69) is a joint paper with Baily which was inspired, in part, by an earlier work on compactifications by Satake [S]. In this, X is assumed to be hermitian (i. e., it carries a $G(\mathbb{R})$-invariant complex structure). Baily and Borel used Harish-Chandra's realization of X as a bounded symmetric domain to give a compactification V^* of X/Γ. On V^* they introduced a natural structure of an irreducible normal analytic variety and provided an embedding of V^* into a complex projective space, both by means of the Poincaré-Eisenstein series. The main results of (95) imply that there is, in fact, a unique structure of algebraic variety on X/Γ compatible with the complex analytic structure on it. It turns out that, if Γ is a congruence subgroup, the projective variety V^* is definable over an explicit number field (Shimura) and it has much arithmetic significance.

Zucker conjectured that the L^2-cohomolgoy of V $(=X/\Gamma)$ (see below) is isomorphic to the middle intersection cohomology of V^*. This conjecture was proved by Borel (122) for groups G of $\mathbb{Q}$-rank 1, and Borel and Casselman (131) for groups of $\mathbb{Q}$-rank 2. Looijenga, and Saper and Stern, proved it in general independently and by entirely different arguments.

Borel's second important contribution to compactification was his joint paper (98) with Serre. To describe it, let us assume that G is a connected semi-simple $\mathbb{Q}$-group, Γ is a torsion-free arithmetic subgroup, and X is the symmetric space of $G(\mathbb{R})$. Using the reduction theory, Raghunathan [R] constructed a proper Morse function on X/Γ, with finitely many critical values. Existence of such a Morse function implies that X/Γ is diffeomorphic to the interior of a compact manifold with boundary, which in turn implies that the trivial $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module $\mathbb{Z}$ admits a finite free resolution in which each term is of finite rank. This gives several finiteness results on the Eilenberg-MacLane cohomology of Γ. To obtain more precise results about the cohomology of Γ, we need to know the boundary of a nice compactification of X/Γ. This information is not available for the compactification of X/Γ given by Raghunathan's Morse function. A different, and more canonical, construction of a compactification of X/Γ was given by Borel and Serre in (98). They used the "geodesic action" of the identity component of the center of the group of $\mathbb{R}$-points of a Levi subgroup of any parabolic $\mathbb{Q}$-subgroup P of G on X to construct a boundary face $e(P)$ associated with P ; $e(P)$ is diffeomorphic to a Euclidean space and $e(G)=X$. The corner $X(P)$ associated with P is, by definition, the disjoint union of boundary faces $e(Q)$, $Q\supset P$; $\bar{X}$ is the union of all the $X(P)$'s, so it is the disjoint union of all the $e(P)$'s. Borel and Serre introduced a Hausdorff topology on $\bar{X}$ under which it becomes a manifold with corners (topologically a manifold with boundary) whose interior is X. It is obvious from the construction of $\bar{X}$ that $G(\mathbb{Q})$ operates on it ; the Siegel property of Siegel sets is used to show that Γ operates properly on $\bar{X}$. The fact that there exists a Siegel set $\mathfrak{S}$, and a finite subset C of $G(\mathbb{Q})$, such that $G(\mathbb{R})=\mathfrak{S}\cdot C\cdot\Gamma$ quickly implies that $\bar{X}/\Gamma$ is compact. Thus $\bar{X}/\Gamma$ is a compact manifold with corners whose interior is X/Γ.

The boundary $\partial\bar{X}$ of $\bar{X}$ has the homotopy type of the Tits building of $G(\mathbb{Q})$; so, according to a theorem of Solomon and Tits, it has the homotopy type of an (infinite) bouquet of spheres of dimension $\ell-1$, where $\ell=\mathbb{Q}$-rank G. Thus the reduced homology $\widetilde{H}_i(\partial\bar{X})$ of $\partial\bar{X}$, with coefficients in $\mathbb{Z}$, vanishes except in dimension $\ell-1$, and $\widetilde{H}_{\ell-1}(\partial\bar{X})=:I$ is the Steinberg module of $G(\mathbb{Q})$. From Poincaré-duality for manifolds with boundary we get an isomorphism $H^i_c(\bar{X})\simeq H_{d-i}(\bar{X},\partial\bar{X})$, where d is the dimension of X. Hence, the cohomology group $H^i_c(\bar{X})$ is trivial unless $i=d-\ell$ in which case it is I. The fact that $\bar{X}/\Gamma$ is compact implies that $H^i(\Gamma,\mathbb{Z}[\Gamma])\simeq H^i_c(\bar{X})$, and we conclude that $H^i(\Gamma,\mathbb{Z}[\Gamma])$ vanishes for all i except $i=d-\ell$ and $H^{d-\ell}(\Gamma,\mathbb{Z}[\Gamma])=I$. Thus Γ is a generalized Poincaré-duality group, in the sense of Bieri and Eckmann, with dualizing module I, and its cohomological dimension is $d-\ell$.

A nice and comprehensive treatment of various compactifications of symmetric and locally symmetric spaces is given in a forthcoming book by Borel and Lizhen Ji.

L^2-cohomology. Let M be a Riemannian manifold. The Riemannian metric defines a positive definite scalar product $(\ ,\ )_x$ on the exterior algebra of the cotangent space at each point x of M, and hence a scalar product, which may possibly be infinite, on $\Omega^p(M)$, the space of real-valued smooth p-forms on M, given by

$$(\omega, \omega') = \int_M (\omega_x, \omega'_x)_x \, dv,$$

where dv is the Riemannian volume-form on M. An exterior p-form ω is said to be *square-integrable* if (ω, ω) is finite. Let $\Omega^*_{(2)}(M)$ be the subcomplex of the de Rham complex $\Omega^*(M)$ of M consisting of square-integrable forms ω such that $d\omega$ is also square-integrable. The p-th cohomology, denoted $H^p_{(2)}(M, \mathbb{R})$, of this subcomplex is called the p-th L^2-cohomology group of M, with coefficients in $\mathbb{R}$. There is a boundary operator $\partial : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$ which is formally adjoint to d. A square-integrable form ω is said to be *harmonic* if $d\omega = 0 = \partial\omega$. Let $\mathcal{H}^*_{(2)}(M, \mathbb{R})$ be the graded group of harmonic forms. Then there is a homomorphism $\mathcal{H}^*_{(2)}(M, \mathbb{R}) \to H^*_{(2)}(M, \mathbb{R})$, which is injective if M is complete, and the cokernel is known to be either trivial or infinite-dimensional. According to a result of Kodaira, if a de Rham cohomology class is represented by a square-integrable form then it is also represented by a L^2-harmonic form.

Now let G be a connected semi-simple group defined over $\mathbb{Q}$ and let $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ be an arithmetic subgroup. As before, let X be the symmetric space of $G(\mathbb{R})$. Borel and Casselman showed in (126) that the L^2-cohomology of X/Γ is finite dimensional if the absolute rank of G equals the rank of a maximal compact subgroup of $G(\mathbb{R})$.

Stable cohomology of arithmetic groups. I shall now describe Borel's results on "stable" cohomology of arithmetic groups (100). Let G and Γ be as above and X be the symmetric space of $G(\mathbb{R})$ Let I_G be the space of smooth differential forms on the symmetric space X which are invariant under $G(\mathbb{R})^\circ$. Such forms are known to be harmonic and, as was shown by E. Cartan, I_G is the cohomology, with real coefficients, of the "compact dual" X_u of X. The inclusion of I_G^Γ in the de Rham complex of X/Γ induces a natural homomorphism $j^*_\Gamma : I^\Gamma_G \to H^*(X/\Gamma, \mathbb{R})$. As X is contractible, $H^*(X/\Gamma, \mathbb{R})$ is, in fact, the Eilenberg-MacLane cohomology $H^*(\Gamma, \mathbb{R})$, of Γ, with coefficients in $\mathbb{R}$. The main result of (100) gives a range in which j^p_Γ is an isomorphism. (For $\mathbb{Q}$-isotropic groups, this range is roughly $\frac{1}{4}(\mathbb{Q}\text{-rank}\, G)$.) If $G(\mathbb{R})/\Gamma$ is compact, then by Hodge theory j^*_Γ is injective, and Matsushima showed that there exists a positive constant $m(G(\mathbb{R}))$ such that j^p_Γ is surjective for all $p \leqslant m(G(\mathbb{R}))$. Garland observed that even when X/Γ is noncompact, Matsushima's argument can be used to show that j^p_Γ is surjective for a positive integer $p \leqslant m(G(\mathbb{R}))$, provided every cohomology class of X/Γ of dimension p is represented by a square-integrable exterior p-form. Together with Hsiang, Garland also gave a "square-integrabilty criterion" which gave a range up to which this condition is satisfied. (The work of Garland and Hsiang was inspired by a paper of Raghunathan on the first cohomology of an arithmetic subgroup of a connected semi-simple $\mathbb{Q}$-group G of $\mathbb{Q}$-rank 1, with coefficients in a rational G-module, in which he showed that any cohomology class is represented by a square-integrable 1-form.)

Now to find a range in which j^p_Γ is an isomorphism, Borel worked with the subcomplex C^*, of the de Rham complex $\Omega^*(X/\Gamma)$, consisting of forms which together with their exterior derivative have "logarithmic growth" near the boundary $\partial(\bar{X}/\Gamma)$ of X/Γ. He showed that (i) the inclusion $C \to \Omega^*(X/\Gamma)$ induces an isomorphism in the cohomology, (ii) there is a positive constant $c(G)$ such that for all $p \leqslant c(G)$, C^p consists of square-integrable forms, and (iii) $I^\Gamma_G \subset C^*$. From this it follows that j^p_Γ is injective for $p \leqslant c(G)$, and an isomorphism for $p \leqslant \min(c(G), m(G(\mathbb{R})))$. By explicitly computing $c(G)$ and $m(G(\mathbb{R}))$, Borel showed that j^p_Γ is an isomorphism for $p < \frac{1}{4}(\mathbb{Q}\text{-rank}\, G)$. Therefore, for p in this range, $H^p(\Gamma, \mathbb{R})$ coincides with the p-th cohomology group $H^p(X_u, \mathbb{R})$ of the compact dual X_u.

If we consider a sequence (H_n, f_n) of classical simple algebraic $\mathbb{Q}$-groups, where $f_n : H_n \to H_{n+1}$ is the natural inclusion, for example, $H_n = \mathrm{SL}_n$, then $\varprojlim I_{H_n}$ is known. In a given dimension p, the sequence $I^p_{H_n}$ is stationary, i. e., there is an integer $n(p)$ such that $I^p_{H_m} = \varprojlim I^p_{H_n}$ for $m \geqslant n(p)$. One can use this to compute, for example, the cohomology of $\mathrm{SL}(\mathfrak{o}) = \bigcup_n \mathrm{SL}_n(\mathfrak{o})$ and $\mathrm{Sp}(\mathfrak{o}) = \bigcup_n \mathrm{Sp}_{2n}(\mathfrak{o})$, where $\mathfrak{o}$ is the ring of integers of a number field k.

Applications to K-theory of number fields. Quillen has shown that the groups $K_i(\mathfrak{o})$ are finitely generated abelian groups, and the rank of $K_i(\mathfrak{o})$ is equal to the dimension of the space of indecomposable elements (in the sense of Hopf algebras) in $H^*(\mathrm{SL}(\mathfrak{o}), \mathbb{R})$ of degree i. Using his results on cohomology of $\mathrm{SL}(\mathfrak{o})$, described above, in (100) Borel was able to determine the rank of $K_i(\mathfrak{o})$. He was able to similarly determine the ranks of Karoubi's L-groups of $\mathfrak{o}$. Borel's computation shows that the rank s_i of $K_i(\mathfrak{o})$ is zero if i is even and it is $r_1 + r_2$ or r_2, according as i is congruent to 1 or 3 modulo 4, where, as usual, r_1 is the number of real places of k and r_2 is the number of complex places. In an interesting work (108), Borel showed further that for odd i, say $i = 2m - 1$, there is a natural map (called these days the "Borel regulator map") from $K_i(\mathfrak{o})$ into the space of indecomposable elements of $H^*(\mathrm{SL}(\mathfrak{o}), \mathbb{R})$ of degree i (note that this vector space has a natural $\mathbb{Q}$-structure given by $H^*(\mathrm{SL}(\mathfrak{o}), \mathbb{Q})$) whose image is a lattice of covolume a rational multiple of ${D_k}^{1/2}\zeta_k(m)\pi^{-d(m+1)}$, where ζ_k is the Dedekind ζ-function of k, $d = [k : \mathbb{Q}]$, and D_k is the absolute value of the discriminant of k.

A vanishing theorem. Using Langlands' classification of irreducible admissible representations of real reductive groups, Borel and Wallach [BW], and independently, Zuckerman [Z], proved the following important vanishing theorem. Let G be a connected semi-simple algebraic group defined over $\mathbb{R}$, $\mathfrak{g}$ be the Lie algebra of $G(\mathbb{R})$ and K be a maximal compact subgroup. Let H be an infinite dimensional irreducible unitary $(\mathfrak{g}, K)$-module and F be a finite dimensional $(\mathfrak{g}, K)$-module, then $H^p(\mathfrak{g}, K, H \otimes F)$ *vanishes for all* $p < \mathbb{R}$*-rank* G. For a cocompact discrete subgroup Γ of $G(\mathbb{R})$, this vanishing theorem is known to imply that $H^p(\Gamma, \mathbb{R}) \simeq H^p(\mathfrak{g}, K, \mathbb{R})$ for $p < \mathbb{R}\text{-rank}\, G$. As $H^p(\mathfrak{g}, K, \mathbb{R})$ is isomorphic to the p-th cohomology of the compact dual X_u of the symmetric space associated with $G(\mathbb{R})$, we conclude that $j^p_\Gamma : I^\Gamma_G \to H^p(\Gamma, \mathbb{R})$ is an isomorphism for $p < \mathbb{R}\text{-rank}\, G$. This strengthens a result of Matsushima mentioned above. Kumaresan [K], using an idea of Parthasarathy, gave an elegant proof of a vanishing theorem which subsumes the vanishing theorems of Borel, Wallach and Zuckerman.

Most of the results mentioned above have analogues for S-arithmetic groups, and there are also results on cohomology of arithmetic and S-arithmetic groups with nontrivial coefficients, but describing them would have made this article too long.

The author would like to thank Jeffrey Adler, Brian Conrad, Stephen DeBacker, Ila Fiete, Lizhen Ji, Dipendra Prasad, Yoav Segev and Jean-Pierre Serre for carefully reading an earlier version of this article and for their helpful comments. He was supported by the NSF.

References

A number in round brackets in this article refers to the paper with that number in Armand Borel's Collected papers published by Springer-Verlag in four volumes.

[B] A. Borel, *Introduction aux groupes arithmétiques*, Hermann, Paris (1969).

[BW] A. Borel and N. Wallach, *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, 2nd edition, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[G] R. Godement, *Domaines fondamentaux des groupes arithmétiques*, Séminaire Bourbaki No. 257 (1962/63).

[K] S. Kumaresan, *On the canonical $\mathfrak{k}$-types in the unitary $\mathfrak{g}$-modules with non-zero relative cohomology*, Invent. Math., **59**(1980), 1–11.

[P] G. Prasad, *Volumes of S-arithmetic quotients of semi-simple groups*, Publ. Math. I.H.E.S., **69**(1989), 91–117.

[R] M.S. Raghunathan, *A note on quotients of real algebraic groups by arithmetic subgroups*, Invent. Math. **4**(1968), 318–335.

[S] I. Satake, *On compactifications of the quotient spaces for arithmetically defined discontinuous groups*, Annals of Math. **72**(1960), 555–580.

[SO] W. Scharlau and H. Opolka, *From Fermat to Minkowski*, Springer-Verlag, New York (1985).

[Z] Zuckerman, *Continuous cohomology and unitary representations of real reductive groups*, Annals of Math., **107**(1978), 495–516.

© Archives privées de la famille Borel

Armand et son épouse Gaby, 1953

© Archives privées de la famille Borel

Armand Borel et Alexandre Grothendieck

André Weil, Armand Borel et Jean-Pierre Serre au congrès Bourbaki de juin-juillet 1951 à Pelvout-le-Poët. Considéré comme « visiteur » par « LaTribu » de ce congrès, Borel n'en était pas à son premier contact avec son groupe. Il livra un historique précis et critique des années de sa collaboration au collectif dans « Twenty-five years with Nicolas Bourbaki (1949-1973) », Notices of the American Mathematical Society, *1998*, **45***(3), pages 373-380.*

Discours prononcé en séance publique le 30 septembre 2003 en hommage à Armand Borel (1923-2003)[1]

Jean-Pierre Serre

Le mathématicien suisse Armand Borel est mort le 11 août 2003, à Princeton, des suites d'un cancer à évolution rapide. Il était membre de notre compagnie depuis 1981.

Peu de mathématiciens étrangers ont eu autant de relations avec la France. Il a été élève de Leray, il a pris part au séminaire Cartan et il a publié de nombreux articles (plus de vingt) en collaboration avec nos confrères Lichnerowicz et Tits, ainsi qu'avec moi-même. Il a été membre de Bourbaki pendant plus de vingt ans. Les mathématiciens français ont le sentiment que c'est l'un des leurs qui disparaît.

Armand Borel était né à La Chaux-de-Fonds en 1923, et avait fait ses études universitaires à l'École polytechnique fédérale (le « Poly ») de Zurich. C'est là qu'il rencontre H. Hopf qui lui donne le goût de la Topologie et E. Stiefel qui l'initie aux groupes de Lie et à leurs systèmes de racines. Il passe l'année 1949-1950 à Paris comme boursier du CNRS. Un très bon choix (pour nous, comme pour lui) : Paris était l'endroit même où se créait ce que les américains ont appelé la *French Topology*, avec les cours de Leray au Collège de France et le séminaire Cartan à l'École Normale. Borel participe activement au séminaire Cartan, tout en suivant les cours de Leray. Il parvient à comprendre la fameuse « suite spectrale » — ce qui n'était pas facile — et il me l'explique si bien que je n'ai pas cessé de m'en servir pendant les quelques 50 années suivantes... Il commence à l'appliquer aux groupes de Lie et à la détermination de leur cohomologie à coefficients entiers. Cela fera une thèse, soutenue en Sorbonne (sous la présidence de Leray) en 1952 ; cette thèse sera tout de suite publiée dans le grand périodique américain « *Annals of Mathematics* ». Entre-temps, Borel est revenu en Suisse (à Genève). Il n'y reste pas longtemps. Il fait un séjour de deux ans (1952-1954) à l'Institute for Advanced Study de Princeton et passe les années 1954-1955 à Chicago, où il profite de la présence d'André Weil pour se familiariser avec la géométrie algébrique et la théorie des nombres. Il retourne en Suisse (Zurich), et c'est en 1957 que « l'Institute » lui offre un poste de professeur permanent, poste qu'il occupera jusqu'à sa mort (il était devenu professeur honoraire en 1993).

Armand Borel était membre des Académies des sciences des États-Unis et de Finlande. Il avait reçu la médaille Brouwer en 1978, le prix Steele (Amer. Math. Soc.) en 1991 et le prix Balzan en 1992. Ses Œuvres ont été réunies en 4 volumes, publiés par Springer-Verlag en 1983 (vol. I, II, III) et en 2001 (vol. IV).

Les travaux de Borel ont une profonde unité : ils se rapportent presque tous *à la théorie des groupes*, et plus particulièrement aux groupes de Lie et aux groupes

[1] Publié dans :« Discours et notices biographiques », tome IV, Académie des sciences de l'Institut de France, 2003, avec l'aimable autorisation de J. Dercourt, Secrétaire perpétuel.

algébriques. Le caractère central de la théorie des groupes est connu depuis longtemps. Dans [Oe IV, p.381], Borel se plait à citer une phrase de Poincaré, datant de 1912, qui dit ceci :
« *La théorie des groupes est, pour ainsi dire, la mathématique entière, dépouillée de sa matière et réduite à une forme pure* ».
Nous n'emploierions plus aujourd'hui des termes aussi extrêmes : « *mathématique entière* » nous paraît exagéré, et « *dépouillée de sa matière* » nous paraît injuste. Il n'empêche que l'importance de la théorie des groupes est de nos jours bien plus évidente qu'à l'époque de Poincaré et cela dans des domaines aussi différents que la géométrie, la théorie des nombres et la physique théorique. Il semble que, dès sa jeunesse, Borel ait pris consciemment la décision d'explorer et d'approfondir tout ce qui touche de près ou de loin à cette théorie ; et c'est ce qu'il a fait, pendant près de soixante ans.

Je ne vais pas tenter de faire une liste exhaustive des résultats qu'il a obtenus. Je vais me borner à ceux que je connais le mieux :

Topologie des groupes de Lie et de leurs espaces classifiants

Comme je l'ai dit plus haut, c'est le sujet de sa thèse ([Oe 23]).

L'objectif est la détermination de la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (torsion comprise) des groupes de Lie compacts et de leurs espaces classifiants. Borel utilise la théorie de Leray et la complète en prouvant un résultat technique difficile du style :

« algèbre extérieure (fibre) $\Longrightarrow$algèbre de polynômes (base) ».

(La démonstration en est si difficile que, d'après Borel lui-même, elle n'aurait été vérifiée que par trois personnes : lui-même, J. Leray, et E. Dynkin...).

Cela l'amène à introduire les « nombres premiers de torsion » pour un groupe de Lie compact G donné (par exemple, 2, 3 et 5 pour G de type E8). Il montre que ces nombres jouent aussi un rôle particulier dans la structure des sous-groupes finis commutatifs de G ([Oe 24, 51, 53]). On s'est aperçu depuis qu'ils interviennent aussi dans la cohomologie galoisienne de G et en particulier dans la théorie de la « dimension essentielle ».

Groupes algébriques linéaires

Son article sur ce sujet [Oe 39] a joué un rôle fondamental (il a en particulier servi de point de départ à la classification par Chevalley [Che] des groupes réductifs en termes de systèmes de racines). Borel y établit les principales propriétés des sous-groupes résolubles connexes maximaux (appelés depuis « sous-groupes de Borel ») et des tores maximaux. Les démonstrations sont étonnamment simples ; elles reposent en grande partie sur le lemme disant que tout groupe linéaire résoluble connexe qui opère (algébriquement) sur une variété projective non vide a un point fixe.

Le point de vue de [Oe 39] est « géométrique » : le groupe G considéré est défini sur un corps de base k qui est supposé algébriquement clos. Il en est de même dans [Che]. Le cas d'un corps non algébriquement clos est cependant d'un grand intérêt, tant pour les géomètres (E. Cartan, pour $k = \mathbb{R}$) que pour les arithméticiens ($k =$ corps de nombres, ou corps p-adique). Borel (et, indépendamment, Tits) construit une théorie « relative », basée sur les k-tores déployés maximaux, et les systèmes de racines correspondants.

Borel et Tits publient ensemble leurs résultats ([Oe 66, 94]) ; la théorie ainsi obtenue porte aujourd'hui leur nom. Elle est d'un usage précieux dès que le groupe (supposé simple) est isotrope, c'est-à-dire contient des éléments unipotents non triviaux. (Le cas anisotrope est du domaine de la « cohomologie galoisienne », et n'est toujours pas entièrement compris.) Borel et Tits complètent leurs résultats en décrivant les homomorphismes non nécessairement algébriques (appelés, curieusement, « abstraits ») entre groupes du type $G(k)$, cf. [Oe 82, 97].

Groupes arithmétiques, stabilité, représentations ...

C'est à Borel et à Harish-Chandra que nous devons les résultats de base sur les *sous-groupes arithmétiques* des groupes réductifs sur les corps de nombres : génération finie, cocompacité (dans le cas anisotrope), covolume fini (dans le cas semi-simple), cf. [Oe 54, 58]. Ces résultats ont une grande importance pour les applications à la théorie des nombres. Borel les complète dans une série d'articles ([Oe 59, 61, 70, 74, 88, 99]) ainsi que dans [2]. Plusieurs thèmes s'entrecroisent :

– compactifications des quotients : celle de Baily-Borel ([Oe 63,69]) dans le cas analytique complexe ; celle de [Oe 90, 98] dans le cas réel, utilisant des variétés à coins. Dans les deux cas, c'est l'immeuble de Tits du groupe considéré qui dicte ce qu'il faut ajouter « à l'infini ».
– généralisation aux groupes S-arithmétiques et aux groupes adéliques ([Oe 60, 91, 105]) ; ici, l'emploi de l'immeuble de Tits doit être complété par celui des immeubles de Bruhat-Tits des places non-archimédiennes.
– représentations de dimension infinie, et programme de Langlands : [4], [6], et [Oe 103, 106, 112].
– relations entre la cohomologie des groupes arithmétiques et celle des espaces symétriques.

Ce dernier thème conduit Borel à l'un de ses plus beaux résultats : un théorème de stabilité ([Oe 93, 100, 118]) qui donne la détermination du rang des groupes de $\mathbb{K}$-théorie de $\mathbb{Z}$ (et, plus généralement, des anneaux d'entiers d'un corps de nombres). Cela le conduit à la définition d'un régulateur, qu'il montre être essentiellement une valeur de fonction zêta en un point entier ([Oe 108]).

Histoire des Mathématiques

Dans les dix dernières années de sa vie, Borel a publié une série de textes de nature à la fois historique et mathématique sur les sujets suivants :

– Topologie : travaux de D. Montgomery ([Oe 357]), J. Leray ([Oe 164]) et A. Weil ([Oe 168]) ;
– Théorie des Groupes : travaux de H. Weyl ([Oe 132]), C. Chevalley ([Oe 143]) et E. Kolchin ([Oe 171]) ;
– Relativité restreinte ([Oe 173]).

Certains de ces textes ont été repris et complétés dans le dernier ouvrage qu'il ait publié, ses « Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups » ([8]). Un livre passionnant, qui nous promène à travers un siècle de théorie des groupes, de Sophus Lie à Chevalley, en passant par Elie Cartan et H. Weyl. Une « visite guidée », avec un pareil guide, quel plaisir !

L'œuvre de Borel ne se limite pas aux textes que je viens d'invoquer, tant s'en faut. C'était un animateur enthousiaste. On lui doit plusieurs Séminaires ou « Summer Schools » particulièrement réussis, notamment sur les actions de groupes ([1]), les groupes algébriques ([4], [Bou]), la cohomologie continue ([5]), les formes modulaires ([Cor]) et les D-Modules ([6]). Je désire mentionner aussi sa contribution à Bourbaki (de 1950 à sa retraite en 1973, cf. [Oe 165]), à qui il apportait à la fois bon sens et expertise.
Les chapitres sur les groupes de Lie ([Lie]) lui doivent beaucoup.

Borel a reçu le prix Balzan en 1992, avec la citation suivante : « *Pour ses contributions fondamentales à la théorie des groupes de Lie, des groupes algébriques et des groupes arithmétiques, et pour son action inlassable en faveur de la recherche mathématique et de la propagation des idées nouvelles.* »

On ne saurait mieux dire.

Références

Articles

Ils sont reproduits, avec commentaires, dans :

[Oe] A. Borel – *Œuvres – Collected Papers (1948-1999)*, 4 volumes, Springer-Verlag, (1983 et 2001).

Ouvrages

[1] A. Borel, *Seminar on Transformation Group*, Ann. Math. Stud. 46, Princeton, 1960.

[2] ———, *Introduction aux groupes arithmétiques*, Hermann, Paris, 1969.

[3] ———, *Linear Algebraic Groups*, Benjamin, New York, 1969, 2nd enlarged edition, GTM 126, Springer-Verlag (1991).

[4] A. Borel, R. Carter, C.W. Curtis, N. Iwahori, T.A. Springer & R. Steinberg – *Seminar on algebraic groups and related finite groups*, L.N. 131, Springer-Verlag, 1970.

[5] A. Borel & N. Wallach – *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, Ann. Math. Stud. 94, Princeton, 1980, 2nd enlarged edition, A.M.S. (1999).

[6] (en collaboration) – « Algebraic D-Modules », Acad. Press, Boston (1987).

[7] A. Borel, *Automorphic Forms on* $\mathrm{SL}(2, R)$, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[8] ———, *Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups*, A.M.S., 2001.

Autres textes cités

[Lie] N. Bourbaki – « Éléments de mathématique », Groupes et algèbres de Lie chap. I à IX, Paris, Hermann et Masson, 1960–1982.

[Che] Secr. Math. IHP, Paris – *Séminaire Chevalley : Classification des groupes de Lie algébriques, Fasc. 1 et 2*, École norm. Sup., 1956–1958. 2ème édit. Springer-Verlag (à paraître prochainement).

[Bou] A. Borel & G.D. Mostow (édit.) – « Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups », in *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. IX, Amer. Math. Soc., 1966.

[Cor] A. Borel & W. Casselman (édit.) – « Automorphic Forms, Representations and L-Functions », in *Proc. Symp.Pure Math. XXXIII*, Amer. Math. Soc., 1979.