

# MATHÉMATIQUES

---

## Trois quarts de siècle avec Henri Cartan

Jean Cerf

---

Dans le dossier que *Le Monde* de ce 3 mars 2004 consacre à « *Matière grise : la bataille mondiale* », on lit tout au début des propos du biologiste E. E. Baulieu recueillis par le journal : « *Les mathématiciens français sont parmi les tout premiers du monde.* » Par-delà la remise en cause de certains excès bourbachiques, j'ai la conviction (largement partagée je l'espère) que cette situation est en grande partie héritée d'un groupe de jeunes gens qui, dans les années trente, ont conçu le projet d'un traité « prenant les Mathématiques à leur début. » Dans ce groupe je vois au premier rang Henri Cartan, entouré de ses amis André Weil et Jean Dieudonné.

J'ai eu le privilège de croiser souvent la route d'Henri Cartan. La première fois, c'était (d'après lui) à Strasbourg en 1930 ; j'ai certes oublié cette rencontre — j'avais deux ans — mais j'ai gardé un net souvenir des années qui ont suivi. Cartan était un collègue de mon père et un ami de ma famille, ami admiré mais un peu redouté pour son esprit caustique ; on se faisait aussi du souci pour sa santé fragile ! Puis je l'ai revu en 1940 à Clermont, où l'université de Strasbourg avait été *repliée* et plus tard à La Bourboule, après la catastrophe qu'il avait pressentie. Et de nouveau à Strasbourg en 1945 après le grand trou d'où ma famille sortait indemne, et pas la sienne. Ensuite à Paris, lui professeur et moi élève à l'École normale : le cours aux élèves de 2<sup>e</sup> année où il nous a appris ce qu'était une variété différentiable, et où un inconnu (c'était Alexandre Grothendieck) s'est permis de dialoguer avec lui d'égal à égal depuis le fond de la salle ; le premier Séminaire Cartan de Topologie (1948) dont j'ai fait sous sa houlette l'exposé n° 3, ensuite entièrement rédigé par lui ; et souvent dans sa famille, Boulevard Jourdan, où j'étais un peu comme un enfant de plus. Puis comme patron de recherche qui ne *donnait* pas de sujet, mais qui m'a signalé un jour l'article de Feldbau sur les homéomorphismes des sphères, qui a été le point de départ de ma thèse.

Dès avant cette époque, j'étais assez proche de lui pour recueillir parfois ses confidences, comme celle-ci, dont je me souviens, sur René Thom, qu'il *découvrit* avant tout le monde en dépit de leurs esprits si différents : « *Thom est un garçon rempli d'idées, mais que c'est dur de les lui faire mettre par écrit !* » Puis au fil du temps : ses batailles, le plus souvent victorieuses, pour « *remonter le niveau de la Sorbonne en Mathématiques* » (la formule est de lui) ; ses vains efforts pour qu'une chaire du Collège de France soit créée pour André Weil. Son engagement précoce à une époque où cela demandait une grande hauteur de vue, en faveur de la réconciliation franco-allemande, cette *utopie* dont la réalisation est aujourd'hui

un de nos motifs d'espoir face à des conflits en apparence insolubles. Ses engagements pour la défense des Droits de l'Homme partout dans le monde, et pour la construction d'une Europe fédérale, à laquelle il attache tant de prix.

Jean-Pierre Serre a écrit : « *Je crois que le style de Cartan est ce qu'on peut trouver de mieux en Mathématiques* ».

Je crois que le style de Cartan est ce qu'on peut trouver de mieux dans la vie. Merci, Monsieur Cartan, de nous montrer par votre exemple qu'il est possible de vieillir en devenant de plus en plus humain.

---

## De la formule d'Atiyah-Singer aux complexes parfaits, souvenirs du séminaire Cartan-Schwartz

Luc Illusie

---

« *Illusie, il faut vous acheter une machine à écrire!* » C'est le premier conseil que Cartan m'aît donné. Un conseil précieux, dont je lui suis toujours reconnaissant. Nous sommes en novembre 1963. Le séminaire Cartan-Schwartz [CS] sur la formule d'Atiyah-Singer a commencé. Mes notes manuscrites de l'exposé de Cartan sur les groupes  $K$  viennent d'être distribuées aux auditeurs. On est consterné par mon écriture en pattes de mouche. La prochaine fois, c'est promis, je taperai à la machine. La prochaine fois, c'est pour un exposé sur le caractère de Chern et la classe de Todd. Mon premier exposé de séminaire! Quand Cartan me le propose, j'ignore tout de la question. Mais, miracle, après un entretien avec lui, tout s'éclaire, le plan est tracé, l'exposé prêt à composer. N'empêche que, le moment venu, je tremblais, même si tout s'est bien passé. Je me rappelle, à la fin, une discussion animée avec un jeune que je rencontrais pour la première fois, et dont l'énergie et l'imagination débordantes m'avaient ébloui : Jean-Louis Verdier. Il nous manque...

On mesure mal, de nos jours, l'importance qu'avait un séminaire comme le séminaire Cartan pour la formation des jeunes mathématiciens. D'abord, il s'agissait d'un séminaire « à thème », d'une durée d'un an, genre aujourd'hui disparu. Cartan choisissait, parmi les résultats récents, un théorème ou une théorie suffisamment riche pour justifier d'y consacrer un séminaire. En début d'année, il répartissait les exposés entre les volontaires. L'exposé, une fois fait, devait être rédigé dans le mois suivant. Une discipline rigoureuse, qui était observée. Au lieu des « séminaires tournants » actuels, où, chaque semaine, on va, souvent sans conviction, écouter un orateur sur un sujet chaque fois différent, le séminaire Cartan demandait des participants un investissement sérieux et durable. C'est au séminaire Cartan, puis, dans les séminaires Grothendieck, qui en conservaient le principe, que j'ai appris le métier. Rien n'était laissé dans l'ombre. Il n'y avait pas de « boîte noire ». Les préliminaires et rappels nécessaires étaient faits en détail. Les démonstrations n'étaient pas seulement « esquissées », mais présentées complètement. Cartan tenait à ce que l'on comprenne, souci légitime, qui n'est plus si répandu, me semble-t-il. Combien de fois l'ai-je vu interrompre un orateur pour lui demander « d'éclairer notre

lanterne ». Bien entendu, le séminaire était une occasion privilégiée de rencontres et de discussions, qu'un fort centre d'intérêt commun rendait plus fécondes.

Mais revenons au séminaire Cartan-Schwartz. J'y ai appris à exposer et à rédiger, sous la houlette de Cartan (et de Douady, qui m'a beaucoup aidé à cette époque). J'y ai aussi, tout simplement, découvert le plaisir de la recherche. Dès que j'avais une idée ou une question, même naïve, je n'hésitais pas (j'en ai un peu honte aujourd'hui) à téléphoner à Cartan. Il me répondait toujours avec bienveillance. Parfois, s'il avait un doute, il me disait : « Je vais demander à Serre », et il me rappelait peu après (avec la réponse). Classes de Chern et complexes de de Rham devaient rester pour moi un thème favori, sur lequel je suis souvent revenu. À la fin du séminaire, Cartan m'a proposé, comme sujet de thèse, de généraliser la formule d'Atiyah-Singer aux familles. La formule d'Atiyah-Singer classique [A1] s'écrit

$$i_a(d) = i_t(d).$$

Le membre de gauche,  $i_a(d)$ , dit *indice analytique*, est l'indice d'un opérateur elliptique  $d : E^0 \rightarrow E^1$  entre fibrés vectoriels complexes sur une variété  $C^\infty$  compacte  $X$ , i.e. la différence  $\dim \text{Ker } H^0(X, d) - \dim \text{Coker } H^0(X, d)$  entre les dimensions de deux espaces vectoriels complexes de dimension finie. Le membre de droite,  $i_t(d)$ , dit *indice topologique*, est, *a priori*, seulement un nombre rationnel, défini comme  $(-1)^n f_*(\text{ch}(d) \text{ Todd}(TX \otimes \mathbb{C}))$ , où  $n$  est la dimension de  $X$ ,  $f_* : H_X^*(TX, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}$  est le morphisme de Gysin associé à la projection  $f$  de  $X$  sur un point,  $\text{Todd}(TX \otimes \mathbb{C})$  la classe de Todd du fibré tangent complexifié, et  $\text{ch}(d)$  le caractère de Chern de l'élément de  $K_X(TX)$  défini par le symbole de  $d$  (l'indice  $X$  signifiant « à support dans  $X$  »). Cette formule est analogue à celle de Riemann-Roch-Hirzebruch en géométrie algébrique. Ce que demandait Cartan, c'était un analogue de la formule de Riemann-Roch-Grothendieck, pour un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  propre et lisse entre variétés  $C^\infty$  compactes et  $d$  un opérateur (ou complexe) elliptique *relativement à  $Y$* . J'avais commencé à réfléchir à la définition, dans ce cadre, de l'indice analytique  $i_a(d)$ , qui doit être un élément de  $K(Y)$ . J'étais parvenu à une définition locale (sur  $Y$ ), mais je ne voyais pas comment globaliser. Cartan m'a alors conseillé d'aller voir Grothendieck, qui, m'a-t-il dit, devait avoir des idées sur la question. Des idées, Grothendieck en avait, en effet, et plus que je ne pouvais digérer sur le moment. Mais cette première rencontre a été pour moi décisive, bien au-delà du point technique qui me préoccupait, puisqu'elle devait déterminer toute l'orientation future de mes recherches.

J'aimerais dire quelques mots de la manière dont Grothendieck a résolu, très simplement, le problème en question (cf. [SGA 6 II, Ap. 2]). L'outil, qu'il m'a expliqué alors, et qui devait avoir de nombreuses applications, est la notion de *complexe parfait* (cette terminologie fut en fait choisie par Grothendieck plus tard). Soit  $(S, \mathcal{O}_S)$  un espace (voire un site) annelé, en anneaux non nécessairement commutatifs. Un complexe parfait sur  $S$  est un complexe de  $\mathcal{O}_S$ -modules (à gauche) qui, localement, est isomorphe, dans la catégorie dérivée, à un complexe borné à composantes facteurs directs de  $\mathcal{O}$ -modules libres de type fini. Si  $S$  est un espace compact, annelé par le faisceau des fonctions continues complexes, il est facile de montrer qu'un tel complexe est *globalement* isomorphe, dans la catégorie dérivée  $D(S, \mathcal{O}_S)$ , à un complexe borné de  $\mathcal{O}_S$ -modules localement libres de type fini, et a donc une classe dans  $K(S)$ . Dans le cas du problème envisagé plus haut, ce

que j'avais construit (sans le savoir) était un complexe parfait sur  $Y$ . Le résultat de Grothendieck me fournissait l'élément de  $K(Y)$  que je cherchais. Quant à la définition de l'indice topologique, et la démonstration de la formule d'Atiyah-Singer dans ce cadre relatif, elles furent données quelque temps après par Shih [S] et, sous une forme plus forte, par Atiyah-Singer [A2].

Pour reconnaître qu'un complexe est parfait, il existe des critères commodes, dont le prototype est le suivant. Prenons pour  $S$  un espace réduit à un point, annelé par un anneau noethérien à gauche  $A$ . Soit  $E$  un complexe de  $A$ -modules à gauche. Pour que  $E$  soit parfait, il faut et il suffit que les groupes de cohomologie  $H^i(E)$  soient de type fini sur  $A$ , et qu'il existe un intervalle borné  $[a, b]$  de  $\mathbb{Z}$  tel que, pour tout  $A$ -module à droite  $M$ , on ait  $Tor_q^A(M, E) = 0$  pour  $q \notin [a, b]$ . Ces critères sont exposés, dans un degré de généralité malheureusement décourageant, dans [SGA 6, I, II]. Parmi les applications des complexes parfaits en géométrie algébrique, signalons :

(a) critères de semi-continuité ou de continuité pour la cohomologie des fibres d'un morphisme ([SGA 6 III], voir [I] pour une présentation récente) ;

(b) formule de Riemann-Roch-Grothendieck [SGA 6] ;

(c) formule des traces de Grothendieck en cohomologie étale ([G], [SGA 5]).

Quarante ans ont passé. À l'époque, Cartan me paraissait âgé. Il était pourtant plus jeune que je ne suis aujourd'hui. Et il était vif comme la poudre ; il l'est resté. Le revoyant récemment, j'ai évoqué son séminaire, et son conseil pour la machine à écrire. Il m'a confié que Weil, jadis, lui avait donné le même ...

C'est avec amour et reconnaissance que, pour son centième anniversaire, je lui dédie respectueusement ces quelques lignes.

### Bibliographie

[CS] Séminaire Henri Cartan, 16<sup>e</sup> année (1963/64), dirigé par Henri Cartan et Laurent Schwartz, Théorème d'Atiyah-Singer sur l'indice d'un opérateur elliptique, W. A. Benjamin, inc., 1967.

[A1] M. F. Atiyah and I. M. Singer, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), 422-433.

[A2] M. F. Atiyah and I. M. Singer, The index of elliptic operators, IV, Ann. of Math.(2) 93 (1971), 119-138.

[G] A. Grothendieck, Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L, Sém. Bourbaki 1964/65, n<sup>o</sup> 290, 31-45, dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Advanced studies in pure math., North-Holland Pub. Comp., Masson et Cie, 1968.

[I] L. Illusie, *Grothendieck's existence theorem in formal geometry*, ICTP Trieste, 2003.

[SGA 5] *Cohomologie  $\ell$ -adique et fonctions L*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1965/66, dirigé par A. Grothendieck, SLN 589, Springer-Verlag, 1977.

[SGA 6] *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1966/67, dirigé par P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie, SLN 225, Springer-Verlag, 1971.

[S] Shih, Weishu, Fiber cobordism and the index of a family of elliptic differential operators, Bull. Amer. Soc. 72 (1966), 984-991.





© Tous droits réservés. Archives de l'Association N. Bourbaki.

*Au même « congrès œcuménique », de gauche à droite : Jacques Dixmier (à l'écoute), Jean Dieudonné (annotant une rédaction), Pierre Samuel (bic au bec), André Weil (à l'extrême droite sur le banc), Jean Delsarte (sur une chaise au soleil) et Laurent Schwartz (stylo en main, debout sous le parasol). Étaient aussi présents à ce congrès : Roger Godement et Jean-Pierre Serre (membres de Bourbaki), Armand Borel et Gerhard P. Hochschild (visiteurs), Pierre Cartier (cobaye), sans compter les « figurants » (femmes, enfants, paysans et animaux domestiques) dont il est fait mention dans le compte rendu de ce congrès.*



© Tous droits réservés. Archives de l'Association N. Bourbaki.

*Henri Cartan (à gauche) et Samuel Eilenberg au congrès Bourbaki de Pelvoux-le-Poët (Hautes Alpes), tenu entre le 25 juin et le 8 juillet 1951. À cette époque, Cartan et Eilenberg composaient ensemble ce qui devint la première grande monographie d'algèbre homologique (Princeton University Press, 1956).*

---

## Souvenirs personnels sur Henri Cartan

Pierre Samuel<sup>1</sup>

---

Ma première rencontre avec Henri Cartan date d'août 1940, à Toulouse, où avait lieu l'oral, pour la « zone libre », du concours d'entrée à la Rue d'Ulm. Les « 5/2 » nous avaient dit que c'était un examinateur « gentil », contrairement à certains examinateurs de l'X qui cherchaient à déstabiliser les candidats. En fait Henri Cartan s'efforçait de bien faire parler le candidat afin de déterminer ce qu'il avait de prometteur. J'ai retrouvé cette qualité lorsque, bien plus tard, nous nous trouvions ensemble dans les jurys de thèse : comparant des candidats qui étaient passés devant nous, les bonnes questions qu'il leur avait posées lui permettaient de déterminer lequel était le plus prometteur ; la suite a montré qu'il ne se trompait pas.

Je l'ai vu à nouveau en 1944-1945, à l'École, dans la préparation à l'Agrégation. Ses critiques des leçons faites devant lui étaient incisives et impeccables. Comme j'avais écrit à Bourbaki pour signaler des erreurs dans les exercices alors publiés, il s'intéressa à moi et me fit venir, avec René Thom, comme « cobaye » au Congrès Bourbaki qui eut lieu à l'École en juillet 1945. Ce fut pour moi une révélation.

Puis j'eus (1945-1947) une bourse de recherche à Princeton et j'en revins avec un sujet de thèse de géométrie algébrique, principalement inspiré par Claude Chevalley. Lorsque cette thèse fut prête, en 1949, je demandai à Henri Cartan d'être du jury en me fournissant un sujet de « seconde thèse » : ce furent les relations entre l'homologie et l'homotopie ; il passa beaucoup de temps à m'indiquer les articles à lire et à s'assurer que je dominais bien ce sujet, nouveau pour moi.

Dans l'intervalle j'étais devenu membre à part entière de Bourbaki. Lors des Congrès, j'admirais ses interventions, toujours incisives, et sa connaissance approfondie de multiples branches de la Mathématique. Lorsqu'une de ses propositions sur la manière de présenter une question dans le *Traité* n'était pas aussitôt retenue, il prenait à part, pendant les promenades, divers membres du groupe pour les convaincre du bien fondé de sa proposition ; tantôt il y parvenait, tantôt sa proposition sortait améliorée de ces discussions. Également, dans les trains qui nous amenaient au Congrès, il nous communiquait son enthousiasme pour des découvertes récentes, par exemple la notion de fonctorialité et divers points de son livre avec S. Eilenberg.

Bien que nos domaines de recherche aient été assez séparés, notre amitié et nos convergences s'approfondirent. Peu à peu, et surtout lorsque je me mis à m'intéresser à l'écologie, il me communiqua son enthousiasme pour l'Europe.

J'admirais aussi ses incessantes actions pour les mathématiciens persécutés. Juste après mai 68, nous fûmes tous deux ouverts à certaines revendications étudiantes, par exemple celle de faire un travail personnel dans le cadre d'un certificat de maîtrise. Nous nous fîmes transférer de Paris-Centre à Orsay en 1970, et là j'admirai ses efforts pour que les structures de la future université de Paris XI (ou Paris-Sud) fassent bien cohabiter recherche et enseignement.

---

<sup>1</sup> Professeur émérite à l'université de Paris-Sud

Faute de compétence, je laisse à d'autres le soin de parler de ses travaux sur les fonctions de plusieurs variables complexes, la topologie algébrique, l'algèbre homologique, etc. Je sais qu'ils sont fondamentaux et que les « Séminaires Cartan », dont il définissait chaque année le contenu avec une remarquable intuition de ce qui était important, ont éveillé les vocations de nombreux mathématiciens de premier plan.

### Les Foncteurs

*Honni sois-tu Cartan pour ton trop long voyage,  
Et toi aussi Sammy qui perds de ta toison.  
Mieux vaudrait ménager, je crois, votre raison  
Et laisser là ces jeux pas encor de votre âge.*

*Quand vous verrai-je, hélas, d'un mémoire plus sage  
Tenter la renommée ? Et quand donc pourra-t-on  
D'un monstre si patent refuser l'impression ?  
Maint journal, à coup sûr, y prendrait avantage.*

*Plutôt le paradis de Cantor, des aïeux,  
Que votre ?uvre superbe au front audacieux.  
Plus que l'axiome pur me plaît l'astuce fine.*

*Plus le lemme chinois que votre article vain.  
Plus mon petit Lainé que ce chapitre vingt.  
Et plus qu'un satellite un bon espace affine<sup>2</sup>.*

© Droits réservés Archives de l'Association N. Bourbaki.

*Le congrès d'été à Pelvoux avait chargé Samuel Eilenberg de rédiger un rapport sur le rôle des foncteurs dans le chapitre « Structures » du volume de Théorie des ensembles de Bourbaki. Peu après le congrès, un participant a communiqué à Bourbaki ce pastiche du célèbre sonnet de Joachim Du Bellay dans lequel l'allusion au travail conjoint de Cartan et Eilenberg - qu'à l'instar de leurs collègues américains les Bourbakis surnommaient « Sammy » - est évidente. Le registre de l'ironie poétique permet peut-être une certaine ambiguïté mais le pasticheur laisse entendre que la (plutôt récente) théorie des catégories est une activité sénile et futile. L'identité du poète n'étant pas révélée par « La Tribu », la question est mise au concours ici.*

La Gazette des Mathématiciens tient à remercier chaleureusement Madame Liliane Beaulieu pour la mise à disposition des illustrations de cet article.

<sup>2</sup> NBT027 La Tribu. Compte rendu du « Congrès croupion » (octobre 1951), page 1.

---

## À propos d'un colloque<sup>1</sup> en l'honneur de Paul Koosis

Jean-Pierre Kahane

---

Paul Koosis est un mathématicien très original, qui a beaucoup d'attaches avec la France, et mériterait d'y être mieux connu. Ses ouvrages sur les espaces  $H_p$ , sur l'intégrale logarithmique et sur la théorie de Beurling et Malliavin se trouvent dans les bibliothèques, ou devraient s'y trouver, et ce sont les meilleures références sur les sujets en question. Les « Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin » ont été écrites par lui en français, et elles sont publiées par le Centre de recherches mathématiques (CRM) de l'Université de Montréal. Le théorème en question l'a occupé pendant toute sa vie. C'est un théorème multiforme, qui en particulier donne le rayon de totalité d'une famille d'exponentielles sur la droite réelle, une question difficile qui avait intrigué Paley, Wiener, Levinson, Laurent Schwartz et d'autres. Le sujet et le livre valent d'y entrer pour aller voir.

[Les problèmes traités par Beurling et Malliavin :

La théorie de Beurling et Malliavin remonte au début des années 1960, mais ils n'ont achevé la publication de leurs travaux qu'en 1967. Travaux et références se trouvent dans les œuvres de Beurling. Les principaux résultats avaient transpiré dès 1961 (voir par exemple mon exposé au séminaire Bourbaki, n° 225, reposant sur un cours donné par Paul Malliavin à Stanford pendant l'été 1961). La théorie répond aux questions suivantes, qui sont liées au moyen du théorème de Paley-Wiener :

- a) calculer le rayon de totalité d'une suite réelle ou complexe  $S$ , c'est-à-dire la borne supérieure des  $r$  tels que les exponentielles  $\exp(isx)$ ,  $s$  dans  $S$ , forment un système total dans  $L^2(-r, r)$ ;
- b) caractériser les spectres des fonctions moyenne-périodiques, c'est-à-dire des solutions d'équations de convolution par des mesures à supports compacts ;
- c) caractériser les fonctions entières qui sont quotients de deux fonctions entières de type exponentiel bornées sur la droite réelle ;
- d) peut-on, pour une telle fonction entière, choisir le dénominateur de type exponentiel arbitrairement petit ?

La solution de a) et b) fait intervenir la « densité effective » de Beurling et Malliavin, qui a le caractère d'une densité extérieure (borne inférieure des densités des suites densitables contenant la suite donnée, « densitable » se référant à une certaine manière d'approcher une dilatée de  $Z$ ). Les solutions de c) et d) (positive pour d)) utilisent à la fois la théorie classique des fonctions et la théorie du potentiel. L'« intégrale logarithmique », à laquelle Koosis a consacré d'autres livres, y joue un rôle majeur.]

Toutes les recherches de Paul Koosis et ses ouvrages sont relatifs à l'analyse classique, et surtout à la théorie des fonctions d'une variable complexe, un domaine où la France était particulièrement active il y a un siècle. Le flambeau est passé à d'autres pays, et d'autres sujets (la physique, les systèmes dynamiques) le réactivent actuellement.

---

<sup>1</sup> 23-26 octobre 2003, Montréal

Du 23 au 26 octobre s'est tenue à Montréal, annoncée en français et en anglais, une « Conférence en analyse classique en l'honneur de Paul Koosis ». Elle était organisée conjointement par le CRM et par plusieurs universités du Québec, dont Mc Gill où Koosis est professeur. Le programme mariait agréablement les seniors (Louis Nirenberg, Walter Hayman, John Garnett, Victor Havin, David Drasin, Jean-Pierre Kahane, Paul Koosis lui-même), et les plus jeunes dont une belle collection de prix Salem et autres notabilités (Peter Jones, Sasha Volberg, Sergey Treil, Fedya Nazarov, Michael Wilson, Tom Ransford, Henrik L. Petersen, Misha Sodin, Robert Milson, Remm Yassawi, Javad Mashreghi, Ivo Klemes). L'analyse classique est variée et bien vivante. Elle plonge dans le passé (on a plaisir à entendre évoquer des travaux d'Henri Cartan datant de 1928 et 1933) et s'articule à des questions très actuelles liant analyse, géométrie, physique, probabilités, combinatoire et théorie des nombres. Elle a pour caractère principal de ne partir que de notions familières à tous les mathématiciens. C'était du moins la règle du jeu implicite de ce colloque, et une raison de son succès.

[Les œuvres de jeunesse d'Henri Cartan présentes dans le colloque :

1. Les théorèmes de division dans l'anneau des fonctions entières s'appuient classiquement sur des minorations des dénominateurs, qui elles-mêmes s'appuient sur des minorations de polynômes (je veux dire de leurs modules). Depuis 1928, le meilleur outil est un théorème de Cartan largement exploité dans sa thèse (œuvres, I, 7-92) : à tout polynôme unitaire on peut associer des disques dont la somme des rayons ne dépasse pas  $2e$ , tels qu'en dehors de la réunion de ces disques le module du polynôme soit supérieur ou égal à 1. Ce théorème, qui a d'abord été publié dans une note aux Comptes rendus (œuvres, I, 4-6), prouve en l'améliorant une conjecture d'André Bloch. Il a des variantes multiples : produits de distances à  $n$  points dans un espace métrique, potentiel logarithmique d'une mesure positive, potentiel par rapport à d'autres noyaux. La démonstration se voit bien quand on considère  $n$  points dans un espace métrique et un  $r > 0$  : on met en place une boule de rayon  $kr$  contenant  $k$  des points, avec  $k$  maximum, puis une boule de rayon  $lr$  contenant  $l$  des points restants s'il y en a, avec  $l$  maximum, et ainsi de suite, de sorte que  $k + l + \dots = n$ . Remplaçons ces boules par des boules ayant les mêmes centres et des rayons doubles. La somme des leurs rayons est  $2nr$  et en dehors de leur réunion les distances aux  $n$  points donnés, ordonnées dans l'ordre croissant, sont supérieures à  $r, 2r, 3r, \dots, nr$  respectivement. D'où tout ce qu'il faut. La conférence de Misha Sodin au colloque Koosis, intitulée « Growth, zeroes, and area estimates; variations on the theme », débutait par la référence à ce théorème de Cartan.

2. La conférence de Walter Hayman portait un titre mystérieux : « ABC, Waring and Fermat for functions ». Il s'agissait de déterminer, pour divers anneaux de fonctions, les nombres  $F(n)$  et  $W(n)$  qui sont les plus petits entiers  $p$  tels que 1 (resp. un élément arbitraire de l'anneau) puisse s'écrire comme somme de  $p$  puissances  $n$ -ièmes. L'exposé oral débutait par l'évocation d'une amélioration par Cartan de la théorie de Nevanlinna, parue à Cluj en 1933 (œuvres, I, 421-445). La version écrite doit être publiée dans le Journal of the London Mathematical Society au moment du centième anniversaire de Cartan. Les auteurs sont Gary Gundersen et Walter Hayman, le titre « The strength of Cartan's version of Nevanlinna Theory », et le résumé mérite d'être intégralement reproduit ici : « In 1933 Henri Cartan proved a fundamental theorem in Nevanlinna theory which is a generalization of Nevanlinna's second fundamental theorem. Cartan's theorem works very well for certain kinds of problems. Unfortunately, it seems that Cartan's theorem, its proof, and its usefulness, are not as widely known as they deserve to be. To help give wider exposure to Cartan's theorem, we state the simple and general form of the

theorem, give a proof of the general form, and give several applications of the theorem ». En fait, le travail de Cartan remonte à 1929, et l'énoncé de son inégalité, avec déjà un certain nombre d'applications, se trouve dans une note aux Comptes rendus très claire et facile à lire (œuvres, I, 111-113).

3. Cartan s'intéressait à cette époque à des problèmes d'unicité. Par exemple, on savait d'après Pólya et Nevanlinna que, si deux fonctions entières  $f$  et  $g$  sont distinctes, et ne sont pas inverses l'une de l'autre, les ensembles de zéros de  $f - 1$  et de  $g - 1$  ne peuvent pas coïncider. Cartan résume sa contribution sous forme d'un énoncé en langue « vulgaire » : les zéros communs à  $f - 1$  et à  $g - 1$  constituent tout au plus la moitié de l'ensemble total des zéros de  $f - 1$  et de  $g - 1$  (œuvres, I, 442). De tels problèmes d'unicité sont difficiles et les progrès sont lents. Pour en avoir un autre aspect on peut se référer à la note aux Comptes rendus récemment présentée par Henri Cartan : « Fonctions méromorphes aux zéros et pôles communs », par G. Frank, X. Hua et R. Vaillancourt.]

Une autre raison du succès de ce colloque était le climat d'amitié autour de Paul Koosis. Paul a eu une carrière atypique, mais qui l'a amené en des endroits divers où il a imprimé une trace. Nirenberg l'a guidé au Courant Institute juste après sa thèse. Je l'ai connu quand il a décidé de passer l'année 1957-58 avec sa bourse Fulbright à Montpellier où j'étais professeur, et où il a eu l'occasion de rencontrer Yitchak Katznelson et d'assister à l'éclosion de sa thèse. Puis il a pris un poste d'enseignement à Paris, au-dessous de son niveau de qualification, juste parce qu'il se trouvait bien en France, et qu'il commençait à être fasciné par le théorème de Beurling et Malliavin. Quand j'ai été nommé à Orsay en 1961, rejoignant Deny, Delange, Lesieur et Malgrange, il n'était pas encore question d'une activité scientifique propre en mathématiques : tout se passait à l'Institut Henri Poincaré. C'est Koosis qui a lancé l'idée d'un séminaire d'analyse avec nos ressources locales. Le séminaire a été un succès et s'est ensuite spécialisé en analyse harmonique, avec rapidement des surges en topologie et en algèbre.

C'est à UCLA qu'il a commencé sa carrière de professeur, et il a eu là Garnett comme collègue et Peter Jones comme étudiant. Après des années d'errance c'était l'établissement rêvé. Pour d'autres sans doute mais non pour lui. Outre la France et le français, il s'était pris d'amour pour la Suède et le suédois, et pour Montréal et les Laurentides où il travaillait mieux qu'ailleurs, beaucoup mieux qu'à Los Angeles qu'il appelait méchamment « Disneyland on the sea ». Il s'est donc installé à Montréal avec un modeste gagnepain à Mc Gill. Il y a attiré des élèves et des collaborateurs, surtout parmi les Russes émigrés et les Russes en activité dans leur pays, dont le modèle est Victor Havin. Il y a beaucoup et très bien travaillé, et il est en pleine forme intellectuelle à l'âge de 75 ans.

Il chante et joue du clavecin (moins que naguère), il lit beaucoup, il se passionne pour des auteurs (on dit auteures à Montréal) comme la canadienne Gabrielle Roy et l'allemande Christa Wolf, à côté de Shakespeare, Goethe et Heine. Une conversation avec lui est un bain de jouvence et de culture.

Il n'aime pas beaucoup voyager. Je ne sais quand nous le reverrons en France. Mais il écrit de merveilleuses lettres, et tous les mathématiciens, s'ils le désirent, peuvent faire ou entretenir sa connaissance en lisant ses livres. Je reviens aux leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin. Il serait dommage de les laisser dormir sur les rayons d'une bibliothèque, et plus dommage encore de ne pas les

trouver sur les rayons.

[Koosis et le français :

« De nos jours on se sent presque obligé d'expliquer pourquoi on a voulu faire paraître un livre de mathématiques en français. Je ne veux pas m'étendre ici sur mes raisons—multiples—pour cela. Qu'il suffise simplement que j'évoque le fort attachement que j'ai depuis très longtemps pour cette langue, bien que ne la connaissant qu'imparfaitement. » ]

[Koosis et l'écriture :

Quand Koosis aime quelque chose, il l'écrit. Ainsi, le 25 février dernier, Nazarov a donné à l'université Mc Gill une démonstration toute nouvelle du « théorème des multiplicateurs » de Beurling et Malliavin, qui est la clé de leur théorie. Koosis l'a rédigée immédiatement, et me l'a adressée le 4 mars. La construction de Nazarov est très belle, et l'écriture de Koosis l'est aussi ; c'est double plaisir que de lire de belles pages manuscrites exposant un beau sujet.]

### Références

- Koosis, P. — *Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin*, Montréal, Les Publications CRM, 1996, 230 pages.  
Beurling, A. — *Collected Works*, 2 volumes, Birkhäuser 1989.  
Cartan, H. — *Œuvres*, 3 volumes, Springer 1979.

---

## Andreï Bolibroukh, un mathématicien, un ami

Claude Mitschi & Claude Sabbah

---

*Andreï Bolibroukh est décédé le 11 novembre 2003 à l'hôpital de la Pitié-Salpêtrière à Paris. Il avait 53 ans. Nous voulons évoquer ici sa personnalité et ses travaux, en mettant l'accent sur ses rapports avec la France, où il passait plusieurs mois par an depuis près de dix ans.*

### **Le nom**

Plusieurs translittérations du nom Болибрух existent : Bolibrukh pour les anglophones, Bolibruch pour les germanophones et Bolibroukh pour les francophones. C'est cette dernière que nous utiliserons dans la suite.



### **L'ami**

Il n'est pas possible d'évoquer la mémoire d'Andreï sans d'abord présenter sa personnalité chaleureuse, riche, ouverte. Pour nombre de ses collègues, il était avant tout un ami. Aussi commencerons-nous par quelques témoignages.

Gentillesse et disponibilité sont des traits essentiels de son caractère ; toujours attentif aux recherches de ses interlocuteurs et prêt à en discuter ; ainsi se le remémorent Werner Balsler (Ulm), Antoine Douai, Philippe Maisonobe et Michel Merle (Nice), Hélène Esnault (Essen), Alexei Glutsyuk (Lyon), Marta Mazzocco (Cambridge), Sergeï Slavyanov (St-Petersbourg) et bien d'autres.

**cs** : Andreï avait sa manière bien à lui d'établir un contact. Je frappe à la porte de son bureau, « *Entrez, je vous prie !* », j'ouvre : « *Claude, tu sais, j'ai démontré...* » ou bien « *Claude, il faut terminer le rapport...* » ou aussi « *Claude, je suis très content de Stéphane...* ». L'interlocuteur, directement interpellé par son prénom, est d'emblée mis à l'aise, les distances sont abolies, l'échange peut avoir lieu sans complexes. Ceci me permettait aussi de sourire intérieurement de ses petites fautes de français, une langue qu'il avait appris très rapidement à maîtriser et qu'il maniait avec une grande dextérité ; mais il remplaçait « *c'est pourquoi* » par « *c'est parce que* », renversant ainsi à son insu le sens de l'implication.

**cm** : Cette attention aux autres, Andreï l'annonçait d'entrée de jeu : au téléphone, même à l'hôpital un jour difficile, il décrochait avec un courtois et inimitable « *Je vous écoute !* ». Il ne laissait pas la conversation s'attarder sur sa personne, et son optimisme résolu évacuait rapidement les questions touchant à sa santé. Il préférait alors parler de ce qui se partage : les projets mathématiques, l'avenir de nos jeunes, un nouveau théorème...

L'un de ses anciens étudiants en thèse, Stéphane Malek, parle de « *la grande disponibilité et la grande générosité d'Andreï à l'égard de ses étudiants de thèse*

*aussi bien à Moscou qu'en France, bien qu'occupant de hautes responsabilités à l'Institut Steklov* », et se souvient de la précision avec laquelle il organisait jusque dans les moindres détails ses voyages à Moscou.

**cm** : En dehors de ses heures de cours, Andreï était d'une disponibilité rare, toujours prêt à interrompre son travail pour vous recevoir. Il avait sa façon bien à lui de répéter : « *Je comprends... j'ai compris...* » et de vous encourager. Sa patience et sa gentillesse incitaient chacun, collègue ou étudiant, à frapper à sa porte.

« *On pourrait caractériser la personnalité d'Andreï par un ensemble de mots commençant (en russe, évidemment) par le préfixe « bon » : c'était une personne bienveillante, de bonne foi et aussi très soigneuse. Il était toujours scrupuleusement responsable* » (Vladimir Roubtsov, Angers).

Cette ouverture et ce sens des responsabilités ne concernaient pas seulement le domaine mathématique, ou plus généralement universitaire.

« *Ce qui marquait chez Andreï : un contact chaleureux qui engageait tout de suite à la conversation. On parlait maths facilement, mais de tout autre chose aussi. Il passait facilement du travail à la détente et vice-versa. L'un des très bons moments dont je me souviens est une pause que nous avons faite en allant visiter le château de Brissac ; il y avait là, exceptionnellement, un stand de tir à l'arc et nous avons passé un grand moment à tirer à l'arc puis nous sommes rentrés travailler...* » (Michèle Loday, Angers).

« *Il était quelqu'un avec qui l'on pouvait parler de toute chose — politique, vie quotidienne, l'avenir du monde ou mathématiques — avec légèreté. Car il était à la fois intelligent, doté de bon sens, d'humour et d'une éthique très humaine. À chacune de mes rencontres avec lui, il avait des choses intéressantes à raconter. L'entretien avec lui était toujours agréable. Il pouvait comprendre les gens et leurs rapports (pas toujours faciles) avec bienveillance, comprendre la vie et ses situations parfois difficiles* » (Vladimir Kostov, Nice).

« *I first met Andrey Bolibrukh in 1995 in Groningen, The Netherlands, in a conference devoted to the Stokes phenomenon, although of course I had heard his name long before. That meeting was the beginning of our friendship and scientific collaboration which both have lasted up to Andrey's death. I consider myself exceptionally fortunate for having had this fantastic opportunity to work with a person of such calibre as Andrey Bolibrukh. Indeed, our collaboration had an enormous impact on all my mathematical views and priorities. [...] It is of course very subjective, but to me Andrey has always been one of the representatives of that extremely rare type of an exceptionally well educated and simultaneously very kind, gentle, and considerate person. In Russia, we used to attribute these qualities to the "old Russian intelligentsia". There are still people of this type, but mostly among older generations. It is almost impossible to find them already among our generation (of those who were born some thirty odd years after 1917). Andrey Bolibrukh was one of these exceptional cases* » (Alexander Its, Indiana University).

### Le problème de Riemann-Hilbert



C'est en donnant une réponse négative au problème de Riemann-Hilbert (R-H), longtemps considéré comme résolu par Plemelj en 1908, qu'Andreï s'est fait connaître de la communauté mathématique internationale.

Le 21<sup>e</sup> problème de Hilbert pose la question de savoir si toute famille  $M_1, \dots, M_p$  de matrices complexes inversibles de taille  $d$  peut être réalisée comme la représentation de monodromie d'un système différentiel du type de Fuchs portant sur un vecteur inconnu  $v(z)$  de taille  $d$ , c'est-à-dire de la forme

$$(F) \quad v'(z) = \left( \frac{A_1}{z-a_1} + \dots + \frac{A_p}{z-a_p} \right) \cdot v(z),$$

pour certains nombres complexes deux à deux distincts  $a_1, \dots, a_p$  — que l'on appelle *points singuliers du système* — et certaines matrices complexes  $A_1, \dots, A_p$  de taille  $d$ , à déterminer. Les solutions  $v(z)$  sont en général holomorphes multiformes sur  $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_p\}$  et, si  $u_j(z)$  est une détermination locale de  $v$  près d'un point singulier  $a_j$ , les autres déterminations locales s'obtiennent par les formules  $M_j u_j(z), M_j^2 u_j(z), \dots$ . Par exemple,

– si  $\alpha$  est un nombre complexe, s'il y a un seul point singulier  $a_1 = 0$  et si  $d = 1$ , la matrice  $M_1 = \exp 2i\pi\alpha$  est la monodromie de l'équation  $v'(z) = (\alpha/z)v(z)$ , de solution  $z^\alpha$  ;

– toujours avec un seul point singulier mais  $d = 2$ , la matrice  $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2i\pi & 1 \end{pmatrix}$  est la monodromie à l'origine du système donné par  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Dans ce problème, il convient de considérer le point à l'infini comme un point singulier possible, et de lui attribuer la matrice  $M_\infty = (M_1 \cdots M_p)^{-1}$ .

Revenons un peu sur l'histoire de ce problème, qui est amplement détaillée dans le livre [22].

L'énoncé de Hilbert « *zu zeigen, daß es stets eine lineare Differentialgleichung des Fuchsschen Klasse mit gegebenen singulären Stellen und einer gegebenen Monodromiegruppe gibt* » reprenait, mais en précisant une localisation des singularités, un problème plus ancien de Riemann (vers 1850) qui demandait de reconstruire une équation différentielle fuchsienne à partir de son groupe de monodromie.

Or l'argument invoqué par Plemelj est insuffisant. En 1954 Gantmacher trouve bien un contre-exemple à un résultat de Birkhoff de 1913 (qui reprenait et « clarifiait » la solution de Plemelj) mais n'en tire aucune conséquence. C'est en 1978-79 seulement, à Paris dans le cadre du séminaire « Mathématique et Physique » de l'ENS (exposés publiés en 1983 [21]) qu'Armando Treibich corrige le résultat de Plemelj, en montrant que celui-ci tient la route à condition de supposer l'une des matrices de monodromie  $M_1, \dots, M_p, M_\infty$  diagonalisable. En 1988, Arnold et Ilyashenko apportent à leur tour des éclaircissements.

Par ailleurs, en 1934, Lappo-Danilevskii avait donné une solution du problème lorsque toutes les matrices  $M_j$  sont proches de l'identité. D'autres mathématiciens

ont aussi donné leurs démonstrations, qui concernent en général le problème posé pour les singularités régulières plutôt que fuchsien.

En 1989, Andreï met fin aux incertitudes en apportant des contre-exemples : une représentation de dimension 4 (pour trois singularités données) ne pouvant être réalisée par aucun système différentiel linéaire fuchsien d'ordre 3, ou encore un système d'ordre 3 admettant cinq singularités régulières dont une non fuchsienne, et dont la représentation de monodromie ne peut être réalisée par aucun système à pôles simples. Il cherche ensuite à préciser la nature de ces exemples, en montrant

- d'une part qu'une solution du problème de Riemann-Hilbert existe lorsque la représentation de monodromie est *irréductible*, c'est-à-dire lorsqu'il n'existe pas de sous-espace non trivial invariant par toutes les matrices  $M_j$  (ceci a aussi été montré par V. Kostov),

- d'autre part que, pour tous  $p \geq 3$  et  $d \geq 3$ , et tout choix de points  $a_1, \dots, a_p$ , il existe une représentation (réductible) qui n'est pas réalisable par un système du type de Fuchs.

Plutôt que de détailler ces résultats, pour lesquels nous renvoyons aux deux excellentes monographies [1] et [7] ainsi qu'à l'exposé ICM [8] d'Andreï ou à l'exposé Bourbaki d'A. Beauville [3], nous voudrions mettre en évidence quelques phénomènes intéressants révélés par Andreï.

D'abord, pour une représentation (réductible) donnée, l'existence ou non d'une solution du problème de R-H dépend de la position des points singuliers. Plus précisément, il existe, dans tout voisinage d'une position ne donnant pas lieu à une solution, une position donnant lieu à une solution. La manière dont elle dépend des matrices  $M_j$  a été étudiée par V. Kostov.

Si les matrices  $M_j$  sont toutes triangulaires (supérieures par exemple), c'est-à-dire si la représentation est extension de représentations de dimension 1, Juliette Vandamme, étudiante d'Andreï à Nice, a pu classer les premiers exemples « non réalisables », qui se produisent pour  $d \geq 6$ .

D'autre part, la condition d'irréductibilité (ou de semi-simplicité) de la représentation de monodromie est naturelle : par exemple, en géométrie algébrique, la construction de l'espace des modules des représentations du groupe fondamental de  $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_p\}$  identifie toute représentation à sa semi-simplifiée.

La géométrie algébrique permet de poser le problème de R-H dans une perspective plus générale. L'extension de celui-ci aux surfaces de Riemann compactes autres que la sphère de Riemann a longtemps donné lieu à des formulations trop directement inspirées du problème original : « sur une surface de genre  $g$ , trouver le nombre minimum de points singuliers apparents nécessaires pour obtenir une solution du problème de R-H ». H. Esnault et E. Viehweg [17] ont ainsi reformulé le problème de R-H sous la forme suivante : étant donnée une représentation  $\rho$  du groupe fondamental d'une surface de Riemann compacte privée d'un nombre fini de points, existe-t-il sur cette surface compacte un fibré holomorphe *semi-stable de degré 0* muni d'une connexion à pôles logarithmiques, dont la représentation de monodromie associée soit  $\rho$ ? (Sur la sphère de Riemann, « semi-stable de degré 0 » signifie « trivial ».) Ils ont montré que ce problème a une solution lorsque la représentation  $\rho$  est irréductible, en utilisant les mêmes outils qu'Andreï (dans une présentation proposée par O. Gabber). Dans [16], on trouve des exemples ne donnant pas lieu à une solution lorsque la représentation est réductible.

Ceci a suggéré à Andreï [14] l'idée de remplacer la condition d'irréductibilité par une autre, plus propice à l'étude des espaces de modules : celle de l'existence d'un fibré sur lequel la connexion à pôles logarithmiques est *stable* au sens de Carlos Simpson, et donne lieu à la représentation de monodromie  $\rho$ . Cette notion de stabilité a permis à Stéphane Malek de donner une condition suffisante pour qu'une extension de systèmes admettant chacun une solution du problème de R-H en admette une elle-même (ce n'est pas toujours le cas, comme le montre le cas « triangulaire » évoqué plus haut).

**cs** : Nous avons aussi le projet de tenter de comprendre les aspects métriques du problème de R-H, motivés par les travaux de C. Simpson [20] concernant l'existence, sous la condition de stabilité ci-dessus, d'une métrique harmonique ayant un comportement modéré aux singularités.

Si Andreï a vite compris l'intérêt de certains concepts de la géométrie algébrique, il est resté fidèle aux méthodes analytiques, raisonnant — souvent de manière fulgurante — sur les solutions fondamentales plutôt que sur les systèmes d'équations ou les fibrés à connexion. Il a rénové l'usage de la « filtration de Levelt ».

« *J'ai deux raisons au moins de lui être reconnaissant. D'abord, il a fait de la publicité pour ma thèse (Amsterdam, 1961). Sans lui les « exposants » introduits dans celle-ci seraient tombés dans l'oubli. Dans son livre avec Anosov il leur consacre une vingtaine de pages. Ça m'a donné beaucoup de satisfaction. Deuxièmement il m'avait fait l'honneur d'un bel exposé lors de la conférence pour mon départ à la retraite en janvier 1997* » (Ton Levelt, Nijmegen).

Le travail d'Andreï sur les inégalités de Fuchs pour les exposants de Levelt a sans doute été à l'origine de ses résultats sur le problème de R-H. Diverses généralisations en ont été obtenues par Eduardo Corel dans sa thèse, sous la direction de Daniel Bertrand et Claude Mitschi, et avec les conseils d'Andreï.

**cm** : Lors de nos dernières rencontres avant sa maladie, nous avons également travaillé, Andreï, Stéphane Malek et moi-même, sur une formulation généralisée de R-H, pour des singularités éventuellement irrégulières.

### **Le problème de Birkhoff**

C'est un petit frère du problème de Riemann-Hilbert : considérons le système

$$v'(z) = \frac{A(z)}{z^r} \cdot v(z),$$

où  $A(z)$  est une matrice de fonctions holomorphes au voisinage de  $z = 0$  et  $r$  est un entier  $\geq 1$  (on suppose que  $A(0) \neq 0$ ). Est-il possible, par un changement de base  $u(z) = P(z)v(z)$  ( $P$  holomorphe inversible au voisinage de l'origine), de mettre le système sous la forme plus simple

$$(B) \quad u'(z) = \left( \frac{B_r}{z^r} + \dots + \frac{B_1}{z} \right) \cdot u(z),$$

appelée « forme normale de Birkhoff » (on dit aussi « forme standard de Birkhoff »), où les matrices  $B_i$  sont constantes? On connaît depuis longtemps des exemples où la réponse est négative.

« *The first time I met Andrey was when Don Lutz was here in Ulm and mentioned that he had met this Russian colleague before (I think, perhaps in Essen when he visited Reinhard [Schäfer]). Andrey at this time stayed in Bonn at MPI,*

and I invited him to Ulm. Somehow we immediately became friends, and I was, in particular, impressed by Andrey's work concerning the Riemann Hilbert problem. I told him that I had recently written two articles concerning Birkhoff reduction in dimension three, one showing that with analytic transformations one can achieve reduction for irreducible equations, while for others one still can do it with help of meromorphic transformations. Not long after this, Andrey then showed that irreducible equations can always be transformed into Birkhoff normal form by means of analytic transformations. His proof is so simple that I was always asking myself why I had not succeeded in obtaining this result, but this just shows how much of an expert he was in this field » (W. Balsler).

Et pour cause : le même raisonnement que pour le problème de Riemann-Hilbert s'applique au problème de Birkhoff, si on interprète ce dernier convenablement [6, 9, 5].

**cs** : Fort de son expérience sur Riemann-Hilbert, Andreï a tenté de comprendre, notamment en collaboration avec W. Balsler [2, 11], la raison de l'existence d'exemples « négatifs », en analysant en dimension 4 et 5 (taille des matrices) l'effet d'une transformation méromorphe. À de nombreuses reprises, mais sans succès je crois, il a essayé d'étendre ces résultats en toute dimension.

### **Les déformations isomonodromiques**

Comment se fait-il que l'erreur de Plemelj soit passée si longtemps inaperçue ? Sans doute parce que la solution du 21<sup>e</sup> problème de Hilbert n'avait pas eu d'application sérieuse. À quoi peut-il servir, en effet, de résoudre ce problème ? Quelle importance cela a-t-il dans d'autres domaines des mathématiques ?

« *It should be emphasized that the importance of the question goes beyond its abstract formulation. Indeed, the Fuchsian inverse monodromy problem is one of the principal examples (historically the first one) of the vast range of the inverse monodromy and spectral problems which form what is now known as the Riemann-Hilbert approach in the theory of integrable systems. Having been one of the top authorities in the quite abstract theory of holomorphic vector bundles, Andrey, simultaneously, could amazingly easily interact with the mathematical physics community, especially in the area of integrable systems. His last masterpieces on the Birkhoff normal form and isomonodromic deformations belong equally to both fields, mathematical physics and pure mathematics* » (A. Its).

Ainsi, il est important de concevoir le problème de R-H non seulement de manière « statique », mais aussi d'un point de vue dynamique, dans le cadre des déformations isomonodromiques. C'est ce que n'a pas tardé à faire Andreï.

Étant donné un système (F) avec  $a_1^o, \dots, a_p^o$  pour points singuliers et  $A_1^o, \dots, A_p^o$  pour matrices résidus correspondantes, existe-t-il, pour tout choix  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)$  de points distincts dans  $\mathbb{C}$ , des matrices  $A_1(\mathbf{a}), \dots, A_p(\mathbf{a})$  dépendant de manière holomorphe (en général multiforme) de  $\mathbf{a}$ , telles que  $A_j(\mathbf{a}^o) = A_j^o$  pour tout  $j$ , de sorte que, pour tout  $\mathbf{a}$ , le système (F) de points singuliers  $\mathbf{a}$  et de matrices  $A_1(\mathbf{a}), \dots, A_p(\mathbf{a})$  ait une représentation de monodromie constante ? Cette contrainte, appelée « isomonodromie », se traduit par un système différentiel non linéaire sur les matrices  $A_1(\mathbf{a}), \dots, A_p(\mathbf{a})$  dépendant des variables  $\mathbf{a}$ , appelé « système de Schlesinger », dont certains cas particuliers ont été beaucoup étudiés, en liaison avec les équations de Painlevé notamment, ou les systèmes intégrables.

Il est connu (voir notamment [19]) que la réponse à cette question, analogue en famille du problème R-H, est positive sur un ouvert dense de l'espace des  $\mathbf{a}$  contenant le point  $\mathbf{a}^\circ$ . Que se passe-t-il à la frontière de cet ouvert ? Andreï garde toujours un point de vue géométrique sur cette question : « *In this work we follow the geometrical approach to the Schlesinger equation, which is due to B. Malgrange* » écrit Andreï au début de son article [12], et il renvoie à [18] et [19]. Étant donnée une représentation de monodromie *irréductible*, réalisée par un système de type (F), Andreï a pu appliquer les méthodes développées pour le problème de R-H afin d'analyser le comportement des matrices  $A_j(\mathbf{a})$  au voisinage de la frontière du domaine de définition ou au voisinage des ensembles de confluence, où les  $a_j$  ne sont plus distincts.

### **Les jeunes années**

Andreï a écrit, dans le volume « Mathematics in St. Petersburg », un article de souvenirs [10] relatant sa formation au lycée-internat n° 45. D'autres informations sont données dans [22, p. 367-369].

Andreï Andreevitch Bolibroukh est né le 30 janvier 1950 à Moscou, cent ans après Sofia Kovalevskaïa dont il a organisé la célébration du cent-cinquantième, le 15 janvier 2000. Sa mère aimait les mathématiques, tout comme son père, militaire et héros de guerre ; en raison de la guerre aucun d'eux n'a pu suivre des études. Andreï garde le souvenir d'une enfance heureuse : voyages en famille, camping, parties de pêche avec son père, vie au grand air, camps scouts (pionniers) l'été. C'est l'époque du dégel (sous Krouchtchev) qu'il décrit en ces termes : « *Of course, I could not understand things concerning the political or economic situation in the country... but it was, or may have been, the best period of the Soviet Union. I think the atmosphere of the (relative) prosperity of the country influenced positively the whole life at that time.* »

Premier aux Olympiades de Kaliningrad, second aux Olympiades nationales (ex aequo avec A. Suslin et I. Krichever) il est admis d'office au très sélectif lycée-internat spécialisé (en math et physique) numéro 45 de Leningrad. Plusieurs tels lycées furent créés dans les années soixante à l'initiative de Lavrentev et Kolmogorov, à une époque d'euphorie technologique — celle des spoutniks — où l'Union Soviétique cherchait à détecter de jeunes talents pour les diriger vers les études scientifiques. Ce système a produit des mathématiciens de renom ; trois anciens du lycée 45 sont arrivés à Strasbourg dans les années 90 (Viatcheslav Kharlamov, Vladimir Touraev, puis Andreï Bolibroukh).

Sa formation au lycée 45 : les mathématiques et la physique bien sûr, mais aussi la peinture (visites hebdomadaires à l'Ermitage où il découvre les Impressionnistes et Picasso), la musique et surtout la poésie et le théâtre grâce à la circulation et aux représentations d'œuvres « underground ». Les veillées littéraires, auxquelles participent des artistes connus (non officiels), se prolongent souvent par des discussions animées, sur des thèmes aussi variés que la poésie soviétique ou la guerre d'Algérie...

**cm** : La poésie est restée, toute sa vie, le jardin secret d'Andreï. Très tôt il avait lu en traduction russe de nombreux poètes français et il aimait tout particulièrement Queneau. Il était aussi féru de poésie ancienne chinoise, ce qui impressionna beaucoup un collègue de Pékin, érudit lui aussi, en visite à Strasbourg.

En 1967 Andreï entre à l'université de Moscou où il poursuit ses études jusqu'à la thèse en 1977, sous la direction de Postnikov et Chernavskii. Les enseignants d'alors s'appellent Kolmogorov, Alexandrov, Arnold, Novikov, Sinaï, Anosov, Manin...

« *Ma première rencontre avec Andreï m'a beaucoup marqué. À l'automne 1972 j'étais étudiant de troisième année au département de Géométrie Différentielle de la Faculté « Mech-Math » de l'Université de Moscou (c'est-à-dire un débutant cherchant sa voie). Comme tous les étudiants et les thésards du département (ainsi que les collègues du département de Topologie et de Géométrie Supérieure) j'ai assisté au Séminaire des doctorants sur les travaux de D. Sullivan — un sujet très à la mode à l'époque et très dur pour un novice. Je ne comprenais presque rien. Un seul thésard, qui arrivait toujours en avance, a spontanément proposé de discuter avec moi du contenu de l'exposé précédent, c'était Andreï. Cette attitude contrastait avec celle des autres thésards qui regardaient d'un peu haut les jeunes étudiants. Bien sûr, dans nos discussions, c'est lui la plupart du temps qui avait des choses à m'expliquer* » (V. Roubtsov).

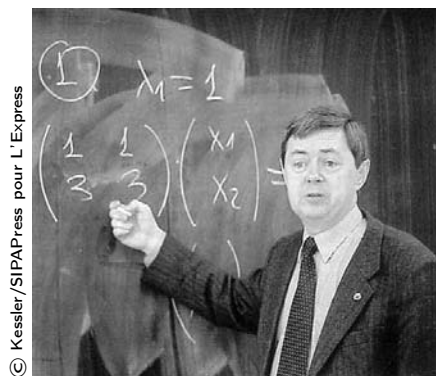
### Andreï et la France

« *Andreï Bolibroukh est venu pour la première fois à Nice exposer ses travaux sur le problème de Riemann-Hilbert au cours de l'année 1991-92. Il est revenu ensuite tous les ans jusqu'en 96-97 pour des périodes d'un mois (les deux premières années) et de trois mois (poste PAST) les années suivantes. Il a participé à la vie du laboratoire : cours de 3<sup>e</sup> cycle, encadrement de la thèse de Juliette Vandamme. C'est pendant ce séjour que le projet d'une coopération européenne INTAS a été envisagé pour la première fois. Il a aussi été rapporteur de l'habilitation de V. Kostov en 1998* » (Ph. Maisonobe et M. Merle).

Andreï a occupé un poste de PAST à Strasbourg de 1997 jusqu'à son décès. Lors de ses séjours à Strasbourg, il était aussi actif en recherche qu'en enseignement et en co-organisation des activités de l'équipe « Équations fonctionnelles » : cours sur les équations différentielles en licence et magistère, cours de DEA sur le problème de Riemann-Hilbert et les déformations isomonodromiques ; co-organisateur, très efficace, de trois colloques (un « atelier » pour doctorants qui a attiré de nombreux jeunes de l'étranger en 1999, un colloque à la mémoire de Raymond Gérard en 2000 et le dernier en l'honneur de Jean Thomann en 2002).

**cm** : En proposant la candidature d'Andreï à un poste PAST, j'avais, devant l'inquiétude habituelle des collègues, attesté sa parfaite maîtrise du français, faisant toute confiance à Raymond Gérard qui le connaissait mieux.

Avec l'accord d'Andreï, je me suis donc permis d'assister à la première séance de son cours de DEA, que j'ai évidemment suivi jusqu'au bout, tant il était passionnant. Je me souviens comme il savait valoriser les questions les plus simples et, à travers elles, ceux ou celles qui les posaient. Tout cela, bien sûr, sans le moindre problème de langue. Il fallait seulement s'habituer à sa façon bien russe d'écrire les indices à la hauteur des exposants...



© Kessler/SIPAPress pour L'Express

Lors de son dernier séjour à Strasbourg il a, avec Benjamin Enriquez, mis la dernière main à un projet PICS de collaboration franco-russe qui lui tenait très à cœur et qui a démarré en mai 2003.

*« Andreï avait à cœur non seulement les liens franco-russes, mais aussi franco-français (Strasbourg-Paris) : il a énormément insisté pour que le PICS ait un nœud parisien »* (Daniel Bertrand, Paris).

Il faut aussi rappeler que, pendant le même temps, Andreï a occupé plusieurs postes de responsabilité, aussi bien à Moscou (Académie des sciences, Institut Steklov, Société Mathématique de Moscou) qu'au sein de l'Union mathématique internationale ou du Conseil scientifique du Centre Banach à Varsovie, faisant preuve d'un talent d'organisateur très apprécié.

*« Dans ma conscience, Andreï restera toujours un créateur, et non un contemplateur. Je voudrais le comparer à certains diplomates : tout en restant inconnus, ils préparent patiemment, en utilisant des ressources intellectuelles énormes, la fin d'une guerre sanglante.*

*Andreï a été profondément affecté par l'éclatement de la communauté mathématique ex-soviétique en groupes politiquement engagés — une chose, à mon avis, inévitable et très naturelle dans la société instable de la période de passage, dite « perestroïka ».*

*Mais pour Andreï, c'était une peine personnelle et il est devenu l'un des initiateurs et des organisateurs d'un Colloque « unification ». Son espoir était de rassembler et de réunir (sur une base scientifique) tous les grands noms des mathématiques ex-soviétiques à l'occasion d'une Conférence consacrée au 90<sup>e</sup> anniversaire de L. Pontriaguine — une figure scientifique aussi grande que controversée.*

*Andreï a fourni un travail d'Hercule pour un résultat de Sisyphe mais j'ai bien compris que, pour lui, il était indispensable de tenter cette « unification ». Je ne voudrais pas dire qu'Andreï ait été aussi naïf — tout simplement, il avait mal vécu cette situation et n'a pas pu renoncer à cette tentative »* (V. Roubtsov).

Tout en dirigeant et en « gérant » l'Institut Steklov de Moscou jusque dans les menues besognes, Andreï trouvait le temps de se consacrer avec enthousiasme à l'enseignement, mais aussi à la vulgarisation scientifique qui lui tenait tant à cœur. Il prenait volontiers son bâton de pèlerin pour aller à la rencontre de lycéens, de professeurs d'école ou de lycée auxquels il apportait la bonne parole mathématique dans l'espoir d'attirer davantage de jeunes vers cette discipline — dont les perspectives peu lucratives séduisent moins, en ce moment, la jeune génération russe. Andreï était heureux d'avoir, en janvier 2000, réussi à rassembler dans le théâtre de Velikiye-Luki quatre cents personnes venues écouter sa conférence sur S. Kovalevskaïa : *« Je ne leur ai parlé ni de Bourse ni de business, et pourtant ils m'ont suivi avec intérêt. À la fin de l'exposé, certains sont venus me dire que je leur avais apporté un peu d'air frais dans l'ambiance actuelle »* confiait-il quelques jours plus tard au journaliste de l'hebdomadaire l'Express venu l'interviewer à Strasbourg (propos parus dans l'article intitulé « Petit creux dans la bosse des maths » en mars 2000).

Son efficacité s'est illustrée, en France, par la manière dont il a su mettre en place un programme de travail franco-hispano-russe dans le cadre d'un projet INTAS.

« *Andreï a beaucoup aidé à l'établissement d'autres projets INTAS. Par exemple, j'ai bien profité de ses conseils dans l'organisation d'un accord INTAS-RFBR « Nombres transcendants » en 1999–2001.*

*Il a aussi été le maître d'œuvre de la partie mathématique de l'accord de coopération entre l'Académie des Sciences de Russie et l'Université de Paris 6, qui a débuté en 2001, regroupant la théorie des nombres et l'analyse algébrique. Cela met en valeur un côté typique d'Andreï : rassembler les chercheurs non seulement à travers les frontières géographiques, mais aussi — et surtout — à travers les sujets de recherche. Nous avons ainsi le projet d'appliquer son extension à plusieurs variables [4, 13] de l'inégalité de Fuchs à la mise en place de lemmes de zéros multidimensionnels pour la transcendance.* » (D. Bertrand).

Enfin, après la création d'un laboratoire CNRS à Moscou, il est devenu l'interlocuteur privilégié de Christian Peskine à Moscou.

« *Notre dernière rencontre — nous avons déjeuné ensemble au CNRS — remonte au printemps dernier. Le matin même, Andreï était sorti de l'hôpital. Il discutait déjà de nouveaux projets, de nouvelles idées. C'était une belle journée ensoleillée et nous avons longuement parlé d'un projet de nouveau laboratoire européen de mathématiques à Moscou* » (C. Peskine).

Venu tenter un traitement à Paris en septembre 2003, il a été soutenu sans relâche par sa femme Nina, ainsi que par Viatcheslav et Sonia Kharlamov, et a reçu la visite de plusieurs collègues et amis, à qui il tâchait d'expliquer ses derniers travaux mathématiques, mais parlait aussi d'un recueil de souvenirs qu'il avait commencé à écrire.

« *La dernière fois que j'ai parlé maths avec lui, Andreï me demandait des précisions sur ce dernier travail de Corel. Cette marque d'intérêt, alors qu'il était déjà si faible, m'a beaucoup ému* » (D. Bertrand).

« *Comme j'allais à Paris, je suis passé le voir ; je l'ai trouvé en une grande forme, ce qui m'a surpris, plein d'énergie et de projets. Lors de ma visite, une infirmière est cependant venue apporter le résultat d'analyses ; c'était très mauvais mais, sur le moment, il n'en a pas paru affecté (peut-être ne voulait-il pas le montrer). Il se trouve qu'en fait, je l'ai vu un des tout derniers jours où il a été bien* » (Bernard Malgrange, Grenoble).

**cm** : Andreï m'a appelée le lendemain, très optimiste encore, heureux surtout d'avoir, dans la nuit, démontré un théorème à la suite de sa conversation avec Bernard Malgrange. Deux jours plus tard, il entra en réanimation.

« *Un autre trait que je voudrais mentionner : son sens des responsabilités. Étant déjà gravement malade, il m'a fait part à Moscou de sa préoccupation au sujet des tâches administratives qui l'attendaient à l'Institut Steklov. Même lors de notre*

*dernière rencontre au service de réanimation de l'hôpital de la Pitié, il était inquiet pour ses étudiants et thésards de Moscou... » (V. Roubtsov).*

**cs** : Jusqu'au dernier moment, il a gardé intactes ses capacités d'organisation : « *Claude, je dois tenir quinze jours pour pouvoir tenter une greffe...* ».

**cm** : Même dans un état de grande faiblesse, jusqu'au bout, Andreï oubliait sa maladie et retrouvait le sourire dès qu'on lui parlait de mathématiques.

Strasbourg, le 30 janvier 2004.



## Références

- [1] D.V. ANOSOV & A.A. BOLIBRUCH – *The Riemann-Hilbert problem*, Aspects of mathematics, vol. 22, Vieweg, 1994.
- [2] W. BALSER & A.A. BOLIBRUCH – « Transformation of reducible equations to Birkhoff standard form », Ulmer Seminare – Funktionalanalysis und Differentialgleichungen, Universität Ulm, 1997.
- [3] A. BEAUVILLE – « Monodromie des systèmes différentiels linéaires à pôles simples sur la sphère de Riemann (d'après A. Bolibruch) », in *Séminaire Bourbaki*, Astérisque, vol. 216, Société Mathématique de France, 1993, p. 103–119.
- [4] A.A. BOLIBRUCH – « Pfaffian systems of Fuchs type », *Uspehi Mat. Nauk* **32** (1977), p. 203–204.
- [5] ———, « On an analytic transformation to the standard Birkhoff form », *Proc. Steklov Inst. Math.* **203** (1994), p. 33–40.
- [6] ———, « On analytic transformation to Birkhoff standard form », *Russ. Acad. Sci. Dokl.* **49** (1994), p. 150–153.
- [7] ———, *The 21st Hilbert problem for linear Fuchsian systems*, Proceedings of the Steklov Inst. of Mathematics, vol. 206, American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
- [8] ———, « The Riemann-Hilbert problem and Fuchsian differential equations on the Riemann sphere », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, Birkhäuser, Basel, 1995, p. 1159–1168.
- [9] ———, « On the Birkhoff standard form of linear systems of ODE », in *Mathematics in St. Petersburg*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 174, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996, p. 169–179.
- [10] ———, « Some memories of Boarding School #45 », in *Mathematics in St. Petersburg*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 174, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996, traduit du russe par A. Sossinsky, p. 1–5.
- [11] ———, « Meromorphic transformation to the Birkhoff standard form in small dimensions », *Proc. Steklov Inst. Math.* **225** (1999), p. 78–86.
- [12] ———, « On orders of movable poles of the Schlesinger equation », *J. Dynam. Control Systems* **6** (2000), no. 1, p. 57–74.
- [13] ———, « The Fuchs inequality on a compact Kähler manifold », *Dokl. Akad. Nauk* **380** (2001), no. 4, p. 448–451.
- [14] ———, « The Riemann-Hilbert Problem on a compact Riemannian surface », *Proc. Steklov Inst. Math.* **238** (2002), p. 55–69.
- [15] L. BOUTET DE MONVEL, A. DOUADY & J.-L. VERDIER (éds.) – *Séminaire E.N.S. Mathématique et Physique*, Progress in Math., vol. 37, Birkhäuser, Basel, Boston, 1983.
- [16] H. ESNAULT & C. HERTLING – « Semistable bundles on curves and reducible representations of the fundamental group », *Internat. J. Math.* **12** (2001), no. 7, p. 847–855.
- [17] H. ESNAULT & E. Viehweg – « Semistable bundles on curves and irreducible representations of the fundamental group », in *Algebraic geometry : Hirzebruch 70* (P. Pragacz, M. Szurek & J. Wiśniewski, éds.), Contemp. Math., vol. 241, American Mathematical Society, 1999.
- [18] B. MALGRANGE – « La classification des connexions irrégulières à une variable », in *Séminaire E.N.S. Mathématique et Physique* [15], p. 381–399.
- [19] ———, « Sur les déformations isomonodromiques, I, II », in *Séminaire E.N.S. Mathématique et Physique* [15], p. 401–438.
- [20] C. SIMPSON – « Harmonic bundles on noncompact curves », *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), p. 713–770.
- [21] A. TREIBICH KOHN – « Un résultat de Plemelj », in *Séminaire E.N.S. Mathématique et Physique* [15], p. 307–312.
- [22] B.H. YANDELL – *The Honors Class – Hilbert's problems and their solvers*, A.K. Peters, Natick, Massachusetts, 2002.