Mathématiques d'Est en Ouest
Théorie et pratique : l'exemple des distributions

Jean-Michel Kantor

La science au regard mauvais
Elle (la mathématique) lance un regard mauvais à l'humanité, elle la force à voir la dure réalité en face, le fait réel uniquement, celui qui réduit à néant les fantaisies les plus merveilleuses comme les plus caustiques.
Robert Musil[1]

Introduction

Quelles leçons tirer des bouleversements qui ont marqué le vingtième siècle quant au développement scientifique ? Les mathématiques ont-elles subi le même bouleversement ? Leur rôle a-t-il été modifié, ont-elles gardé au temps d'Hiroshima la valeur morale et esthétique que vantait Platon ? Ces questions sont trop générales, mais elles suggèrent un débat.

Nous n'étudions ici qu'une situation, un contexte bien précis, celui des travaux mathématiques menés en Russie et en France à partir des années trente, inspirés entre autres par l'œuvre fondatrice d'Hadamard, et qui ont conduit au développement mondial de l'analyse mathématique et de la théorie des équations aux dérivées partielles. Les documents existent, plus de cinquante ans ont passé, assez pour qu'un examen historique soit possible.

La disparition de Laurent Schwartz, éminent mathématicien français, membre du groupe Bourbaki et l'un des animateurs de la communauté mathématique pendant plus de vingt ans, peut être l'occasion de revenir sur la naissance de la théorie des distributions. La publication récente d'archives soviétiques permet de compléter le travail des historiens, en particulier celui d'Adolphe Yuskevitch[2], critique du livre de Jesper Lützen (dont la compétence reconnue en histoire des mathématiques et la conscience professionnelle sont hors de cause) [Lu]. Yuskevitch examine, entre autres, avec le plus grand soin les articles publiés en russe (nos références complètent celles de son article). En effet si les temps ont changé, les barrières linguistiques persistent, qui ont ralenti les échanges d'idées entre l'Ouest et la Russie, et d'ailleurs ont empêché que le texte de Yuskevitch, bien que publié en 1991 dans la

1 Carnets. Extrait du cahier 16, L'espion (1923-24), W I 1979-80.
2 Voir p. 30 la traduction de l'article de Adolphe P. Yuskevitch publié en 1991 « Quelques remarques sur l'histoire de la théorie des solutions généralisées d'équations aux dérivées partielles et des fonctions généralisées » (Ist. Math. Issled. 1991, p. 256–266, en russe).

revue d'histoire qu'il avait créée, soit mieux connu. Bien entendu les mathématiques ne sont pas à l'abri de comportements chauvins dans la compétition internationale (l'effet « Popov » à l'Est comme à l'Ouest), Yuskevitch en est conscient, et ne tombe aucunement dans ce travers. Il a visiblement à cœur de montrer qu'il y avait une vie mathématique intense à l'Est, dans l'URSS isolée par la guerre froide et la « construction du socialisme dans un seul pays ». Nous évoquons les différentes sensibilités, les différents styles, que cet épisode révèle.

C'est aussi l'occasion de revenir sur la coopération scientifique internationale de cette période, encore si peu étudiée[3]. La médaille Fields fut attribuée à Laurent Schwartz à Harvard en 1950 en pleine guerre de Corée : la médaille Fields de la guerre froide, a-t-on pu dire (en faisant référence aux difficultés d'obtention du visa pour Hadamard et pour son neveu Schwartz). Un épisode mal connu en tout cas, comme nous le verrons, des rapports entre science et politique. D'autre part dans les années trente l'idée de fonction généralisée ou distribution était « dans l'air », utilisée par le grand physicien Paul Adrien M. Dirac (1902-1984), ou par Solomon Bochner (1889-1982) dont les travaux ont souvent été précurseurs de ceux des distributions [Boc] : les physiciens utilisaient les distributions comme Monsieur Jourdain la prose, sans le savoir. La naissance même de la théorie des fonctions généralisées-distributions peut donc être riche en leçons à une époque où les relations entre mathématiques et physique évoluent (cf [JQ]).

Enfin, cette étude est l'occasion de mettre en scène deux conceptions différentes du rôle des mathématiques, à l'Est et à l'Ouest (pour simplifier), l'une autour de Schwartz et Bourbaki visant à privilégier les structures, l'autre autour de Sobolev et de l'école péterbourgeoise, étroitement liée aux sciences physiques. Toutes ces questions sont encore d'actualité, et nous pensons que nous devons à la mémoire de Laurent Schwartz et à son sens aigu de la place du savant dans la Cité, de les aborder avec honnêteté et rigueur, mais de les aborder enfin.

Les acteurs : Hadamard (1865–1963), Sobolev (1908–1989) et Schwartz (1915–2002), deux mondes

Laurent Schwartz est un mathématicien admiré dans le monde entier, connu bien au-delà des cercles de spécialistes pour son rôle de « mathématicien dans le siècle » [S2]. L'un des membres actifs du groupe Bourbaki après la guerre, il fut aussi un homme de combat défendant toutes les causes humanitaires du vingtième siècle, depuis son trotskisme actif entre 1936 et la Libération jusqu'au Comité Audin pendant la guerre d'Algérie, et celui des mathématiciens pour les droits de l'homme dans les pays de l'Est. La personnalité de Schwartz condense les qualités de l'intellectuel français, issu d'une longue tradition d'ascension sociale qui a fourni à notre pays des intellectuels éminents.

Rien — à part les mathématiques — ne rapproche la personne de Laurent Schwartz de celle de Sergei Sobolev, un grand savant lui aussi, bien moins connu à l'Ouest : Sergei L'vovich Sobolev est né à Saint-Pétersbourg en 1908 d'une famille apparentée à la noblesse ; son père était un avocat important de Saint-Pétersbourg (devenue Léningrad). Dans la compétition qui dure encore entre les villes de Moscou et Saint-Pétersbourg, créée par Pierre le Grand en 1703, les écoles mathématiques

[3] Un ouvrage récent qui concerne le développement international des mathématiques de 1800 à 1945 oublie la Russie !

ont eu un rôle particulier : Saint-Pétersbourg fut la ville d'Euler qui y passa une grande partie de sa vie, et aussi Chebyshev (1821-1894), Markov (1856-1922), Lyapounov (1857-1918). On voit, rien qu'à cet énoncé, que la vie mathématique y a été marquée par une large ouverture vers les sciences et les techniques. C'est aussi à Saint-Pétersbourg que les talents d'organisation de Steklov (1863-1926), mathématicien appliqué, conduisirent à la création d'Instituts de recherche de l'Académie qui portèrent ensuite son nom. On trouvera un récit détaillé des luttes politiques à Moscou et Léningrad au sein des sociétés mathématiques et de leurs conséquences dramatiques (« l'affaire Lusin ») dans plusieurs publications récentes [De, Mar, M-Sh, Viu, Y] entre autres, ainsi que dans les numéros de la revue d'histoire créée par A.P. Yuskevitch *Istoriko-Matematikcheskie Issledovanie*. Voir aussi [G-K].

Sobolev fait de brillantes études précoces comme souvent en Russie au vingtième siècle. À l'université où il entre en 1925 il suit les cours de Grigorii Mikhailovich Fikhtengholtz (1888-1959), Nikolai Maksimovich Gunther (1871-1941) (ce dernier en théorie du potentiel). Il fait la connaissance alors de Vladimir Ivanovich Smirnov (1887-1974), qui sera professeur puis collaborateur de Sobolev, professeur à partir de 1925 et plus tard doyen de la faculté « Mat-Mekh » pendant 25 ans, ce qui ne lui évita pas d'être l'objet de remontrances en 1957 à l'occasion d'un hommage à Euler : louant l'influence positive de Fréchet, présent à la cérémonie, sur les mathématiques soviétiques, Smirnov se voit reprocher en public par Kolmogorov son « amour pour l'étranger » ([Y], page 31). La première publication de Sobolev est un contre exemple à un résultat annoncé par Saltykov et repris dans son cours par Gunther. Il rejoint en 1929 après sa thèse un institut de sismologie où il collabore avec Smirnov avant d'intégrer l'Institut Steklov et de devenir membre correspondant à 24 ans, puis membre à part entière — le plus jeune — de l'Académie des sciences de l'URSS. Il mènera outre sa carrière mathématique, ouverte vers les autres sciences et vers l'extérieur de l'URSS dans un contexte difficile — il parlait couramment le français qu'il avait appris dès l'enfance avec sa gouvernante belge — différents projets dont la création du centre sibérien de l'Académie des sciences, manifestant toute sa vie sa fierté russe et une grande loyauté envers le pouvoir soviétique (il est membre du Parti depuis les années trente), qui ne l'ont pas empêché de prendre des positions parfois difficiles et courageuses (par exemple dans l'affaire Lysenko), parfois plus orthodoxes, comme dans l'affaire Lusin auquel il reproche de manière virulente, avec d'autres, en 1936 son ouverture et ses publications à l'étranger [De].

Entre ces deux personnalités il y a Hadamard, « *le petit père Hadamard* », comme l'appelaient avec familiarité ses admirateurs, ou « *la légende vivante des mathématiques* », expression utilisée par Hardy pour le présenter à la London Mathematical Society en 1944 [Ka]. Après Poincaré, Hadamard est sans doute le Français qui a marqué le plus le vingtième siècle mathématique. Il est lui aussi représentatif du meilleur des traditions humanistes et universalistes de la culture française. Pour la suite il faut remarquer qu'Hadamard est le grand-oncle par alliance de Laurent Schwartz qu'il suivra dès ses années de lycée, puis à l'École normale supérieure où Hadamard professait. Son séminaire, à l'origine de la naissance du groupe Bourbaki (à travers le Séminaire Julia), fut le lieu où s'exerça son influence sur plusieurs générations de normaliens. Laurent Schwartz a reconnu (*loc. cit.*) la part très importante qu'a eue Hadamard dans sa formation. On connaît bien la vie d'Hadamard [M-Sh] — l'immensité de son œuvre mathématique, son engagement à l'extrême gauche lui aussi, d'abord motivé par l'affaire Dreyfus puis par la montée du nazisme, et son compagnonnage aux côtés du parti communiste avec Frédéric Joliot-Curie. Les archives de l'Académie contiennent des copies d'articles publiés lors de ses séjours en URSS, vantant le système et les mérites de la science soviétique [H].

Les faits

Les années trente : les fonctionnelles de Sobolev

Dans le cadre de ses activités militantes pour l'amitié entre les peuples, Hadamard, voyageur infatigable, fit de nombreux voyages à l'Est, en particulier en Chine et en URSS. En URSS il séjourna :

– en 1930 : Congrès des mathématiciens soviétiques à Kharkov, juillet ; il voyage ensuite à Kiev. Il rencontre Sobolev à Kharkov et ils discutent ensuite ensemble en français, à Léningrad. Hadamard demande à Sobolev de le tenir au courant de ses travaux [M-Sh p. 217] ;

– en mai 1934 : Hadamard est membre d'une délégation de neuf savants français dans le cadre de la semaine de la science française en URSS. À Léningrad il rencontre Sobolev, mais il ne participe pas au second Congrès des mathématiciens soviétiques qui se tient du 24 au 30 juin 1934, et où Serge Sobolev donne trois conférences :

1. une nouvelle méthode de résolution du problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles hyperboliques ;
2. solutions généralisées de l'équation des ondes ;
3. sur le problème de diffraction pour les surfaces de Riemann.

Le contenu de ces interventions a été certainement discuté quinze jours plus tôt avec Hadamard, qui suivait avec intérêt les travaux de son émule : Sobolev lui-même a reconnu l'influence de la notion de partie finie mise à jour par Hadamard en 1903 (!) dans ses découvertes de 1934-1935. Comme le soulignent la nécrologie de Sobolev par Jean Leray [L4], et la recension du livre [Lu] par Yuskevitch, la découverte des fonctionnelles généralisées doit être attribuée à Sobolev dans ses articles de 1935 et 1936 :

– Le problème de Cauchy dans l'espace des fonctionnelles, *Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1935, volume III (VIII), Nffi 7 (67).

– Méthodes nouvelles à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales, *Math. sbornik* (recueil mathématique), 1936, t.**1** (43), p. 36–71.

Dans ces deux articles, Sobolev définit explicitement les fonctionnelles généralisées comme formes continues sur l'espace des fonctions différentiables à l'ordre m à support dans un compact K pour m et K fixés. Il établit les propriétés fondamentales des fonctionnelles généralisées.

Pourquoi en français ?

L'année 1934, avec l'assassinat de Kirov, un dirigeant communiste très populaire, à Léningrad, marque un tournant dans la situation de l'URSS qui va peu à peu se replier sur elle-même et où les combats « idéologiques » vont faire rage, comme en témoigne la campagne contre Lusin déjà évoquée. Dans cette campagne le rôle des publications, en Russie ou à l'étranger, en russe ou en langue plus accessible, joue un rôle important. La publication de l'article fondateur de Sobolev en russe et en français dans le même volume des Doklady n'est pas innocente. C'est à la fois un exemple de patriotisme que donne Sobolev détracteur de Lusin, mais cela pouvait représenter aussi le risque de rappeler les origines sociales de l'auteur, bien que les publications en français fussent assez fréquentes. Il y a donc fort à parier que cette double publication fut au moins bien accueillie par Hadamard, sans doute même suggérée. En 1936 Hadamard repasse à Moscou de retour de Chine. En 1945 il effectue un nouveau voyage à Moscou et Léningrad comme membre de la délégation française aux célébrations du 220^{e} anniversaire de l'Académie des sciences de Russie (puis d'URSS). Il ne rencontre pas Sobolev (on verra pourquoi). Cependant dès 1935 les rapports qu'il fait à ses retours montrent chez Hadamard la conscience des problèmes (il évoque la disparition tragique d'une étoile montante, il s'agit sans doute du suicide du jeune et brillant mathématicien Schnirelman, théoricien des nombres et topologue, en 1938). Hadamard y loue les relations étroites entre sciences pures et appliquées en URSS, même en mathématiques [H]).

La découverte de Sobolev

Sobolev, inspiré entre autres par les travaux d'Hadamard, a défini d'abord les solutions généralisées d'une équation aux ondes puis en 1934-1935 les « fonctions généralisées », sans qu'il soit question d'une équation de référence (contrairement à la description de [Lu], page 65), d'abord sous le nom de fonctions « idéales », en référence sans doute à l'introduction des nombres idéaux par Kummer, puis comme « fonctions généralisées » dans l'article fondateur de 1935. L'ancien terme évoquait dangereusement la philosophie idéaliste [M-Sh] à une époque où le philosophe marxiste d'origine tchèque Kolman et d'autres adeptes de la « science prolétarienne » sévissaient à Léningrad. Cette hésitation sur l'appellation comme la double publication en russe et en français confirment que Sobolev avait une claire idée de l'importance de son travail et de son caractère général, contrairement aux affirmations de [Lu]. Nous renvoyons à Yuskevitch pour une analyse détaillée des différents articles de Sobolev et de ses inspirateurs et collaborateurs. Outre les travaux d'Hadamard, l'origine de l'article de Sobolev peut être retrouvée chez Gunther [Na]. L'esprit curieux et enthousiaste d'Hadamard ne pouvait rester indifférent à ce travail en cours, il lut l'article de 1936 dès réception à l'ENS. D'ailleurs jusqu'à la fin de sa vie Hadamard fut abonné aux principales revues mathématiques soviétiques [ManS]. Parmi les professeurs de l'École normale figurait, outre Hadamard, Jean Leray, spécialiste des équations aux dérivées partielles et qui lui aussi a participé à la « préhistoire des distributions » avec sa notion de solution faible d'équations aux dérivées partielles [L1]. Il a raconté à Serge Sobolev dans les années quatre-vingt qu'il avait discuté de son article de 1936 avec Laurent Schwartz avant la guerre (Communication personnelle de V. Chechkin, professeur à la Chaire d'équations aux dérivées partielles de l'université de Moscou et petit-fils de S. Sobolev).

Il fallut attendre plus de dix ans, dont quelques années sans travail mathématique puis de lente maturation, pour que naisse le travail de 1945 de Schwartz, qui reprend la définition de Sobolev. Mais entre temps Sobolev avait quitté la scène par une porte dérobée ! Sobolev n'a pas poursuivi son travail dans cette direction, et a laissé à Schwartz le champ libre pour développer la théorie où manquaient essentiellement la transformation de Fourier et la structure d'espace topologique sur l'espace des distributions[4].

La première publication où Schwartz cite ses sources [S1] contient d'ailleurs une note (Note 4 page 5 de l'introduction), étrange par la présentation partielle et anti-chronologique des articles de Sobolev : « Soboleff[5] ; Friedrichs[6] ; Kryloff[7]. Certains articles signalés dans les notes précédentes sont postérieurs aux distributions, mais les auteurs ignoraient les distributions par suite de la lenteur de l'impression, des communications internationales, ou de ma publication. Voir aussi les fonctionnelles de Soboleff[8] ».

Les deux premières références n'ont pas un intérêt crucial ; la dernière « Méthodes nouvelles ... » est l'article déjà cité. Par contre l'article des *Doklady* de 1935 (reçu le 17.7.1935) est « oublié ».

De plus cette Note est restée à l'identique dans les éditions « entièrement revues et corrigées » ultérieures.

La clé du mystère

Dans son autobiographie, Schwartz, après avoir fait une description *a minima* de la découverte de Sobolev de 1935, tirée de l'article qui n'est pas cité dans la Note 4 ci-dessus, se demande ([S2], p. 236) pourquoi Sobolev n'a pas poursuivi après la guerre ses travaux sur les fonctions généralisées.

La réponse est instructive. Sobolev a disparu du milieu de la recherche mathématique et de tout contact avec l'étranger de 1943 à 1953 parce qu'il était occupé à d'autres activités, des mathématiques appliquées, très appliquées même. Il devint adjoint principal du directeur I. V. Kurchatov au « Laboratoire 2 », d'abord situé au sein de l'université de Moscou, et qui devint ensuite le LIPAN. C'est dans ce laboratoire que vit le jour la première bombe atomique soviétique [Viz].

On sait qu'à l'Ouest comme à l'Est de grands mathématiciens ont joué un rôle crucial dans les projets atomiques [Go, p. 383]. La physique complexe des ondes de choc qui entre en jeu conduit en effet à la résolution d'équations non linéaires, et Bethe (qui en parla à Von Neumann) avait remarqué le caractère instable de l'approximation numérique des solutions ; les compétences des meilleurs mathématiciens étaient requises ! Ces travaux essentiels à la défense soviétique conduisirent Sobolev à la résolution numérique des équations pour un réacteur nucléaire sphérique. Il étudia aussi l'effet appelé « effet-gun » et sa variation sous bombardement par neutrons. Ce sont des travaux essentiels pour les applications aux pertes en eau des réacteurs (Three-Mile Island et Chernobyl). Sobolev fut décoré de la plus haute médaille civile en 1951, celle de héros socialiste du travail. Bien entendu tout contact avec l'étranger lui était totalement interdit : même sa

[4] Lützen compare les articles de Sobolev (1936) et l'exposé de Schwartz de 1950, à Cambridge qu'il confond avec son manuel de 1950 qui ne contient pas le théorème des noyaux !

[5] « Sur quelques évaluations concernant les familles de fonctions ayant des dérivées à carré intégrables. » Comptes rendus Académie des Sciences URSS, **1** (1936), p. 279–282.

« Sur un théorème d'analyse foctionnelles ». Recueil Mat. (Math. Sbornik), **4** (1938), p. 471–496.

[6] « On differential operators in Hilbert spaces ». Amer. J. Math., **61** (1939), p. 523–544.

[7] « Sur l'existence des dérivées généralisées des fonctions sommables ». Comptes rendus Académie des Sciences URSS, **55** (1947), p. 375–378.

[8] « Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques normales ». Recueil Mat. (Math. Sbornik), **1** (1936), p. 39–71.

femme ne savait pas où Serge Sobolev disparaissait pendant des mois, après des passages rapides à son domicile. Sa liste de publications pendant cette période s'en est ressentie — sauf son manuel de 1950 occasionné par un séjour à l'hôpital pour jambe cassée —, et l'essentiel des travaux auxquels nous venons de faire allusion n'est toujours pas publié.

La suite est plus connue : Sobolev reprendra des activités scientifiques classiques dans les années soixante. Entre-temps, le livre *Théorie des distributions* et les travaux poursuivis par L. Schwartz (distributions tempérées et transformation de Fourier, applications de la théorie des espaces vectoriels topologiques) conduisirent à le considérer comme le père de la théorie. La reconnaissance tardive de la paternité de Sobolev dut attendre encore quinze ans [L3, L4]. L'apport principal de Schwartz, dans la lignée du projet Bourbaki (« algébriser l'analyse », en somme), fut de rapprocher la définition de Sobolev des travaux entrepris par Dieudonné sur les espaces vectoriels topologiques à partir de 1940 [Du] à la suite des travaux de Banach et Köthe, déja assez avancés. Schwartz comprit dans les années quarante cinq-cinquante l'intérêt d'appliquer la théorie des espaces vectoriels topologiques au cas des fonctions généralisées.

On pourrait appeler « appropriation par bourbakisation » ce processus de découverte par rapprochement de théories disjointes. Il fut fréquent. On peut se reporter à [Gr, Mi, S4] pour voir comment une belle idée de Minlos que Gross avait eue indépendamment s'est incarnée dix ans plus tard dans la théorie des applications radonifiantes, le nom de Minlos s'étant perdu au passage. Avec Sobolev, c'était l'auteur lui-même qui avait favorisé le processus ! Le terme de bourbakisation renvoie ici au « projet Bourbaki », qui consistait, en dégageant les structures profondes des mathématiques, à obtenir le degré de généralité donnant à une théorie sa puissance extensive, ici la mise à jour des structures d'espaces vectoriels topologiques. On peut d'ailleurs remarquer que Jacques-Louis Lions (1928-2001), s'est orienté dès sa thèse avec L. Schwartz vers l'utilisation des méthodes de majoration-inégalités de normes de type Sobolev, certes moins élégantes que l'analyse fonctionnelle, mais plus efficaces. Lions devint ensuite le chef des mathématiques appliquées françaises.

La percolation

La percolation (ou l'illumination, il emploie les deux mots) dont parle Schwartz dans son autobiographie, est probablement constituée du rapprochement final, à l'occasion d'un problème posé par Gustave Choquet, entre la théorie des fonctionnelles de Sobolev (définies comme formes linéaires continues) et les travaux de Dieudonné puis Dieudonné-Schwartz. Contrairement aux affirmations de [Lu] en effet, en janvier 1946 Schwartz avait une bonne connaissance des travaux de Sobolev : lors de son cours Peccot au Collège de France « il n'avait que le nom de Sobolev à la bouche », selon le témoignage des participants.

Conclusions et problèmes

À l'Est et à l'Ouest

En Russie, à l'époque du socialisme triomphant, la science se doit d'être au service du peuple pour le progrès de l'humanité. Cette conception actualise en fait une tradition culturelle ancienne en Russie, vivante à Saint-Pétersbourg, même dans le domaine des mathématiques. Qu'on songe à Pafnuty Chebyshev dont les soucis pour les systèmes articulés, le découpage des tissus, les lois du hasard, étaient étroitement reliés à des préoccupations d'une grande abstraction. Chebyshev a très explicitement décrit [C] l'intérêt mutuel que les mathématiques pouvaient tirer des applications pratiques. Dans le cas des fonctionnelles, Smirnov, dans une analyse profonde, montre combien les sciences expérimentales restent au cœur des soucis des mathématiciens russes (Y, page 46). Pour l'école russe, à l'époque concernée comme plus tard, les mathématiques se mesurent à leur efficacité. Même la topologie générale trouve chez Tychonov puis Pontryagin des applications à l'étude du contrôle des systèmes. On peut citer plus récemment les travaux d'Arnold et de son école. On conçoit d'ailleurs quelles furent les difficultés de la Lusitania, la célèbre école créée autour de la théorie des fonctions par Lusin à Moscou, largement inspirée par la théorie des ensembles (germanique) ou la théorie des fonctions (française) [GrK] . En France par contre (comme en Allemagne), le pays de Descartes, de Galois et de Bourbaki, on a favorisé le goût de la recherche mathématique « *pour l'honneur de l'esprit humain* » (l'expression est de Jacobi) : la valeur d'une théorie se mesure à son degré de généralité, une généralité purificatrice synonyme d'efficacité, et qui se manifeste par le rapprochement de domaines apparemment éloignés dans la production de théories nouvelles, et par l'élégance des concepts [B1]. Pour Schwartz par exemple la théorie des distributions prend de l'ampleur quand il marie la définition de Sobolev à la théorie des espaces vectoriels topologiques : il aboutit ainsi aux propriétés des topologies d'espaces de distributions qui permettront les travaux de ses élèves Lions et Malgrange et auparavant au théorème des noyaux annoncé au Congrès de 1950 à Cambridge (USA), qui est la cerise sur le gâteau qui lui rapporte la médaille Fields et la paternité ultérieure — à l'Ouest au moins — des distributions. Ces deux conceptions des mathématiques et de leur rôle ont été présentes simultanément dans chacun de ces pays, et parfois dans la production d'un même mathématicien : qu'on songe à Gel'fand en URSS ou dans le passé à Fourier en France. À l'époque qui nous intéresse, les aspects dominants étaient plutôt ceux que nous avons indiqués. On peut remarquer, même si la question dépasse notre propos, que les développements récents des sciences physiques et mathématiques montrent que la tension entre efficacité et rigueur reste forte (Intégrale de Feynman, théorie des cordes : voir le débat, par exemple à partir de [JQ]). Faut-il se réjouir que les bouleversements politiques des dernières décades risquent d'uniformiser mondialement les pratiques de la science mathématique et les réponses à cette « tension essentielle » [Ku] ?

Probabilités et mesure

La théorie de la mesure et ses relations avec les probabilités méritent une étude particulière : ce fut le premier écueil sérieux pour le développement du projet Bourbaki [B2]. Du point de vue qui nous intéresse, il est indéniable que la théorie des distributions a servi d'argument « idéologique » de poids à l'époque ; voici quelques lignes de l'introduction de [B1] concernant la théorie de la mesure : « ... la théorie de l'intégration est ainsi reliée, d'une part à la théorie générale de la dualité dans les espaces vectoriels topologiques, de l'autre à la théorie des distributions, qui généralise certains aspects de la notion de mesure, et que nous exposerons dans un livre ultérieur ». On voit combien ce point de vue « structuraliste » à l'œuvre aussi dans l'approche de Schwartz des distributions masquait la nature réelle des phénomènes en question, par exemple la finesse des processus aléatoires. On peut avoir un autre aperçu des erreurs commises à la lecture d'André Weil [W1], [W2] : « ... *Le moment est venu de chercher, par une analyse plus serrée, à décomposer les découvertes de Lebesgue en leurs éléments constitutifs pour y distinguer ce qui est essentiel au maniement d'une intégrale, et ce qui a trait aux opérations particulières des ensembles sur lesquels on a le plus souvent à opérer* ».

Plutôt qu'un mépris des applications en vue, ce fut la volonté de faire passer la structure avant le phénomène, l'architecture avant le portrait, qui fit prendre un retard de quinze ans aux probabilités françaises, un comble au pays de Laplace, Lebesgue, Borel et surtout de Paul Lévy, Fortet, Loeve, Ville et Doeblin qui dans les années trente ont participé au tout premier rang à la renaissance de la théorie des probabilités en développant les nouveaux aspects trajectoriels des processus dont les applications se révéleront d'une grande richesse dans la seconde moitié du xx^{e} siècle, y compris dans la solution des grands problèmes de l'analyse classique et son renouvellement (EDP, problème de Dirichlet, théorie du potentiel,...). On espère revenir ailleurs sur cette question, sur laquelle Schwartz lui-même apporte un jugement autocritique ([S2]).

Les difficultés de communication

Depuis la révolution jusqu'aux années soixante-dix, les échanges de mathématiciens ont souffert de nombreuses difficultés dues au manque de liberté intellectuelle en URSS, à la guerre froide, aux conflits à l'intérieur du système culturel et universitaire soviétique à partir des années soixante. C'est ainsi que la délégation soviétique déclina tout entière l'invitation à se rendre au Congrès de 1950 à Harvard, en pleine guerre de Corée. C'est à ce congrès que fut remise la médaille Fields à Laurent Schwartz. On suppose que Kolmogorov, membre du comité qui l'a décernée, n'a pas même mentionné le nom de Sobolev alors sous-directeur du Lipan. Dans les années soixante d'autres problèmes surgirent : nous avons été témoin des difficultés des échanges et de publication d'articles mathématiques en URSS, qui ont conduit par exemple à la naissance de la revue *Functionalnii Analyz* d'Israël M. Gel'fand dans les années soixante-dix.

Mathématiques et politique

À la fin de l'interview qui a servi de document de travail à Lützen, Laurent Schwartz fait un étonnant rapprochement entre la théorie des distributions et la démocratie politique, en citant l'éminent historien marxiste anglais Moses Finley pour lequel la démocratie a été découverte par les Grecs : « *Ce sont les Grecs, somme toute, qui ont découvert non seulement la démocratie, mais la politique. Je ne nie pas l'existence possible d'exemples antérieurs de démocraties ... Quelle que puisse avoir été la réalité de ces derniers faits, leur influence historique sur les sociétés ultérieures fut nulle. Les Grecs découvrirent la démocratie ...tout à fait comme Christophe Colomb, et non quelque navigateur viking, découvrit l'Amérique* » [Fi]. Autrement dit Sobolev aurait été le Viking de Colomb-Schwartz. Au-delà du débat général sur le réalisme philosophique (la démocratie fut-elle découverte ou inventée ? et les distributions ?), il est clair que les mathématiques comme les concepts politiques n'adviennent pas *ex nihilo*, et que le travail scientifique est un processus : Schwartz arrive après Sobolev, Dirac,... et même Euler ! Avec le recul et l'étude précédente la comparaison paraît plus qu'excessive, injustifiée. On a vu apparaître dans le même champ de l'analyse mathématique le point de vue de l'analyse algébrique dont l'importance paraît autrement prometteuse, ne serait-ce, en adoptant le point de vue de Bourbaki, que par les « ponts » qu'elle établit. Allant plus loin, et tenant compte des non-dits fréquents chez Schwartz (voir plus haut page 38), on peut se demander s'il n'y a pas là allusion au pouvoir idéologique qu'a constitué Bourbaki, parfois contre la volonté de certains de ses membres comme Claude Chevalley, resté libertaire toute sa vie (dans son bel interview nostalgique [Che] il reconnaît aussi avoir pensé « *apporter la lumière au monde mathématique* »), dans une volonté commune de renouveau. D'ailleurs c'est chez Chevalley qu'on trouve les remarques les plus intéressantes sur le rapport entre Bourbaki et la pensée politique : « *c'est chez le penseur politique Castoriadis, dit-il, que j'ai compris les erreurs de mon point de vue en logique mathématique !* »

Le pouvoir de Schwartz a personnifié celui de Bourbaki : mathématiques modernes et réforme dans l'enseignement, rôle du savant pour dire « le juste », et pouvoir indirect dans la vie de la Cité : l'aura du mathématicien, que Schwartz a su manier « pour la bonne cause » est bien faite pour évoquer la Grèce. Cette comparaison renvoie à un rapprochement fréquent chez le grand mathématicien entre action mathématique, combat politique et principes moraux.

La disparition d'une si forte personnalité évoque la fin parfois annoncée de l'époque des « grands récits », celle des acteurs romantiques qui créent des mythes (Bourbaki, le rêve des distributions). Cette époque-là est-elle advenue ? L'avenir nous le dira, et l'Histoire jugera.

Remerciements

L'auteur remercie Chandler Davis pour avoir autorisé la publication de la version française de l'article publié auparavant en anglais dans *The Mathematical Intelligencer*, et Serge Demidov pour avoir autorisé la traduction par l'auteur et la publication de l'article de Serge Yukevitch tiré de son journal *Istoriko-Matematikcheskie Issledovanie* (1991). Enfin il remercie Serge Kutateladze pour avoir attiré son attention sur plusieurs points historiques.

Références

[Be] Beaulieu Liliane. Bourbaki. Une histoire du groupe de mathématiciens français et de ses travaux (1934-1944). Thèse de Ph. D, Université de montréal. 1990

[Boc] Bochner Salomon. Review of L. Schwartz 's « théorie des distributions », Bull. Amer. Math. Soc. 58, (1952), pp. 78-85

[B1] Bourbaki Nicolas. Éléments de mathématique, livre VI Intégration, Hermann, 1952

[B2] Bourbaki Nicolas. L'architecture des mathématiques, p. 35-47, in Les grands courants de la pensée mathématique, sous la direction de F. Le Lionnais, Ed. Albert Blanchard

[Boul] Bouleau Nicolas. Dialogues autour de la création mathématique. Association Laplace-Gauss, 1997

[C] Chebyshev Pafnuty. Rapport du professeur extraordinaire de l'université de Saint- Pétersbourg sur son voyage à l'étranger.

[Che] Chevalley Claude. Nicolas Bourbaki, Collective Mathematician. The Math. Intelligencer, Vol. 7, n° 2, (1985), pp. 18-22

[De] Demidov Sergei S. The Moscow school of the theory of functions in the 1930s in : Golden years of Moscow Mathematics, S. Zravkovska, P. Duren Editors, vol. 6, AMS, LMS, 1993

[Du] Dugac Pierre. Jean Dieudonné mathématicien complet, Éd. Jacques Gabay, 1995

[FI] Moses I. Finley, Démocratie antique et démocratie moderne, Payot, 1976

[Ge] Gel'fand Israel M. Some aspects of functional analysis and algebra. Proc. Int. Cong. Math, 1954, Amsterdam (1957), 253-276

[JQ] Jaffe Arthur ; Quinn Frank. « Theoretical mathematics » : toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics. Bull. Amer. Math. Soc. 29 (1993), n° 1, 1-13

[Go] Godement Roger. Analyse mathématique, tome 2, Springer-Verlag 2000

[Gr] Gross Leonard. Harmonic Analysis on Hilbert space, Mem, AMS, n° 46, 1963

[GrK] Graham Loren, Kantor Jean-Michel. Name Worshippers : Religion, Russian and French Mathematics, 1900-1930 sur `www.math.jussieu.fr/~kantor`

[H1] Hadamard Jacques. Le mouvement scientifique en URSS, Rapport présenté en 1935 à Paris aux journées d'étude et d'amitié franco-soviétiques.

[H2] Hadamard Jacques. Rapport paru en 1945 après le 220e anniversaire de l'Académie des sciences de Russie

[Ka] Jean-Pierre Kahane. Jacques Hadamard. The Math. Intelligencer, vol. 13, n° 1, (1991), pp. 23-29

[Kub] Kuhn Thomas. La tension essentielle, Gallimard, 1990

[L1] Leray Jean. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, Acta math. 63 (1934), p. 193-248

[L2] Leray Jean. Travaux de M. Laurent Schwartz, rapport annexe à la candidature de Laurent Schwartz, 1964, Académie des Sciences, Paris

[L3] Leray Jean. Rapport sur l'attribution du prix Cognac-Jay (Samaritaine) 1972 à Laurent Schwartz, Jacques-Louis Lions et Bernard Malgrange

[L4] Leray Jean. La vie et l'œuvre de Serge Sobolev, La Vie des sciences, série générale, t. 7 (1990), n° 6, p. 467-471

[Lo] Lorentz G. G. Mathematics and Politics in the Soviet union, Journal of Approximation Theory 116 (2002), p. 169-223

[Lu] Lutzen, Jesper. The Prehistory of the theory of distributions, Springer-Verlag, 1982.

[ManS] Mandelbrojt Szolem. Souvenirs à bâtons rompus, recueillis en 1970 et préparés par Benoît Mandelbrot, Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques, n° 6, (1985), p. 1-46

[ManB] Mandelbrot Benoît. Chaos, Bourbaki and Poincaré, The Math. Intelligencer, vol. 11, n° 3, (1989)

[Mar] Maritz Peter. Around the graves of Petrovskii and Pontryagin The Math. Intelligencer, vol. 25, 2, (2003), p. 79

[M-Sh] Maz'ya Vladimir - Shaposhnikova Tatyana - Jacques Hadamard. Universal Mathematician. (AMS-LMS), 1998

[Mi] Minlos R. Continuation of a generalized random process to a completely additive measure Dokl. Akad. NaukSSSR (N. S.) 119 (1958), p. 439-442

[Na] Naumann Joachim. Remarcs on the prehistory of Sobolev spaces. Preprint series, Institut für Mathematik, Hunbold, universität zu Berlin.

[S1] Schwartz Laurent. Théorie des distributions, t. 1, Herman, Paris 1950

[S2] Schwartz Laurent. Un mathématicien aux prises avec le siècle, Éd. O. Jacob, 1997

[S3] Schwartz Laurent. Le point de vue de Laurent Schwartz in « Les mathématiciens » pour la Science, Paris (1996)

[S4] Schwartz Laurent. Séminaire « Applications radonifiantes », 1969-70, École polytechnique

[Viu] Viucinich A. Soviet mathematics and dialectics in the Stalin Era. Historia mathematica 27 (2000), pp. 54-76

[Viz] Vizguin V. Istoria sov. atomnogo proekta. Izdat. rousk. kristian. gumanitarnogo instituta St. Petersbourg

[Y] Yuskevitch A. P. Encounters with mathematicians, Golden Years of Moscow mathematics. S. Zdravkovska, Peter L. Duren Editors History of mathematics, vol. 6, AMS, LMS, 1991

[W1] Weil André. Calcul des probabilités, méthode axiomatique, intégration. Revue scientifique, t. 78, 1940, p. 201–208 ; p. 260-272

[W2] Weil André. L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, Paris, 1940, Œuvres vol. 1. Voir aussi Commentaire p. 551

Quelques remarques sur l'histoire de la théorie des solutions généralisées d'équations aux dérivées partielles et des fonctions généralisées [1]

Adolphe P. Yuskevitch

Depuis 1968 je publie les appréciations de célèbres mathématiciens français sur leurs collègues russes, à l'occasion de leur candidature comme membre étranger de l'Académie des sciences à Paris (la procédure d'élection se déroule de la même manière depuis le milieu du XIX^e siècle). Souvent ces appréciations ont de l'intérêt pour l'histoire des relations entre scientifiques de nos deux pays. Bien entendu ces appréciations reflètent le point de vue personnel des orateurs et souvent le jugement sur les candidats dépend aussi de la situation internationale. Les candidatures déja publiées sont celles de Chebyshev, Lyapounov, Bernstein, Vinogradov, Lavrentiev, Kolmogorov. C'est avec grand plaisir que j'ai obtenu l'autorisation de Paul Germain de publier l'appréciation de Jean Leray sur son collègue Sergei Sobolev.

La meilleure appréciation de l'œuvre de Sobolev se trouve dans l'ouvrage [4], publié pour ses quatre-vingts ans[2]. Sergei L'vovich Sobolev[3] a terminé ses études à l'université de Leningrad en 1928. Ses directeurs étaient N. M. Gunther (1871-1941) et V. I. Smirnov (1887-1974), tous deux élèves de V. A. Steklov (1863-1926), lui-même élève de A. M. Lyapounov (1857-1918). Ces quatre professeurs se sont occupés essentiellement toute leur vie de la théorie des équations différentielles, des équations aux dérivées partielles, et de leurs applications en physique mathématique et en mécanique. C'étaient des membres éminents de l'école mathématique de Saint-Pétersbourg devenue Leningrad, école dirigée par P. Chebyshev (1821-1894), l'un des professeurs de Lyapounov. Pendant ses études Sobolev suivit aussi des conférences de Fihtengoltz (1888-1959), qui fut le premier à développer à Leningrad l'étude des fonctions d'une variable réelle qui a suscité les travaux intensifs de l'école de Moscou avec D. F. Egorov (1869-1931), N. N. Lusin (1883-1950) et leurs élèves. Sobolev appartient à la quatrième génération de l'école de Chebyshev, qui a systématiquement exploité les relations entre les mathématiques et les problèmes concrets des sciences et des techniques, sans exclure le souci d'introduire les questions abstraites souvent tôt en amont des questions pratiques (même en théorie des nombres). Il faut aussi insister sur le fait que les professeurs de Sobolev utilisaient déjà eux-mêmes les développements les plus récents des mathématiques – topologie, théorie des fonctions d'une variable réelle, nouveaux secteurs de la théorie des fonctions d'une variable complexe, équations intégrales, analyse fonctionnelle naissante. Le travail de recherche de Sobolev commença tout de suite après la fin de ses études, dans le département de

[1] Traduit de *Istoriko-matematicheskie issledovanie*, 1991, p. 256–266 par Jean-Michel Kantor.
[2] Voir aussi la *Notice nécrologique de Sobolev* par Jean Leray. [NdT]
[3] 1908-1989

sismologie de l'Académie des sciences que dirigeait V. I. Smirnov. Et même, encore étudiant à l'université il présenta un diplôme, sur un thème suggéré par Gunther. À l'Institut sismologique, Sobolev fit à nouveau des travaux étroitement liés au thème suggéré auparavant par Gunther, la théorie analytique des équations aux dérivées partielles et en particulier la propagation des ondes élastiques. Certaines de ses premières publications furent cosignées avec Smirnov. Le 29 juin 1930 Sobolev fit un exposé au Premier congrès des mathématiciens de l'URSS « équation des ondes dans un milieu isotrope inhomogène », dont un résumé parut aux *Notes aux Compte Rendus de l'Académie des sciences de Paris*. Ce travail intéressa Jacques Hadamard (1865-1963) qui assistait au congrès et y fit un exposé sur un thème voisin de celui de Sobolev, « équations aux dérivées partielles et théorie des fonctions d'une variable réelle » ([5], en français et en russe). Déjà les premiers travaux de Sobolev, résumés à la suite de ceux de Gunther et Smirnov dans ([6] huitième partie) eurent un grand écho chez les mathématiciens soviétiques et Sobolev fut élu le 1er février 1933 membre-correspondant de l'Académie des sciences. Il n'avait pas encore 25 ans ! Il devait être élu membre le 29 janvier 1939.

En 1932 Sobolev entre à l'Institut physico-mathématique créé par Steklov en 1921. C'est à cette époque qu'il développe les travaux les plus importants qui établissent le début de la théorie des fonctions généralisées. Il est le premier à les définir mathématiquement et à s'atteler à l'étude de leurs propriétés fondamentales. Un résumé de ses idées a été fait par Smirnov ([7], p. 187-191). Les idées de Sobolev sur les distributions, qu'il appelle fonctionnelles et qui furent ensuite appelées « fonctions généralisées », furent formulées à partir de la fin des années vingt et du début des années trente — si ce n'est pas plus tôt — et exposées dans sa conférence « Solutions généralisées de l'équation des ondes » le 29 juin 1934 au second Congrès des mathématiciens soviétiques à Leningrad. En voici le résumé laconique qu'en fit l'auteur : « *La classe de fonctions qu'on peut considérer comme solutions de l'équation des ondes du point de vue classique est formée de fonctions deux fois différentiables. Mais dans diverses applications pratiques il paraît commode de considérer des fonctions ayant des singularités d'un type bien défini. On introduit un espace de fonctions intégrables au sens de Lebesgue, dans lequel on peut définir les solutions généralisées de l'équation des ondes comme limites de solutions deux fois différentiables. À l'aide d'un critère simple d'intégrabilité, on donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit solution généralisée, et on établit le lien entre solutions usuelles et solutions généralisées. Enfin, la théorie ainsi construite est appliquée à quelques exemples concrets ([8], p. 259)* ». Leray accorde une très grande importance aux travaux de Sobolev en théorie des fonctions généralisées, appelées distributions dans la littérature mathématique occidentale, mais il les date des travaux de 1935 et 1936. Smirnov ([7], p. 187) renvoie à l'article [9] de 1935 et aussi à deux autres articles cités dans [9] et [10]. Dans le travail bibliographique [9] la conférence de 1934 n'est même pas mentionnée. Dans les deux volumes classiques de Dieudonné sur l'histoire des mathématiques des deux derniers siècles, Dieudonné écrit que Sobolev a commencé l'étude des fonctions généralisées en 1937 ([11], p. 2, [7], p. 171). Dans l'article « Fonctions généralisées » de 1982 Vladimirov cite [9] et aussi l'article « solutions généralisées » ([12], t. 3, p. 1102-1110, 1116-1117).

Ce n'est que dans l'article écrit à l'occasion du jubilé de Sobolev en 1989, que l'un des auteurs, portant lui aussi le nom de Vladimirov, signale l'article de 1934, « où apparaît pour la première fois la théorie des fonctions généralisées ». On sait bien que l'établissement d'une priorité chronologique entre plusieurs auteurs d'une découverte scientifique ne se fait pas toujours de manière harmonieuse, mais aujourd'hui il ne conduit plus à des effets aussi négatifs, ni à des disputes violentes, comme ce fut le cas par exemple avec Newton et Leibniz, les artisans de l'analyse infinitésimale.

En ce qui concerne la préhistoire de la théorie des fonctions généralisées de Sobolev, elle reste peu étudiée. Un rôle devrait sans doute être attribué dans la mise au point des notions centrales aux travaux de Gunther (en particulier à sa méthode de lissage des fonctions insuffisamment dérivables, travail souvent cité par Smirnov ([7] p. 184). Encore plus tôt, une voie vers la théorie des fonctions généralisées fut trouvée dans les travaux d'Hadamard, en commençant par sa remarque « sur les opérations fonctionnelles » et ses « Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique », publiées en 1903. L'académicien Steklov attira l'attention sur ces travaux lors de la présentation de l'œuvre d'Hadamard qui venait d'être élu correspondant de notre Académie le 2 décembre 1922.

L'article de Steklov est profond et d'une portée certaine. Il insiste en particulier sur l'importance du premier article où pour la première fois Hadamard utilise le terme de « fonctionnelle » et il détaille les résultats du second. Il y insiste en particulier sur l'existence des « ondes de choc » dans les liquides compressibles et les corps élastiques. Une remarque intéressante de Steklov est la suivante : les questions d'hydrodynamique, traduites dans le langage de l'analyse mathématique, coïncident avec la théorie des caractéristiques des équations aux dérivées partielles, « née de manière totalement indépendante d'une quelconque origine physique ». Cette remarque montre que Steklov comprenait parfaitement la signification pour les applications ultérieures de recherches fondamentales abstraites poursuivies de manière complètement indépendante de leur utilisation. D'ailleurs il utilise la terminologie classique dont il a l'habitude (le terme de « fonctionnelle » est utilisé en passant), et il ne pouvait pas prévoir qu'en quelques années c'est essentiellement dans son institut qu'allaient être posées les bases de la théorie des fonctions généralisées. Ce discours de Steklov ne fut publié qu'en 1968 ([1] p. 110-115). En ce qui concerne les avancées d'Hadamard vers la théorie des solutions généralisées des équations aux dérivées partielles et des fonctions généralisées, citons l'exposé de G. Shilov (professeur à l'université de Moscou de 1917 à 1975), spécialiste de la question, le 10 février 1964 lors d'une session – mémorial de la société mathématique de Moscou : « En résolvant les équations hyperboliques, Hadamard introduit essentiellement l'appareil de la théorie des fonctions généralisées d'une ou plusieurs variables. Cette découverte est restée en sommeil à l'époque – Hadamard devançait ainsi de nombreuses années les réflexions des mathématiciens de sa génération – et ce n'est qu'au milieu des années cinquante que les fonctions généralisées se sont propagées dans le monde entier dans les questions d'analyse » ([13], p. 185). Shilov achève son intervention en citant les mots de Szolem Mandelbrojt à propos des célèbres « Lectures on Cauchy's problem, 1922, (traduction française 1932, russe 1978) » : les conceptions développées dans ce travail conduisent à la topologie générale et à l'analyse fonctionnelle, et l'introduction de la notion de solution élémentaire est d'une très grande généralité en liaison avec les distributions (fonctions généralisées ([14], p. 4-5). De plus c'est à Hadamard qu'on doit le terme de fonctionnelle et celui d'analyse fonctionnelle. Jean Leray mentionne aussi ces travaux précurseurs. Ce qui a été dit ici ne minimise d'aucune manière les accomplissements de Sobolev, qui a été le premier à donner une définition rigoureuse – et de plusieurs manières – de la notion moderne de fonction généralisée et a posé les bases du développement ultérieur dans divers domaines de la théorie des solutions généralisées d'équations aux dérivées partielles et des fonctions généralisées, en tant que domaine autonome de l'analyse.

Presque tous les travaux de Sobolev sur la théorie des solutions et des fonctions généralisées ont été publiés en russe, sauf l'article en français de 1936 ([9], 22). Il n'est donc pas étonnant qu'à l'étranger ces travaux n'aient pas immédiatement attiré l'intérêt qu'ils méritaient. Cette remarque s'applique aussi au livre « Quelques applications de l'analyse fonctionnelle en physique mathématique » (Léningrad, 1950), qui reprenait le cours fait par Sobolev à l'époque à l'université[4]. Ce livre fut traduit en anglais seulement en 1963 (en allemand en 1964), il est cité plusieurs fois par Leray et, comme le remarque V. I. Smirnov « ce livre joua un rôle important dans l'utilisation des idées et des méthodes modernes de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle pour la solution de problèmes de la théorie des équations aux dérivées partielles » ([6] p. 191). En Russie les idées nouvelles de Sobolev, à la suite de celles de ses maîtres Gunther et Smirnov, se diffusèrent assez vite, et furent prolongées et développées à partir des années cinquante. Pour la diffusion de ces nouvelles directions de l'analyse mathématique à l'étranger un rôle majeur doit être attribué à l'ouvrage en deux tomes de Laurent Schwartz « Théorie des distributions », correspondant (1973) puis membre (1975) de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique. Plusieurs articles de Schwartz entre 1945 et 1948 utilisaient déjà l'expression « distributions ». Après la publication en 1950-1951 du livre de Schwartz, la théorie des distributions connut un très grand développement, et trouva de nombreuses applications nouvelles. La première étude historique sur l'histoire des distributions est celle de Jesper Lützen en 1980, où se trouvent analysés précisément mathématiquement de manière irréprochable les travaux de Sobolev, de Schwartz et de nombreux mathématiciens antérieurs ou contemporains. Malgré tous ces accomplissements le livre de Jesper Lützen contient quelques lacunes et de mon point de vue des appréciations peu convaincantes, qui s'expliquent par une connaissance imparfaite des travaux en russe en général et en particulier de Sobolev (bien que sa bibliographie contienne onze références qui ont été traduites en anglais, comme d'ailleurs le livre de 1950 déja mentionné et le volumineux cours, dans sa troisième version de 1954). La note de Leray sur les travaux de Sobolev complète de manière substantielle l'étude de Lützen.

Sans vouloir écrire l'histoire de la question, je me limiterai ici à quelques remarques sur le livre de Lützen. D'abord je ne peux pas être d'accord avec son appréciation des résultats obtenus par Sobolev puis Schwartz et sur leur place dans le développement de la théorie des distributions. L'essence des différences entre

[4] en fait rédigé pendant une période où une chute retenait Sobolev à l'écart du LIPAN, (cf. p. 38). [NdT]

leurs théories, c'est, selon Lützen (p. 64), le fait que pour Sobolev les distributions sont une technique pour résoudre un problème spécifique, alors que Schwartz mit au point la théorie des distributions sous de nombreux angles, et l'appliqua pour poser et résoudre de manière rigoureuse de nombreux problèmes. Il est vrai qu'en 1934 Sobolev commença par le problème de Cauchy pour l'équation des ondes (qui est hyperbolique), mais ensuite il ne s'est pas restreint à l'une des applications qu'il avait introduites et les a considérablement enrichies, comme le montre Jean Leray (« œuvre d'une étendue, d'une diversité, d'une puissance admirables »...). Il est vrai aussi que ces diverses contributions publiées en articles successifs ne furent pas réunies en une monographie, qui aurait eu sans doute le rôle fondateur du livre de Schwartz, devenu le livre de base pour de nombreux chercheurs à l'étranger et aussi en Russie. Lützen résume d'une formule la différence fondamentale entre les travaux de Sobolev et Schwartz : « Ainsi Sobolev inventa les distributions, mais la théorie des distributions fut créée par Schwartz » (p. 64). Cette réflexion est déclinée dans le livre à plusieurs occasions. Dans l'une (p. 67), après avoir cité Liusternik et Vishik dans un discours prononcé à l'occasion du cinquantième anniversaire de Sobolev (1959), Lützen confirme cette citation pour aussitôt ajouter que « the further development of the theory... was not the work of Sobolev but of Schwartz ». Sans vouloir le moins du monde diminuer l'importance primordiale du livre de Laurent Schwartz de 1950, je trouve bien plus équilibré le jugement émis par S. Vladimirov ([12], t. 4, p. 1104) : « Les fondements de la théorie mathématique des fonctions généralisées furent posés par Sobolev en 1936 en vue de la résolution du problème de Cauchy pour les équations hyperboliques, mais dans les années cinquante L. Schwartz donna un exposé systématique de la théorie et indiqua de nombreuses applications ». On aurait pu ajouter que l'exposé systématique et écrit dans un langage moderne de l'ouvrage de Schwartz a éclipsé les travaux de Sobolev. En ce qui concerne la connaissance qu'aurait eue Schwartz des découvertes antérieures de Sobolev, selon les déclarations que fit L. Schwartz en 1950-1951 et en 1974, il n'en connaissait rien avant 1945 (p. 67 de [16]). Aillleurs Lützen écrit que l'attention de Schwartz fut attirée sur les travaux de Sobolev par Leray en 1946[5]. Assurément Sobolev et Schwartz sont arrivés à leurs découvertes des « fonctions généralisées » et des « distributions » par des voies différentes. Mais assurément aussi il n' y a aucune raison d'associer le travail de Sobolev à la « préhistoire » de la théorie des distributions, comme Lützen l'affirme trois fois (p. 64, 67 et 156). Plus généralement Lützen accorde plus d'attention dans son livre à Laurent Schwartz qu'à Serge Sobolev. L'exposé des résultats selon la bibliographie est correct ; mais il aurait pu être plus détaillé et de ce point de vue la Notice de Leray contient des compléments précieux, si même elle ne contient pas assez de données biographiques sur Sobolev. Ces indications auraient dû et auraient pu être enrichies du texte de Liusternik et Vishik (que cite Lützen et qu'il utilise par ailleurs). Il n'y a aucune indication sur les professeurs de Sobolev ni dans le texte ni dans l'index de références. La biographie de L. Schwartz est traitée de manière opposée. Dans le chapitre 6 nous apprenons toutes les étapes de la vie de Schwartz, le nom des professeurs à l'École normale (Leray, Lévy, Hadamard) ; nous apprenons son appartenance au groupe Bourbaki, sa découverte en six mois des distributions, ses conversations avec de Rham (mentionnées

[5] Voir cependant p. 37 le témoignage de V. Chekchin

aussi par Leray), etc. Toute cette information est précieuse et il est fâcheux que le travail de maturation de Sobolev soit traité par Lützen en une demi-page (p. 60).

Bien sûr, les distinctions entre la « préhistoire » d'une théorie et son développement sont affaire de convention. La notion de « distribution » est apparue chez différents auteurs du début du XX[e] siècle sous une forme presque explicite, et finalement on peut remonter à Euler (voir plus loin ; Lützen l'évoque aussi). Cependant nous distinguons entre des idées appartenant à la préhistoire, qui sont déjà nées mais n'ont pas été encore introduites dans un cadre bien défini, avec les idées de l'histoire d'une théorie, où elles sont introduites par une définition précise, et où on s'attache à l'étude de leurs propriétés spécifiques. Ainsi on a raisonné avec des fonctions d'un type ou d'un autre dans la Grèce antique, au Moyen Âge, et au début de l'époque moderne, mais les fonctions comme objet d'étude mathématique dans toute leur généralité n'apparaissent qu'à la fin du XVII[e] siècle. Au demeurant le livre de Lützen s'appelle « Prehistory of... ». Il en résulte que Schwartz auquel est accordé la majorité du livre, fait partie aussi de la préhistoire de la théorie.

Si Lützen avait restreint son étude de la préhistoire des distributions à l'Europe de l'Ouest, il eût été naturel d'insister sur les travaux de Schwartz. Mais pour l'étude du développement des mathématiques, comme processus mondial (ce qu'il a toujours été), le plan suivi ne paraît pas correct. C'est ce que montre en tout cas l'étude historique des faits dans notre pays. Sobolev, à la suite de ses maîtres, joua un rôle important, en posant les bases des nombreuses études qui ont commencé avant même 1970, date de parution de l'article déjà cité de Smirnov, où on trouve le résumé de vingt ans de travaux en théorie des équations aux dérivées partielles, de type elliptique, hyperbolique et parabolique, ou de type mixte, ou encore avec des enrichissements de la théorie générale, travaux de O. A. Ladijenskaia, S. G. Mikhlin, N. N. Ouraltseva, et d'autres. Tous ces travaux n'étaient pas isolés des recherches faites à l'étranger. Des collaborations eurent lieu entre tous ces pays, parfois difficiles pour des questions de communication, par manque de contacts personnels, qui se sont beaucoup développés ces dernières années, et qui auparavant étaient remplacés par les nombreux journaux de références. Mes remarques sur l'histoire de la théorie des solutions généralisées et des fonctions généralisées ont pour but non seulement de préciser les conclusions du livre de Lützen, mais aussi d'introduire à la présentation de la candidature de Sobolev par Leray qui enrichit de manière essentielle l'étude de l'historien danois.

Il reste à faire quelques remarques complémentaires sur la proto-histoire antérieure, qui a conduit à la résolution de l'équation des cordes vibrantes et à la dispute entre d'Alembert et Euler, dispute qui s'est prolongée près de trente ans, à partir de 1750 et à laquelle ont participé de près ou de loin tous les mathématiciens du XVIII[e] siècle. Brièvement, d'Alembert excluait tout à fait le cas de discontinuité d'une dérivée et encore plus de la fonction elle-même. Dans mon livre sur l'histoire des mathématiques russes avant 1917 (Naouka 1968), j'ai montré qu'Euler, à partir de considérations physiques, jugeait nécessaire d'admettre comme solutions de problèmes de physique mathématique des fonctions et des courbes, selon son expression, « brisées » ; nous dirions que la position initiale de la corde et sa vitesse initiale sont des fonctions de la position continues par morceaux, autrement dit on permet des discontinuités (au sens moderne) des deux premières dérivées. Sans disposer de l'appareil mathématique nécessaire, Euler fit la description géométrique simplifiée de la propagation des ondes et de leur réflexion pour une corde fixée en un point. Je me permets de citer mon livre : « Ici des fils se tissent entre les idées d'Euler et les nouvelles méthodes du xx^{e} siècle, jusqu'aux fonctions généralisées de Sobolev et Schwartz » (p. 166, 169). Dans la suite de l'histoire des notions de solutions d'équations aux dérivées partielles l'historien S. S. Demidov s'appuyait comme moi sur une citation de d'Alembert (Opuscules, tome IX) : « Euler comprenait essentiellement comme solution de l'équation une solution généralisée, dont la définition correcte et encore plus la construction, dépassait les capacités des mathématiciens de l'époque » (p. 179). Nous ajoutions alors qu'en raison de son efficacité pratique, la construction d'Euler avait été l'objet de l'attention de nombreux mathématiciens de l'époque. Nos travaux utilisaient les études bien connues de Trusdell sur les travaux d'Euler en hydrodynamique et élasticité. Les références en russe sur ce sujet sont inconnues de Lützen (par exemple sur le tome IX des Opuscules de d'Alembert il ne cite que la conférence de Demidov au congrès international d'histoire des mathématiques de 1977, que d'ailleurs il utilise longuement page 15). Lützen fait aussi remonter à Euler la notion de solution généralisée et il trace un parallèle entre Euler et Sobolev. En utilisant la définition de solutions généralisées comme limite de suite de fonctions classiques, Lützen remarque qu'on trouve cette idée chez Euler en 1765 et Laplace en 1772, et que la définition rigoureuse fut introduite en 1935 par Sobolev puis par d'autres auteurs, en particulier Schwartz en 1944. On peut pour conclure signaler qu'Euler a introduit des fonctions qui pouvaient paraître étranges à ses contemporains (par exemple $(-1)^x$, avec x nombre réel quelconque ... mais pas la fonction delta !)

Références

[1] Relations scientifiques franco-russes, A. Grigorian, A. Yuskevitch, Naouka 1968

[2] Istori. Math. issledovanie, t. 31, 1989, Naouka

[3] Ibidem, 90, t. 32-33

[4] Bakhalov-Vladimirov-Gonchar. Serge Lvovich Sobolev, Ouspekhi Mat. Naouk, 1989, t. 43 ;5, p. 3-13

[5] Travaux du premier congrès des mathématiciens de l'Urss, Kharkov 1930, Gonti, 1935

[6] Sobolev Serge L. Séminaire Smirnov, Éd. de l'Académie des sciences de l'Urss, 1949

[7] Smirnov V. I. Équations aux dérivées partielles. Mathématiques à l'université de Léningrad, Red. Smirnov, LGU, 1970

[8] Travaux du second congrès de mathématiciens de l'Union, Léningrad, 24-30 juin 35

[9] Quarante ans de mathématiques en Urss, 1917-57, ED. Fizmatgiz, 1959, t. 2, Liusternik-Vishik

[10] Mathématiques en Urss, 1958-67, bibliographie, Naouka, 1970, t. 2

[11] Dieudonné Jean. Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700-1900, Éd. Hermann, 1978

[12] Encyclopédie des mathématiques, vol. 5.

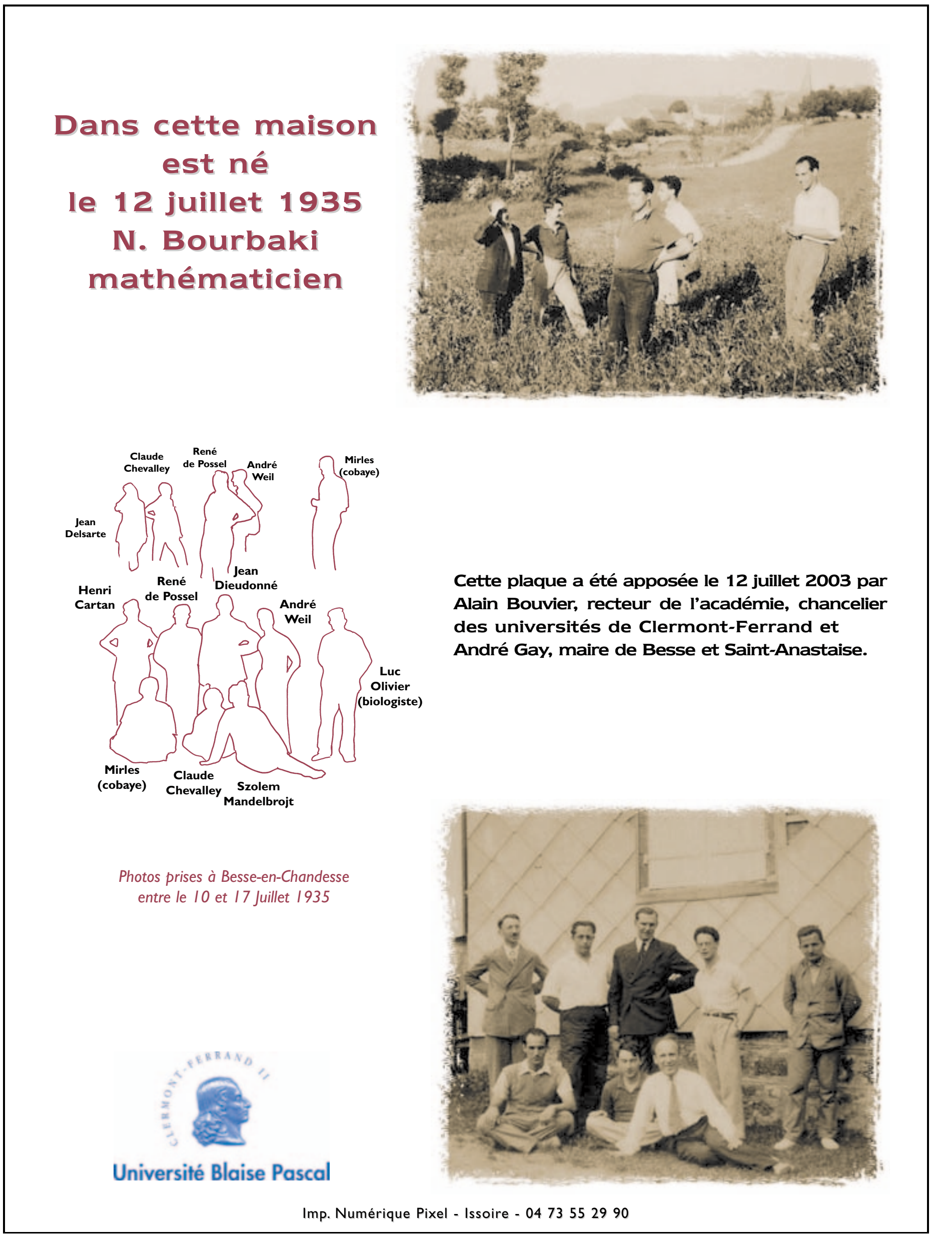
[13] Shilov G.E. Hadamard J. et la naissance de l'analyse fonctionnelle, Ousp. Mat. Naouk, 1964, t. 19, 3, p. 183-186

[14] Mandelbrojt Szolem, Hadamard Jacques. Dictionary of scientific biography, 1972, vol. 6

[15] Schwartz Laurent. Théorie des distributions, 1950-1951

[16] Lützen Lesper. The prehistory of the theory of distributions Springer, 1980, 232 p.

[17] Leray Jean. La vie et l'œuvre de Serge Sobolev La vie des sciences, Comptes rendus, série générale, t. 7, 1990, n° 6, p. 467-471.



Plaque commémorative de la naissance de Bourbaki.

Le rôle de Bourbaki dans les mathématiques du vingtième siècle

Christian Houzel

Commémoration de la naissance de N. Bourbaki,
Besse-en-Chandesse, 12 juillet 2003

Une plaque commémorative de la naissance de N. Bourbaki a été apposée par le Recteur de l'Académie de Clermont-Ferrand et le Maire de Besse[1] *sur un mur extérieur de la station biologique de l'université Blaise Pascal ; celle-ci hébergea en effet en juillet 1935 la réunion plénière de fondation du groupe qui allait marquer profondément son empreinte sur les mathématiques du xx*e *siècle.*
La cérémonie, au cours de laquelle Christian Houzel présenta la conférence que l'on peut lire ci-dessous, a rassemblé 120 mathématiciens et élus locaux ; le seul survivant des sept fondateurs, Henri Cartan, avait envoyé un message de sympathie et nous lui avons adressé nos vœux pour son quatre-vingt-dix-neuvième anniversaire ; Jacques Mandelbrojt, fils de Szolem, était présent ainsi que Roger Godement. À l'issue de la cérémonie, les participants ont pu visiter une exposition sur « Bourbaki et l'Auvergne » et apprécier le vin d'honneur offert par la Municipalité.

P.-L. Hennequin

Nous fêtons aujourd'hui un anniversaire : il y a exactement 68 ans se réunissait ici, à Besse-en-Chandesse, le 10 juillet 1935, le premier Congrès Bourbaki ou « réunion plénière de fondation ». Un groupe de jeunes mathématiciens avait en effet décidé quelques mois auparavant, en décembre 1934, de travailler ensemble à la rédaction d'un grand « Traité d'analyse ». Le cours d'analyse d'Édouard Goursat, trois volumes datant du début du vingtième siècle, était alors la référence courante, mais nos jeunes mathématiciens le trouvaient vieillot et peu adapté aux développements plus récents des mathématiques, comme ce qu'ils avaient pu apprendre au cours de voyages en Allemagne à la fin des années vingt. Ils voulaient aussi inclure le point de vue du père de l'un d'entre eux, Élie Cartan (1869-1951), sur les formes différentielles extérieures et établir la formule générale de Stokes correspondante. Ce traité devait pouvoir servir aussi bien aux étudiants qu'aux mathématiciens, aux physiciens et aux ingénieurs.

La réunion de Besse s'est tenue du 10 au 20 juillet avec Claude Chevalley, Jean Dieudonné, René de Possel, Henri Cartan, Szolem Mandelbrojt, Jean Delsarte, André Weil, le physicien Jean Coulomb, Charles Ehresmann et un « cobaye » du nom de Mirles. Elle avait été préparée par un certain nombre de rapports sur les divers chapitres prévus pour le traité, chaque rapport ayant été confié à trois membres et attendu pour le 1er juillet. La liste de ces rapports, avec les noms des rapporteurs, se trouve dans l'annexe II. L'ordre du jour de la réunion était extrêmement chargé et on est étonné qu'il ait pu être tenu en dix jours ; il s'agissait

[1] Besse-en-Chandesse est un petit bourg médiéval et touristique d'Auvergne au sud du Sancy.

de discuter les divers rapports prêts et d'examiner en commission les parties les moins avancées dans leur préparation. Il en est sorti un gros dossier contenant des décisions de rédaction de chapitres ou de nouveaux rapports ; on trouvera, dans l'annexe III, un extrait de ce dossier. L'ouvrage devait comporter 2 500 à 3 000 pages et les rédactions étaient attendues pour des dates proches, qui se sont révélées irréalistes.

Le premier fascicule *Théorie des ensembles : Résultats* est paru seulement en 1940 (daté de 1939) et il a été suivi, dans les années quarante, des premiers chapitres de la *Topologie générale* et de l'*Algèbre*. Le projet avait complètement changé de nature et il était devenu une exposition systématique et unifiée des parties fondamentales des mathématiques selon la méthode axiomatique inspirée de Hilbert. Tout ce qui concerne le calcul différentiel, la géométrie, les fonctions analytiques, les équations fonctionnelles et les fonctions spéciales, et qui constituait l'essentiel du plan initial, a disparu.

Pour comprendre ce qui s'est passé, il faut resituer Bourbaki dans la conjoncture mathématique de l'époque. En effet la période 1935-1965, où se situe l'activité de Bourbaki, est assez particulière dans l'histoire des mathématiques. Elle se caractérise par un effort des mathématiciens pour remettre en chantier les bases de leurs théories et pour construire de nouvelles machineries théoriques dans l'espoir qu'elles permettraient d'aborder plus efficacement les problèmes sur lesquels on butait alors. Ce mouvement touchait presque tous les secteurs mathématiques et il se développait dans le monde entier et pas seulement en France. Voici quelques exemples de ces nouvelles machineries :

– L'algébrisation de la topologie et la création de l'algèbre homologique. Les recherches en topologie avaient abouti à des ouvrages de synthèse comme le *Lehrbuch der Topologie* de Seifert et Threlfall (1934) ou la *Topologie* d'Alexandroff et Hopf (1935), mais il restait plusieurs points obscurs et ces synthèses étaient chargées d'hypothèses et de restrictions gênantes. Dans la période suivante, ces restrictions ont été éliminées tandis que de nouvelles notions apparaissaient, comme celles de cohomologie (Alexander 1935, Kolmogoroff 1936), de groupes d'homotopie supérieurs (Cech 1932, Hurewicz 1935-1936), d'espace fibré (Seifert 1933, Whitney 1938, Ehresmann et Feldbau 1942), de classes caractéristiques (Stiefel 1939) ou de catégories et foncteurs (Eilenberg et Mac Lane 1942). Une nouvelle synthèse a pu paraître en 1952, les *Foundations of Algebraic Topology* d'Eilenberg et Steenrod. Ces nouvelles théories ont conduit au développement d'un nouvel outil algébrique, l'algèbre homologique, codifiée dans l'*Homological Algebra* de Cartan et Eilenberg en 1956.

– La théorie des faisceaux, issue des travaux de Leray sur la topologie algébrique et destinée à prendre en compte les relations entre les propriétés locales et les propriétés globales (Cours de captivité de Leray, publié en 1945 ; suite spectrale 1946 ; cours au Collège de France, publié en 1950. *Séminaire Cartan* 1948-1951. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux* de Godement, 1958).

– La géométrie algébrique abstraite et l'algèbre commutative. L'application de la géométrie algébrique à certains problèmes de théorie des nombres, spécialement en analyse diophantienne, nécessitait le développement d'une géométrie où les coordonnées ne sont plus nécessairement des nombres complexes, mais peuvent être prises dans un corps commutatif arbitraire, ou même dans un anneau commutatif. La première synthèse est celle d'André Weil, dans les *Foundations of algebraic geometry* (1946). Une autre démarche sera entreprise par J.-P. Serre dans l'article *Faisceaux algébriques cohérents* (1955) et poursuivie, d'une manière considérablement élargie, par Grothendieck à partir de 1957. Les moyens algébriques nécessaires à cette nouvelle géométrie, c'est-à-dire l'algèbre commutative, peuvent se trouver dans la *Commutative Algebra* de Samuel et Zariski (1958).

– L'analyse fonctionnelle, avec la théorie des distributions. Après l'impulsion donnée par les recherches sur les équations intégrales, le développement de ces théories était rendu nécessaire d'une part par l'élargissement de l'analyse de Fourier, d'autre part par les problèmes de la théorie des équations aux dérivées partielles (*Normierte Ringe* de Gelfand, 1941 ; article de Sobolev en 1936, *Théorie des distributions* de Schwartz, 1951).

– La théorie des représentations linéaires des groupes, en particulier des groupes de Lie (A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques*, 1940 ; travaux de Gelfand, Raikov et Neumark, 1943-1950, puis travaux de Mackey et ceux de Harish Chandra).

– L'axiomatisation des probabilités et la théorie des processus stochastiques (Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Warscheinlichkeitsrechnung*, 1933 ; N. Wiener, *Differential Space*, 1923 ; P. Lévy, *Processus stochastiques et mouvement brownien*, 1948).

– Logique et théorie des modèles. Après les résultats d'incomplétude de Gödel en 1931, la logique mathématique a pris un nouveau départ avec d'un côté, vers 1936, les travaux de Kleene, Church et Turing sur la notion de calculabilité, de l'autre, avec les travaux de Tarski à partir de 1931 sur la théorie des modèles.

On notera que les collaborateurs de Bourbaki ont largement contribué à toutes ces constructions, exception faite de celles qui concernent les probabilités et la logique.

Cet effort de refondation a eu pour conséquence un certain repli des mathématiques sur elles-mêmes, repli encore accentué par un éloignement du côté des physiciens. Rappelons en effet que l'édification de la relativité générale et de la mécanique quantique avait été accompagnée d'une collaboration étroite entre mathématiciens et physiciens. Il suffit, pour s'en convaincre, de citer les noms de H. Weyl (*Raum, Zeit, Materie*, 1918 et *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, 1928) ou de J. von Neumann (*Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, 1932). Mais, dans les années trente, la demande de mathématiques de la part des physiciens a disparu et il a fallu attendre les années soixante-dix pour qu'elle soit vraiment réactivée, avec les théories de jauge, la théorie quantique des champs et la supersymétrie.

Le repli des mathématiques sur elles-mêmes, que nous venons d'esquisser, a donné un caractère particulier au développement des mathématiques en direction des applications pendant cette période, avec à terme une séparation de nature sociologique entre mathématiciens « purs » et mathématiciens « appliqués » ; une telle séparation n'était guère concevable dans les périodes précédentes. Il faut dire que l'effort de guerre a suscité, entre 1939 et 1945 puis après avec la guerre froide, un intense développement vers les applications (mécanique des fluides, probabilités et statistiques, recherche opérationnelle, etc.) ; ceci a eu lieu aux États-Unis, en

Grande Bretagne et en URSS, mais pas dans la France occupée, où les « mathématiques appliquées » sont apparues beaucoup plus tard, dans les années soixante.

La tradition mathématique française avant la deuxième guerre mondiale était principalement tournée vers l'analyse mathématique et elle ignorait presque totalement des secteurs développés dans d'autres pays, comme la topologie algébrique, la géométrie algébrique ou la théorie des nombres. Une des raisons de cet isolement français est sans doute l'hécatombe causée par la première guerre mondiale, qui a privé la France d'un renouvellement des générations de chercheurs. Lorsqu'on consulte l'annuaire des anciens élèves de l'École normale supérieure, on constate que près de la moitié de chaque promotion mobilisable a été tuée au combat. Mais, comme nous l'avons dit plus haut, nos jeunes mathématiciens avaient tous fait un séjour en Allemagne à la fin des années vingt et ils y avaient appris de nouvelles mathématiques, alors dominées par l'algèbre, avec l'École de Hilbert, E. Noether et E. Artin. Le livre de B. van der Waerden *Moderne Algebra* (1931) était devenu pour eux un modèle de rédaction, avec des énoncés précis de définitions, lemmes, propositions, théorèmes et corollaires. Ce style contrastait avec la rédaction assez lâche des mathématiques françaises antérieures, qui se présentait en général sous la forme d'un texte continu sans énoncé clair permettant des références. Et c'est par le style de ses rédactions que Bourbaki a eu l'influence la plus durable.

En suivant Hilbert, Bourbaki a adopté la méthode axiomatique d'exposition des mathématiques. Il s'en explique dans un article de 1948, « L'architecture des mathématiques » publié dans *Les grands courants de la pensée mathématique*. Cette méthode consiste, après avoir analysé les démonstrations des théorèmes pour en extraire les hypothèses utilisées, à poser ces hypothèses comme axiomes de la théorie et à ne plus faire intervenir que ces axiomes dans les démonstrations. Il en résulte une théorie beaucoup plus abstraite, mais dont le champ d'application est plus vaste. La méthode s'avère féconde, car elle permet de transporter des idées venant d'une application particulière au niveau abstrait et d'utiliser ensuite ces idées dans toutes les autres applications, mettant ainsi en œuvre une sorte de transfert d'intuition. La méthode axiomatique avait été élaborée par Hilbert pour analyser les fondements de la géométrie élémentaire et elle s'était développée en algèbre ainsi qu'en topologie générale. Bourbaki voulait l'étendre à l'ensemble des mathématiques.

Son entreprise était en effet dominée par l'idée de l'unité des mathématiques, idée très à la mode dans les années trente, comme en témoigne la thèse complémentaire d'Albert Lautman *Essai sur l'unité des sciences mathématiques dans leur état actuel* (1938). Ce thème s'appuie sur le développement des mathématiques depuis la deuxième moitié du 19[e] siècle, avec en particulier les constructions arithmétiques des nombres réels de Dedekind, Weierstrass et Cantor, qui ont permis de fonder l'analyse sur la théorie des nombres entiers, puis avec la théorie des ensembles qui englobe la théorie des nombres entiers vus comme les cardinaux finis. Bourbaki a donc intitulé son traité *Éléments de mathématique*, où « mathématique » est au singulier contrairement à l'usage français ; quant au mot « éléments », il se réfère au titre de l'ouvrage d'Euclide qui signifie « parties fondamentales » sur lesquelles se construisent les parties plus spécialisées.

La mathématique exposée selon la méthode axiomatique peut paraître très abstraite et le contenu de ses objets risque de se dissoudre. L'idée de structure intervient ici pour redonner du corps aux objets mathématiques. Elle répond à l'exigence de clarification de la notion d'isomorphisme de deux objets définis axiomatiquement, deux objets isomorphes devant avoir la même « structure » ; elle était déjà courante en algèbre abstraite avec la théorie des corps commutatifs (Steinitz 1910), la théorie des groupes et l'algèbre linéaire. Fidèle au thème de l'unité des mathématiques, Bourbaki a étendu l'idée de structure à l'ensemble de sa construction, intitulant la première partie de son traité *Les structures fondamentales de l'Analyse*. Ces structures fondamentales sont : les structures d'ordre (*Théorie des ensembles*, chap. III), les structures algébriques, les structures topologiques et des structures composées comme les espaces vectoriels topologiques ou l'intégration. Les autres parties sont plus spécialisées : *Algèbre commutative, Théorie spectrale, Groupes de Lie*.

Le terme de structure a été galvaudé dans les années soixante, à la suite du succès des livres de Claude Lévi-Strauss comme *Anthropologie structurale* (1958). Dans ce sens, il vient d'une extension aux « sciences humaines » de l'idée de structure linguistique. C'est en effet le linguiste R. Jakobson qui avait suggéré à Lévi-Strauss cette forme de structuralisme pendant leur exil commun aux États-Unis durant la guerre. Il est clair que les structures de Bourbaki ne doivent rien à cette vogue structuraliste, même si les structuralistes des années soixante ont parfois fait référence à Bourbaki pour donner une caution scientifique à leurs spéculations.

On sait que l'idée de structure s'est rapidement révélée insuffisante. À côté des isomorphismes, on doit plus généralement considérer les morphismes, qui ne conservent pas la structure et qui permettent de dégager la notion de dépendance fonctorielle. C'est ce qu'ont compris Mac Lane et Eilenberg dans les années quarante à propos de l'homologie des espaces topologiques et c'est la source de la théorie des catégories. Après d'âpres discussions dans les années cinquante, Bourbaki a renoncé à reprendre toute sa construction sur la base de la théorie des catégories, ce qui lui a été beaucoup reproché. Il s'est ainsi trouvé démodé dans une certaine mesure. Mais il faut dire que Bourbaki n'a jamais été intéressé aux problèmes de fondement des mathématiques, considérant ces problèmes comme dépassés après les résultats de Gödel.

Dans les années cinquante, on pouvait étudier les mathématiques dans le traité de Bourbaki, mais je ne pense pas que cela se fasse maintenant. À la fin des années soixante, un mouvement de réforme de l'enseignement secondaire des mathématiques a été lancé dans la plupart des pays et ce mouvement s'est malheureusement réclamé de Bourbaki. Il en est sorti ce qu'on a appelé les « mathématiques modernes », dont la nocivité ne fait plus de doute. Mais il est injuste d'en faire porter le poids à Bourbaki, dont la seule faute a été de se désintéresser du problème après avoir laissé Dieudonné faire une propagande plutôt dangereuse auprès des enseignants.

À l'heure actuelle, Bourbaki existe toujours, mais son activité visible se réduit à l'organisation du Séminaire Bourbaki, qui se réunit trois week-ends par an à Paris pour exposer au public mathématicien les avancées mathématiques les plus récentes. Ce séminaire a eu un très grand rôle dans la diffusion des connaissances mathématiques et la collection de ses exposés rédigés est une référence indispensable.

Références

J. W. Alexander, On the chains of a complex and their duals, Proc. Ac. Sc. USA, 21 (1935), p. 509-511

P. Alexandroff et H. Hopf, Topologie I, Springer 1935

L. Beaulieu, Bourbaki : une histoire du groupe des mathématiciens français et de ses travaux, Thèse, Université de Montréal, 1989

N. Bourbaki, L'architecture des mathématiques, Les grands courants de la pensée mathématique, Cahier du Sud, 1948, p. 35-47

Éléments de mathématique, Première partie, Les structures fondamentales de l'analyse, Hermann, 1939-1971 (29 fascicules)

H. Cartan, Séminaire « Cohomologie des groupes, suites spectrales, faisceaux », Paris, 1950-1951

H. Cartan et S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton University Press, 1956

A. Church, An unsolvable problem of elementary number theory, Amer. J. of Math. 58 (1936), p. 345-363

J. Dieudonné, Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques, Revue scientifique, 77, 1939, p. 224-232

The difficult birth of mathematical structures (1840-1940), Scientific culture in the contemporary world, Scientia

S. Eilenberg et N. E. Steenrod, Foundations of algebraic topology, Princeton University Press, 1952

I. Gelfand, Normierte Ringe, Mat. Sbor. 9 (1941), p. 3-24

I. Gelfand et D. Raikov, Représentations unitaires irréductibles des groupes localement bicompacts, ibid. 13 (1943), p. 301-316 (en russe)

I. Gelfand et M. Neumark, Anneaux normés avec involution et leurs représentations, Izv. Ak. N. SSSR, ser. mat. 11 (1948), p. 445-480 (en russe)

K. Gödel, Ueber formal unentscheidbare Qätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monats. math. phys. 38 (1931), p. 173-198

R. Godement, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, 1958

É. Goursat, Cours d'analyse mathématique, 6e éd., Gauthier-Villars, 1942 (3 vol.)

A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku math. J. 9 (1957), p. 119-221

A. Grothendieck et J. Dieudonné, Éléments de géométrie algébrique I, Le langage des schémas, Publ. math. de l'IHÉS 4 (1960), p. 1-228

Harish-Chandra, Représentations of semi-simple Lie groups, Proc. Nat. Ac. Sc. USA 37 (1951), p. 170-173 et 362-369

D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Teubner, 1899

S. C. Kleene, General recursive functions of natural numbers, Math. Ann. 112 (1936), p. 236-253

A. Kolmogoroff, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer, 1933

— , Ueber die Dualität im Aufbau der kombinatorischen Topologie, Mat. Sbor. 1 (1936), p. 701-705

A. Lautman, Essai sur l'unité des sciences mathématiques dans leur développement actuel, Paris, 1937

J. Leray, Les complexes d'un espace topologique ; L'homologie d'un espace topologique ; Transformations et homéomorphies dans les espaces topologiques, CRAS 214 (1942), p. 781-783, 839-841 et 897-899

— , Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations ; Sur la position d'un ensemble fermé de points d'un espace topologique ; Sur les équations et les transformations, J. de math. pures et appl., 9e sér., t. 24 (1945), p. 95-167, 169-199 et 201-248

— , L'anneau d'homologie d'une représentation ; Structure de l'anneau d'homologie d'une représentation, CRAS 222 (1946), p. 1366-1368 et 1419-1422

— , Propriétés de l'anneau d'homologie de la projection d'un espace fibré sur sa base ; Sur l'anneau d'homologie de l'espace homogène quotient d'un groupe clos par un sous-groupe abélien, connexe, maximum, CRAS 223 (1946), p. 395-397 et 412-415

— , L'homologie filtrée, XIIème Coll. Intern. de Top. Alg., CNRS, Paris (1949), p. 61-82
L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une

application continue ; L'homologie d'un espace fibré dont la fibre est connexe, J. de math. pures et appl., 9ème sér., t. 29 (1950), p. 1-139 et 169-213
C. Lévi-Strauss, Anthropologie structurale, Plon, 1958
P. Lévy, Processus stochastiques et mouvement brownien, Gauthier-Villars, 1948
G. W. Mackey, Imprimitivity for representations of locally compact groups, Proc. Nat. Ac. Sc. USA 35 (1949), p. 537-545
— , On induced representations of groups, Amer. J. of Math. 73 (1951), p. 576-592
L. Schwartz, Théorie des distributions, Hermann, 1950-1951 (2 vol.)
S. L. Soboleff, Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales, Mat. Sbor. 1 (1936), p. 39-72
H. Seifert et W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Teubner, 1934
J.-P. Serre, Faisceaux algébriques cohérents, Ann. of Math. 61 (1955), p. 197-278
A. Tarski, O pejJciu prawdy w odniesieniu do sformalisowanych nauk dedukcyjnych, Ruch Filosz. 12 (1930-31), p. 210-311
A. Turing, On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, Proc. London Math. Soc. ser. 2, vol. 42, (1936-37), p. 230-265
A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, 1940
— , Foundations of algebraic geometry, Amer. Math. Soc. Coll. 29, 1946
N. Wiener, Differential Space, J. math. phys. MIT 2 (1923), p. 131-174
O. Zariski et P. Samuel, Commutative algebra, Van Nostrand, 1958

Annexe I

Les archives de Bourbaki

Les archives de Bourbaki jusque vers 1950 sont maintenant ouvertes au public des mathématiciens et des historiens des mathématiques. En 1997, l'Association des collaborateurs de N. Bourbaki a décidé de confier ces archives au CNRS ; cette décision a abouti à la signature, en décembre 1999, d'une convention entre l'Association et le CNRS. J.-M. Lemaire, alors directeur adjoint pour les mathématiques au département sciences physiques et mathématiques du CNRS, m'a demandé de m'occuper de cette affaire et nous avons créé, en septembre 1999, une unité propre de service (UPS 2065) intitulée « Archives de la création mathématique » pour préparer et organiser la mise à disposition du public des archives de Bourbaki. Au printemps 2000 le CNRS a recruté un chercheur pour l'unité, L. Beaulieu, venant du Québec avec, à son actif, une thèse sur l'histoire de Bourbaki soutenue en 1989 ; puis une secrétaire, C. Harcour a été affectée à l'unité.

Le travail des Archives de la création mathématique a commencé par l'élaboration d'un catalogue détaillé des archives de Bourbaki. Celles-ci étaient partagées entre deux localités : le secrétariat de Bourbaki à Paris et l'Institut Élie Cartan à Nancy. Un premier catalogage avait été entamé dans chacune des deux localités, mais nous avons dû reprendre ces deux catalogues pour y inclure plus d'informations et pour les unifier sous une forme commune. Le catalogue comprend environ 600 fiches ; chaque fiche décrit l'un des documents d'archives, non seulement dans son aspect matériel, mais aussi dans son contenu. Il est complété par un index de mots-clés. Ce catalogue est une œuvre collective (L. Beaulieu, moi-même et trois vacataires, doctorants en histoire des mathématiques) ; il aurait dû être mis en ligne sur Internet, mais des difficultés techniques ont empêché cette opération. Seule une liste des archives est en ligne sur le site de l'unité. Les archives contiennent trois types de documents : – la *Tribu*, journal interne de Bourbaki pour les années 1940-1953 ; elle est précédée par les comptes rendus des réunions sur le *Traité d'analyse* (pour les premiers mois) et par le *Journal de Bourbaki* (pour les années antérieures à 1940). On y trouve les comptes rendus des congrès Bourbaki et les décisions sur les rédactions.

– les rédactions jusqu'au numéro 199 (une réédition du chapitre II d'Algèbre)

– la correspondance, comprenant environ 150 lettres, surtout de la période 1945-1950 ; cette correspondance est particulièrement intense et instructive pendant le temps où Weil et Dieudonné étaient au Brésil, tandis que les autres membres de Bourbaki étaient en France.

La deuxième étape du travail a consisté à photocopier la totalité des archives, à la faire microfilmer et saisir numériquement sur CD-Rom, dont la consultation est plus simple que celle des microfilms. Une charte de l'utilisateur des archives a été élaborée par un comité scientifique, dont le rôle est de contrôler l'accès aux archives et de le réserver aux gens sérieux. La consultation a déjà commencé, d'ailleurs sur un plan international puisque nous avons reçu un italien, un allemand et un américain.

D'autres étapes étaient prévues :

– la constitution d'une liste détaillée de mots-clés présents dans les documents eux-mêmes (et non plus dans le catalogue), pour faciliter la consultation.

– le traitement, dans les années à venir, des archives Bourbaki postérieures à 1950. A. Guichardet m'a d'ailleurs confié la partie des papiers laissés par L. Schwartz qui concerne Bourbaki.

– le traitement, selon les mêmes méthodes, d'autres fonds d'archives, comme les archives de J. Leray ou celles d'É. Cartan. Car l'unité a élaboré des méthodes originales de travail, déjà reconnues à l'étranger puisque nous avons été sollicités par l'Institut d'histoire des sciences de l'Académie de Moscou pour l'aider à traiter les archives d'Alexandroff et de Kolmogoroff (dont une partie est en français).

– l'édition de textes mathématiques, comme les œuvres de G. Reeb, celles d'A. Néron ou celles de J. Liouville, ou encore la correspondance de Bourbaki.

Mais ces étapes devront rester à l'état de projet ou dépendre de notre travail individuel sans soutien institutionnel. Les Archives de la création mathématique ont été brutalement supprimées à la fin du mois d'août 2003, en profitant de mon départ à la retraite. Cette décision de fermeture a d'ailleurs été prise d'une manière scandaleuse, par la seule volonté du directeur adjoint, sans aucune consultation de personnalité compétente et je ne l'ai apprise que par des bruits de couloir. Elle m'a été confirmée oralement au cours d'un rendez-vous que j'avais demandé au mois de mars 2003, mais le directeur adjoint n'a pas daigné répondre au courrier que je lui ai fait parvenir. Ceci m'a amené à écrire à la directrice générale du CNRS, qui m'a répondu d'une manière évasive en quelques lignes.

Cette décision, justifiée seulement par un souci d'économie, est mal venue pour plusieurs raisons :

– l'argument d'économie n'est pas très sérieux, car l'unité a un très petit budget. Les seules dépenses importantes ont été occasionnées par le microfilmage et la fabrication des CD-Rom. D'ailleurs la suppression d'une unité qui a fait ses preuves après quatre ans d'existence seulement ne paraît pas un modèle de bonne gestion.

– le savoir-faire et les méthodes que nous avions élaborés pendant ces quatre ans se trouvent condamnés au sommeil ou à l'oubli.

– l'unité était une structure indispensable pour gérer l'accès du public aux archives ainsi que les problèmes de citation ou de reproduction de textes.

– un centre d'archives doit rester vivant pour pouvoir accueillir de nouveaux documents, comme les archives Bourbaki plus récentes.

Ceci n'est qu'un exemple faisant ressortir la mauvaise situation de l'histoire des mathématiques dans notre pays. Beaucoup de mathématiciens ont, vis-à-vis de cette activité, une réaction de rejet ou une réaction d'indifférence, ou bien ils prennent des décisions sans être informés et sans prendre aucun avis auprès de personnes compétentes, par exemple parmi les chercheurs étrangers, ce qui est peut-être une forme de mépris.

Annexe II
Liste des rapports attendus pour le 1er juillet 1935

Titre	Auteurs	État
Algèbre	Chevalley, Dieudonné, R. de Possel	prêt
Fonctions analytiques	Cartan, Mandelbrojt, Delsarte	insuffisant
Intégration	Delsarte, R. de Possel, Weil	prêt (?)
Équations différentielles	Coulomb, Dieudonné, Weil	pas prêt
O et o	Coulomb, Dieudonné, Weil	prêt
Équations intégrales	Leray, Delsarte, Cartan	à discuter
Théorèmes d'existence	Leray, Cartan, Weil	à discuter
Équations aux dérivées partielles	Chevalley, Delsarte, Weil	pas prêt,
Différentielles et formes différentielles	Cartan, Leray, R. de Possel	à travailler
Topologie	Chevalley, Dieudonné, R. de Possel	à travailler
Calcul des variations	Coulomb, Leray, Weil	à travailler
Fonctions spéciales	Coulomb, Mandelbrojt, Cartan	à travailler
Géométrie	Cartan, Chevalley, Delsarte	à travailler
Séries de Fourier etc.	Delsarte, Mandelbrojt, Weil	à travailler

Annexe III

Plan du traité d'analyse à l'issue du Congrès de Besse

Titre	Nbre pages	Auteur(s)	Date prévue
Ensembles abstraits	20	Cartan	décembre
Algèbre scolaire	120	Delsarte	fin de l'année
Nombres réels et complexes, séries	15	Dieudonné	décembre
Topologie, théorèmes d'existence	300	Weil, R. de Possel	(fin février)
Topologie des nombres complexes ; formes quadratiques et hermitiennes. Corps convexes, groupe orthogonal	50	Dieudonné	(février)
Intégration	100	Mandelbrojt	fin mai
Multiplication extérieure, déterminants, formes de Pfaff	100	Weil, Cartan	(avant Pâques)
Tenseurs, géométrie	100	Ehresmann	fin de l'année
Produits infinis, inégalités, O et o	80	Chevalley	février
Fonctions analytiques générales	200	R. de Possel	(avant Pâques)
Fonctions analytiques spéciales	100	Mandelbrojt	(avant Pâques)
Représentation approchée	150	Dieudonné	mai
Heaviside et calcul opérationnel	70	Delsarte	(février)
Équations diff. générales	200	Chevalley	moitié à la fin de l'année
Équations diff. spéciales	100	Delsarte	
Élie Cartan	150	Weil	
Équations intégrales	100	Mandelbrojt	(mai)
Potentiel, équations elliptiques	80	Cartan	
Équations hyperboliques et paraboliques	100	Delsarte	
Calcul des variations	120	Cartan	
Fonctions spéciales :			
– Bessel etc.	150	Coulomb	
– algébriques	100	Chevalley	
– elliptiques	50	Dieudonné	
– thêta	50	Weil	
– gamma, zêta	40	Mandelbrojt	
Calcul numérique	100	Coulomb	
Tout le reste	500	Bourbaki	
Fonctions de variable réelle	?	Dieudonné	mai

Remarque : Lorsque la date est entre parenthèses, seul un rapport est promis.