LIVRES

Introduction to the h-principle
Y. Eliashberg, N. Mishachev
Graduate Studies in Mathematics, 48. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. 206 p. 30 \$. ISBN : 0-8218-3227-1

Considérons deux courbes lisses, immergées dans le plan. Comment décider si elles sont homotopes parmi les immersions ? La réponse, due à Whitney, est la suivante : étant donné une immersion $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$ du cercle dans le plan, le vecteur vitesse normalisé $\dot{\gamma}/\|\dot{\gamma}\|$ définit une application du cercle dans lui même. Le degré de cette application est appelé *l'indice de l'immersion*. Deux immersions sont homotopes parmi les immersions si et seulement si elles ont même indice.

On regroupe sous l'appellation informelle « h-principe » un ensemble de résultats permettant d'obtenir des informations sur l'ensemble des solutions de « relations différentielles » à partir de calculs purement homotopiques. Par « relation différentielle » on entend une contrainte portant sur les applications entre deux variétés, ainsi que sur leurs dérivées successives. Les EDP sont des exemples de relations différentielles. Une immersion du cercle dans le plan $\gamma : S^1 \mapsto \mathbb{R}^2$ est solution de la relation différentielle définie par la contrainte $\dot{\gamma} \neq 0$.

Dans le cas d'applications entre variétés plus générales, il faut introduire le langage des jets pour avoir une formulation intrinsèque. Une relation différentielle n'est qu'un sous-ensemble $\mathcal{R}$ de l'espace total du fibré $J^k(M,N)$ des jets d'ordre k d'applications de M dans N. Rappelons que le k-jet en un point $x \in M$ d'une application $\varphi : M \mapsto N$ est son « développement limité » à l'ordre k en x (il est possible de donner un sens intrinsèque à cette définition) et que $J^k(M,N)$ est l'ensemble de tous les k-jets, au dessus de tous les points de M. C'est un fibré de base M. *L'extension en k-jets* d'une application φ est la section dont la valeur en $x \in M$ est le k-jet de φ en x. Les sections construites de cette manière à partir d'une application sont dites *holonomes*.

Une *solution* de $\mathcal{R}$ est une application $\varphi : M \mapsto N$ dont l'extension en k-jets est incluse dans $\mathcal{R}$. Appelons « solutions formelles » de $\mathcal{R}$ les sections de $J^k(M,N)$ dont l'image est contenue dans $\mathcal{R}$. Si φ est une solution de $\mathcal{R}$, alors son extension en k-jets est une solution formelle. La réciproque est loin d'être vraie ! Mais l'existence d'une solution formelle, qui est un problème purement homotopique, est bien une condition nécessaire à l'existence d'une « vraie » solution. On dit que $\mathcal{R}$ vérifie un h-principe si toute solution formelle est homotope parmi les solutions formelles à (l'extension en k-jets d') une « vraie » solution, c'est à dire à une section holonome. Le théorème de Whitney ci-dessus, qui porte sur des familles de solutions, est une version paramétrique du h-principe : deux solutions sont homotopes parmi les solutions si et seulement si elles le sont parmi les solutions formelles.

Il est remarquable que nombreuses relations différentielles motivées par la topologie et la géométrie vérifient des h-principes. Parfois, les calculs homotopiques auxquels ont est réduit sont même faisables. Les exemples les plus fameux sont le théorème de Nash-Kuiper (1954), qui assure qu'il existe des *plongements isométriques* de classe $\mathcal{C}^1$ (mais pas $\mathcal{C}^2$!) de la sphère standard de dimension 2 dans toute boule, aussi petite soit elle, de $\mathbb{R}^3$, ainsi que le « retournement de la sphère » (qui résulte de la classification des immersions des sphères dans les espaces euclidiens, due à Smale, en 1958). En 1969, Gromov a extrait la substantifique moelle de telles situations, et forgé le langage du « h-principe ». Son point de vue fait l'objet d'un livre très dense, « Partial differential relations » [Gro]. La littérature générale parue depuis sur le sujet n'est pas abondante : un livre de Spring [Spr] et un autre de Adachi [Ada], des articles de Haefliger [Hae] et Poénaru [Poe]. Il existe aussi des notes de cours de Geiges [Gei], Giroux [Gir] et Borrelli [Bor], qui sont peut-être les moyens les plus rapides pour s'initier au sujet.

L'aspect le plus original du livre de Eliashberg et Mishachev est certainement *le théorème d'approximation holonomique*, présenté dès la première partie après une introduction aux espaces de jets et au théorème de transversalité de Thom.

Grosso modo, ce théorème affirme le fait suivant : étant donné une sous-variété A de codimension positive dans M, et une section F de $J^k(M,N)$ définie au voisinage de A, on peut déformer A dans ce voisinage en une nouvelle sous-variété A', et trouver une section *holonome* définie sur un voisinage de A' qui approxime F.

Ce théorème et ses variantes sont ensuite mis en application dans les parties 2 et 3, qui concernent le h-principe proprement dit. Il est à noter que l'on trouve dans la troisième partie une introduction à la géométrie symplectique et de contact assez détaillée, suivie de nombreux résultats rendant compte de l'aspect « flexible » de ces théories (existence de structures symplectiques et de contact sur les variétés ouvertes, classification des immersions lagrangiennes et legendriennes...). La quatrième partie est consacrée à une autre méthode, *l'intégration convexe*, permettant de prouver des h-principes dans d'autres contextes. De très nombreux exercices, souvent non triviaux, parsèment le texte. La bibliographie est très complète. Si beaucoup de preuves sont assez longues et subtiles, les techniques utilisées sont localement triviales et ne font jamais appel à de grosses théories externes. Les outils d'analyse utilisés ne dépassent pas l'intégration des fonctions d'une variable. En ce sens le livre est presque autarcique (« auto-contenu »). En revanche la géométrie des espaces de jets et la volonté des auteurs de rester dans un cadre aussi général que possible nécessitent inévitablement des notations un peu lourdes. Il faut du temps pour s'y habituer, d'autant plus qu'il subsiste un certain nombre de coquilles parfois troublantes.

Eliashberg et Mishachev sont deux spécialistes, qui, depuis plus de 30 ans, ont pu épurer cette théorie jusqu'à la forme très aboutie qu'ils nous présentent dans cet ouvrage, à la lecture duquel on ressent vraiment une volonté de faire partager des secrets techniques, voire même une philosophie. *Introduction to the h-principle* est bien plus qu'une addition utile à la littérature déjà existante. C'est un livre qui renouvelle la présentation du sujet et qui restera une référence incontournable.

Références

[Ada] M. Adachi. *Embeddings and immersions*, Translations of Mathematical Monographs, 124. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

[Bor] V. Borrelli. *Mini-cours « H-principe »*, `http://igd.univ-lyon1.fr/home/borrelli/borrelli.html`

[Gei] H. Geiges. *h-principles and flexibility in geometry*, Mem. Amer. Math. Soc. 164 (2003), no. 779.

[Gir] E. Giroux. *Flexibilité en géométrie symplectique*, cours ENS-Lyon, 1993.

[Gro] M. Gromov. *Partial differential relations*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 9. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[Hae] A. Haefliger. *Lectures on the theorem of Gromov*, Proceedings of Liverpool Singularities Symposium, II (1969/1970), pp. 128–141. Lecture Notes in Math., Vol. 209, Springer, Berlin, 1971.

[Poe] V. Poénaru. *Homotopy theory and differentiable singularities*, Manifolds–Amsterdam 1970 (Proc. Nuffic Summer School) pp. 106–132 Lecture Notes in Mathematics, Vol. 197 Springer, Berlin, 1971.

[Spr] D. Spring. *Convex integration theory*, Solutions to the h-principle in geometry and topology. Monographs in Mathematics, 92. Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.

Emmanuel Ferrand, Institut Fourier, St Martin d'Hères

Geometry, Mechanics and Dynamics. Volume in honor of the 60th Birthday of J. E. Marsden
Paul Newton, Philip Holmes and Alan Weinstein, editors
Springer-Verlag, 2002, 571 pages, 89,95 €. ISBN 0-387-95518-6

Jerry Marsden est une figure marquante de la science contemporaine, dont l'influence a largement dépassé la communauté des mathématiciens purs ou appliqués, et atteint celles des mécaniciens, des physiciens et des ingénieurs. Ce volume, qui lui est dédié, rassemble des travaux se rattachant aux nombreux domaines scientifiques dans lesquels son activité a été particulièrement marquante. Ces travaux sont classés en six rubriques, qui constituent les six premières parties de l'ouvrage : I, Élasticité et Analyse ; II, Mécanique des fluides ; III, Systèmes dynamiques ; IV, Mécanique géométrique (plus communément appelée, en France, Méthodes géométriques en mécanique) ; V, Théorie géométrique du contrôle ; VI, Relativité et Mécanique quantique. La septième et dernière partie de l'ouvrage est une présentation de Jerry Marsden, comportant son curriculum vitae, la liste de ses publications (dont le nombre dépasse 300), celles des étudiants dont il a dirigé les recherches et des post-doctorants avec qui il a travaillé, et une rapide présentation de son œuvre scientifique.

L'ouvrage commence par une excellente préface dont la première partie, rédigée par les trois éditeurs, est une présentation du volume ; les diverses contributions y sont brièvement analysées et situées par rapport aux travaux dus à Jerry Marsden lui-même. De plus, les éditeurs évoquent les exceptionnelles qualités d'enseignant de Jerry Marsden et les encouragements qu'il a prodigués à ses étudiants, contribuant ainsi à l'éclosion de jeunes talents. Dans la suite de la préface, chacun des éditeurs évoque, sur un ton plus personnel, les circonstances qui l'ont amené à faire la connaissance de Jerry Marsden et à travailler avec lui.

La partie I, Élasticité et Analyse, commence par un long article de John Ball intitulé *Some open problems in Elasticity*. Assez autonome pour servir d'introduction au sujet, cet article donne l'énoncé de dix-huit problèmes ouverts rencontrés en théorie de l'élasticité, dans divers domaines : élasticité statique, thermo-mécanique des milieux continus, changements d'échelle (de l'échelle atomique à l'échelle du milieu continu, de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique, du milieu tridimensionnel aux coques bidimensionnelles et aux poutres unidimensionnelles).

Deux autres articles complètent cette partie : *Finite elastoplasticity Lie groups and geodesics on $SL(d)$*, par Alexander Mielke, et *Asynchronous variational integrators*, par Adrian Lew et Michael Ortiz. Le premier indique comment utiliser la théorie de groupes de Lie pour élaborer des modèles de milieux plastiques soumis à de grandes déformations. Le second décrit une nouvelle famille d'algorithmes numériques pour la résolution des équations de l'élasto-dynamique non linéaire, basés sur une forme discrète du principe de Hamilton dans l'espace-temps.

La partie III, Mécanique des fluides, commence par un article de Darryl D. Holm, *Euler-Poincaré Dynamics of Perfect Complex Fluids*. Les fluides dont traite cet article possèdent, en chaque point, des propriétés (telles qu'une orientation, un moment magnétique,...) pouvant être décrites par une variable d'état interne appelée *paramètre d'ordre*, prenant ses valeurs dans un certain espace (souvent un espace vectoriel, ou plus généralement une variété). Un groupe de symétries $\mathcal{O}$ (le plus souvent $\mathcal{O} = SO(3)$) agit sur cet espace, et le sous-groupe d'isotropie d'un élément particulier de l'espace, valeur au point et à l'instant considérés du paramètre d'ordre, est un sous-groupe $\mathcal{P}$ de $\mathcal{O}$. Les cristaux liquides, les fluides magnétiques, les superfluides, les verres de spin peuvent être traités selon ce formalisme. L'auteur explique comment la méthode de réduction lagrangienne par étapes permet de formuler les équations d'évolution de ces fluides. Ces équations peuvent être mises sous diverses formes, selon l'étape de réduction par usage de symétries à laquelle on s'arrête. L'auteur établit plusieurs principes variationnels, et traite aussi de la dynamique des défauts (ce qui permet, par exemple, l'étude de l'évolution des lignes de tourbillon dans l'hélium superfluide).

Trois autres articles complètent cette partie : *The Lagrangian averaged Euler equations with free-slip or mixed boundary conditions*, par Steve Shkoller ; *Nearly inviscid Faraday waves*, par Edgar Knobloch et José M. Vega ; *The variational multiscale formulation of LES with application to turbulent flow*, par Thomas J. R. Hughes et Assad A. Oberai.

L'article de S. Shkoller traite du mouvement d'un fluide parfait incompressible sur une variété à bord M, utilisant la formulation, due à V. Arnold (1966) et développée par D. Ebin et J. E. Marsden (1972) : les mouvements du fluide sont décrits par les géodésiques d'une métrique riemannienne invariante à droite sur le groupe des difféomorphismes de M préservant le volume. Pour prendre en compte la turbulence, l'auteur utilise une méthode qu'il a élaborée avec Jerry Marsden, consistant à effectuer une moyenne sur un ensemble de géodésiques afin d'estomper les variations sur de petites distances spatiales. Cette méthode conduit à une nouvelle métrique invariante à droite sur un certain sous-groupe du groupe des difféomorphismes de M préservant le volume. Les mouvements du fluide, après cette prise de moyenne, sont décrits par les géodésiques de cette nouvelle métrique. L'auteur montre que les équations ainsi obtenues, avec divers types de conditions aux limites, constituent un problème bien posé.

L'article de E. Knobloch et J. M. Vega étudie les effets d'une faible viscosité sur les ondes de Faraday à la surface libre d'un fluide qui remplit un récipient soumis à une agitation verticale périodique. Ces ondes, contrôlées notamment par les forces d'inertie, de pesanteur et de capillarité, sont habituellement étudiées en supposant le fluide parfait, donc en l'absence de viscosité. Les auteurs montrent que les termes provenant de la viscosité constituent une perturbation singulière des équations du mouvement ; pour cette raison, les effets de la présence d'une petite viscosité ne disparaissent pas lorsque cette viscosité tend vers zéro.

L'article de T. J. R. Hughes et A. A Oberai décrit une méthode variationnelle multi-échelles pour le calcul d'écoulements turbulents dans un canal de section rectangulaire, et présente de nombreux résultats numériques.

La partie III, Systèmes dynamiques, comporte trois articles : *Pattern oscillations in coupled cell systems*, par Martin Golubitsky et Ian Stewart ; *Simple choregraphic motions of N bodies*, par Alain Chenciner, Joseph Gerver, Richard Montgomery et Carles Simó ; *On normal form computations*, par Jürgen Scheurle et Sebastian Walcher.

Dans leur article, M. Golubitsky et I. Stewart étudient des systèmes d'équations différentielles ordinaires tels que ceux qui décrivent des oscillateurs couplés, fréquemment rencontrés en physique et en biologie. On a N variables x_i prenant leurs valeurs dans N exemplaires d'un même espace. Chacune de ces variables représente l'état d'une des N « cellules » qui constituent le système. Chacune de ces variables x_i obéit à une équation différentielle du premier ordre comportant, d'une part un terme (qui décrit la loi interne d'évolution de la cellule considérée) ne faisant intervenir que x_i, d'autre part des termes (qui décrivent les effets du couplage de la cellule considérée avec d'autres cellules) dont chacun fait intervenir la variable x_i et une autre variable x_j, avec $j \neq i$. Les auteurs considèrent des systèmes qui possèdent des symétries discrètes, décrites par certains sous-groupes du groupe S_N des permutations de N objets, agissant sur l'ensemble des cellules. Plutôt que le comportement global de l'ensemble du système, ils s'intéressent aux comportements comparés des diverses cellules : évolutions périodiques synchronisées ou déphasées, brisures de symétrie,... De nombreux exemples sont présentés.

L'article d'A. Chenciner, J. Gerver, R. Montgomery et C. Simó présente certaines solutions particulières du problème des N corps, appelées *chorégraphies simples*, dans lesquelless les corps considérés parcourent une même courbe fermée en se suivant à intervalles de temps égaux. Chenciner et Montgomery ont été les premiers à prouver l'existence d'une chorégraphie à trois corps de masse égale, avec potentiel d'interaction newtonien, dans laquelle les corps parcourent une courbe plane ayant la forme d'un 8. Dans le présent article, les auteurs prouvent l'existence de chorégraphies pour un nombre N quelconque de corps tous de même masse, dans lesquelles ces corps parcourent une courbe fermée plane de complexité arbitraire, en supposant le potentiel d'interaction en $1/r^{\alpha}$, avec $\alpha \geqslant 2$. Divers résultats numériques sont également présentés.

L'article de J. Scheurle et S. Walcher décrit les méthodes de mise sous forme normale d'un champ de vecteurs au voisinage d'un point d'équilibre. Les auteurs présentent un algorithme permettant le calcul des formes normales de Poincaré-Dulac lorsque la partie linéaire du champ de vecteurs n'est pas supposée mise au préalable sous une forme canonique.

La partie IV, Mécanique géométrique, comporte trois articles : *The optimal momentum map*, par Juan-Pablo Ortega et Tudor S. Ratiu, *Combinatorial formulas for product of Thom classes*, par Victor Guillemin et Catalin Zara, et *Gauge theory of small vibrations in polyatomic molecules*, par Robert G. Littlejohn et Kevin A. Mitchell.

J.-P. Ortega et T. Ratiu considèrent un système hamiltonien possédant un groupe de Lie de symétries. Ils affinent la théorie de la réduction symplectique (dont la forme moderne est due à J. E. Marsden et A. Weinstein) en substituant au moment au sens usuel un « moment optimal », qui tient mieux compte de toutes les symétries. Ce moment optimal est à valeurs, non plus dans le dual de l'algèbre de Lie du groupe de symétries, mais dans l'ensemble des feuilles d'une distribution généralisée complètement intégrable. Il peut être employé pour la construction de systèmes hamiltoniens réduits dans des cas où la réduction symplectique de Marsden et Weinstein est inopérante.

V. Guillemin et C. Zara considèrent une variété symplectique M compacte munie d'une action hamiltonienne d'un tore G, dont l'ensemble M^G des points fixes est fini. Ils donnent une description combinatoire de la classe de Thom équivariante duale de la stratification de Morse-Whitney définie par le moment de l'action d'un cercle générique de G.

Pour étudier les vibrations d'une molécule polyatomique, R. G. Littlejohn et K. A. Mitchell utilisent l'arsenal des théories de jauge et des fibrés principaux. Cela leur permet de séparer, de manière géométrique intrinsèque, les mouvements de rotation des vibrations internes de la molécule, alors que cette séparation était traditionnellement faite en coordonnées locales, de manière non intrinsèque. Ils obtiennent en particulier des expressions tout à fait intrinsèques du hamiltonien après prise de moyenne sur les vibrations rapides.

La partie V, Théorie géométrique du contrôle, comporte un seul article, *Symmetries, conservation laws, and control*, par Anthony M. Bloch et Naomi Ehrich Leonard. Les auteurs montrent comment certaines idées, essentiellement dues à Jerry Marsden, telles que l'utilisation de symétries, la réduction sous diverses formes, ont profondément renouvelé la théorie du contrôle et donné de nouveaux moyens pour la stabilisation de sytèmes contrôlés.

La partie VI, Relativité et mécanique quantique, comporte deux articles : *Conformal volume collapse of* 3*-manifolds and the reduced Einstein flow*, par Arthur E. Fischer et Vincent Moncrief, et *On quantizing semisimple basic algebras, I :* $sl(2,R)$, par Mark J. Gotay.

A. E. Fischer et V. Moncrief étudient la réduction du système d'équations d'Einstein dans le vide, afin de le mettre sous forme d'un système hamiltonien sans contrainte sur un espace des phases approprié. Ils considèrent un espace-temps de dimension 4 admettant un feuilletage en hypersurfaces compactes M, à courbure constante, de genre espace et de type de Yamabe -1. Après réduction conforme, le flot d'Einstein est décrit par un hamiltonien réduit, dépendant du temps, qui décroît strictement le long de chaque courbe intégrale non constante du système. Ils obtiennent des conditions nécessaires et suffisantes pour que le hamiltonien réduit admette un minimum absolu en un point d'équilibre hyperbolique, et montrent que ce point est un attracteur local. Ils mettent en évidence certains cas où le flot d'Einstein tend à contracter la variété spatiale M jusqu'à un volume nul, et étudient la manière dont cela se produit : le long de fibres circulaires, de tores plongés ou totalement en un point, selon les modèles.

M. Gotay étudie la quantification de l'algèbre des polynômes engendrée par les fonctions coordonnées sur une orbite coadjointe basique M d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathcal{B}$. Il montre que si M est nilpotente, cette algèbre de polynômes est quantifiable et, dans le cas où $\mathcal{B} = sl(2,R)$, que toute quantification de cette algèbre est essentiellement triviale. Il montre aussi que si M est une orbite semi-simple de $\mathcal{B} = sl(2,R)$, l'algèbre des polynômes engendrée par les fonctions coordonnées sur M n'est pas quantifiable.

Tous les articles figurant dans ce volume comportent une très riche bibliographie, qui rendra de grands services aux chercheurs. Quelques uns, suffisamment autonomes pour servir d'introduction à un domaine, pourront convenir pour une initiation ; d'autres, plus « pointus », intéresseront les spécialistes.

Le lecteur sera impressionné par la diversité des domaines scientifiques abordés dans ce livre, qui reflète la diversité des domaines auxquels Jerry Marsden a contribué. Il percevra aussi une grande unité de pensée sous-jacente, fondée sur l'emploi de modèles géométriques, le souci de toujours bien dégager ce qui est intrinsèque, le respect des symétries et leur utilisation pour simplifier les systèmes étudiés.

Charles-Michel Marle

Correspondance Grothendieck-Serre[1]
édité par P. Colmez et J.-P. Serre
Documents mathématiques, vol. 2, Société mathématique de France. 288 pages.
39 €(adhérents : 27 €). ISBN : 2-85629-104-X

Ce volume de correspondance rassemble plus de 80 lettres, écrites, pour l'essentiel, entre 1955 et 1966. Aujourd'hui, les scientifiques utilisent beaucoup internet et leurs échanges sont devenus périssables comme jamais. Aussi faut-il saluer la publication de ce livre. Elle a été possible grâce à l'initiative de J.-P. Serre et de P. Colmez. Pour l'accueillir, la SMF a ouvert une nouvelle collection : « Documents Mathématiques ». Qu'ils en soient tous vivement remerciés.

La période couverte par ces lettres a vu un développement prodigieux de la géométrie arithmétique et les deux auteurs en ont été des acteurs majeurs. A la lecture, on assiste à un foisonnement d'idées et de questions nouvelles. Tantôt les deux compères abondent dans le même sens, tantôt ils s'opposent, voire s'affrontent. Les conjectures trop optimistes sont balayées d'une lettre à la suivante ; d'autres, au contraire, s'affinent, se renforcent et... se démontrent. Cette joute amicale et sans concession, dans laquelle deux grands maîtres donnent le meilleur d'eux-mêmes, est passionnante.

« Mon cher Serre... », « Cher Grothendieck... » Nous sommes en 1955. Serre est sur le point d'être nommé professeur au Collège de France. Grothendieck est aux Etats-Unis ; il délaisse les espaces vectoriels topologiques et apprend de la topologie et de la géométrie, mais, dit-il, ne cherche pas encore. Le grand thème en discussion est la cohomologie des faisceaux, que ce soit dans le contexte topologique, ou celui de la géométrie analytique complexe, ou encore celui de la géométrie algébrique. Quelle est la meilleure définition de cette cohomologie ? Quels moyens de calcul ? Ces questions s'éclaircissent rapidement : R. Godement donne une méthode simple pour construire des résolutions injectives (son livre *Théorie des faisceaux* va paraître en 58) ; H. Cartan découvre la suite spectrale associée à un recouvrement. Rappelons en passant que la notion de faisceau, tout comme celle de suite spectrale, sont dues à J. Leray. Serre met la dernière main à « Faisceaux algébriques cohérents », ce qui donne lieu à une intéressante discussion sur la dualité. Puis il va enchaîner avec « GAGA » : l'équivalence entre faisceaux cohérents en géométrie algébrique et en géométrie analytique, dans le cadre des variétés projectives. De son côté, Grothendieck s'intéresse déjà aux catégories et forge ses convictions cohomologiques. Il va publier « Sur quelques points d'algèbre homologique ».

A partir de 1958, Grothendieck, en collaboration avec J. Dieudonné, entreprend la rédaction des *Éléments de Géométrie Algébrique* (cités EGA) ; l'année suivante, il devient professeur à l'IHES et en 1960 commence son séminaire de géométrie algébrique (cité SGA). Au début, Il est très optimiste et pense venir à bout des EGA en 3 à 4 ans. Ce sera nettement plus long et finira par diverger. Mais douze ans plus tard, si l'on veut bien mettre bout à bout les EGA, les SGA et ses nombreux exposés au séminaire Bourbaki, force est de reconnaître qu'il a pratiquement rempli l'ambitieux programme qu'il s'était fixé.

Mais revenons en 1958. Il est beaucoup question de revêtements. Serre travaille sur les groupes pro-algébriques et revisite le corps de classes. Grothendieck réfléchit au groupe fondamental en théorie des schémas. Il pressent qu'il aura besoin d'un « GAGA formel » (qui sera inclus dans EGA III). Il découvre, en passant, les liens

[1] Une version anglaise de cette recension est parue dans le numéro d'octobre 2003 des *Notices de l'AMS*.

étroits qui existent entre la théorie bien comprise des anneaux locaux et la géométrie projective. Il en fera le thème unificateur de SGA 2.

En 1959, coup de tonnerre : B. Dwork, par une méthode d'analyse p-adique tout à fait inattendue, démontre la première des conjectures de Weil sur les corps finis, la rationalité des fonctions L. C'est la surprise, mais aussi la curiosité. Ce sera le sujet d'un prochain cours de Serre au Collège. Dwork est en quelque sorte en avance sur son temps. Il faudra attendre de nombreuses années et le développement du calcul différentiel p-adique, pour que sa démonstration s'insère dans une théorie cohomologique générale « à la Grothendieck ».

Petite querelle à propos des valuations et de N. Bourbaki. Grothendieck n'aime guère les valuations et les utilise au minimum. Il reproche à Bourbaki son classicisme pour leur avoir consacré tout un chapitre. Serre, sans être un inconditionnel des valuations, défend le choix de Bourbaki.

En 1961, la France est en pleine guerre d'Algérie. Grothendieck s'inquiète du fait que les jeunes chercheurs, à peine engagés dans la recherche, doivent accomplir deux ans de service militaire. Serre le déplore également, mais trouve injuste que l'on puisse envisager d'en dispenser les intellectuels.

Après cet épisode « politico-militaire », on revient aux mathématiques. Les faisceaux cohérents sont loin derrière nous et les préoccupations se font plus arithmétiques. Voici deux exemples parmi beaucoup d'autres, où le partage des tâches fonctionne à merveille.

Grothendieck réfléchit à une formule de Riemann-Roch sur les courbes algébriques, pour les faisceaux étales. En caractéristique p¿0, pour tenir compte de la ramification sauvage, il doit introduire de nouveaux termes et dresse la liste de leurs propriétés formelles escomptées. Serre, familier de la ramification supérieure et des caractères de Brauer, y reconnaît la présence d'une certaine représentation projective du groupe d'inertie. C'est la naissance du conducteur de Swan qui, 40 ans plus tard, fait encore le bonheur des amateurs de cycles évanescents.

Assurément, 1964 est une bonne année pour l'étude de la réduction des variétés algébriques sur l'anneau d'entiers d'un corps local. Les variétés abéliennes servent de test grâce aux travaux de S. Koizumi et G. Shimura d'abord, à ceux de A. Néron et A. Ogg ensuite. Serre conjecture qu'une variété abélienne, après extension finie du corps local, se réduit en une extension d'une variété abélienne par un tore. Puis D. Mumford le démontre, du moins en caractéristique résiduelle différente de 2, grâce à sa nouvelle approche des fonctions thêta et la réduction semi-stable des courbes pointe son nez. Enfin Grothendieck établit qu'un sous-groupe ouvert du groupe d'inertie agit de façon unipotente sur la cohomologie étale ; puis il montre que cette action se filtre en au plus deux crans, dans le cas des courbes. Désormais, les arithméticiens, n'ont plus de raisons d'écarter les « mauvaises places », bien au contraire. Fermons cette parenthèse un peu technique.

Et les « motifs » me direz-vous ? Cette théorie conjecturale apparaît dans la correspondance en 1964. Grothendieck l'explique succinctement à Serre et l'utilise comme un fil directeur, une philosophie, « un yoga ». Au fur et à mesure qu'il avance dans la compréhension des cycles algébriques, les motifs se font plus présents.

Les dernières lettres sont nettement postérieures et datent de 1984-85. La situation a bien changé. Grothendieck a quitté le devant de la scène depuis plus de 12 ans et réfléchit à des mathématiques seulement par intermittence. Il vient d'écrire *Récoltes et Semailles*, un texte très polémique. Il reproche à ses anciens élèves de l'avoir enterré après son retrait tout en pillant ses plus belles idées. Mais il leur reproche aussi de ne pas avoir continué dans la voie qu'il avait tracée : « les grands chantiers abandonnés ». Serre n'est pas d'accord et estime qu'il noircit le tableau avec complaisance. Le ton est aigre. Grothendieck, en pleine introspection, veut attirer Serre sur ce nouveau terrain, mais celui-ci résiste. Serre tente de revenir aux maths et lui explique sa conjecture sur les représentations de Galois et les formes modulaires (qui jouera un grand rôle, dix ans plus tard, dans la démonstration du problème de Fermat), mais sans succès.

En relisant ces quelques lignes, je me rends compte combien le texte est sommaire et superficiel. Il fournit tout au plus des points de repère, mais ne prétend nullement rendre compte de la diversité et de la profondeur des thèmes abordés.

Ce livre va rappeler de bons souvenirs aux anciens. Les plus jeunes y verront un superbe exemple de coopération loyale et débridée, menée au plus haut niveau. Quant aux historiens des sciences, ils y trouveront beaucoup d'informations de première main..., le jour où ils se risqueront à étudier cette période particulièrement féconde.

Michel Raynaud, Université Paris-Sud Orsay

Acyclic Models
Michael Barr
CRM Monograph Series, AMS 2002. 179 p. 49 \$. ISBN : 0-821-82-87-70

Voici un livre sympathique, me suis-je dit en lisant la préface, un livre écrit avec conviction, loin de ces traités froids aux mathématiques figées, pour ne pas dire mortes, un livre mêlant l'histoire et la théorie et donc capable à la fois d'émouvoir ceux qui ont vécu cette période du développement de la topologie algébrique, et de permettre aux autres de vivre à leur tour une aventure fascinante, voire d'apprendre des mathématiques utiles. Opinion confortée en feuilletant l'ouvrage, une monographie du centre de recherche de l'université de Montréal magnifiquement présenté par l'American Mathematical Society. Opinion qui devient presque une certitude lorsque je découvre qu'un des chapitres (le quatrième) est intitulé *Triples à la mode de Kan.* Je me suis donc attablé avec appétit devant un ouvrage si prometteur.

Mais, passé les premières pages, force est malheureusement de constater que tant sur la forme que sur le fond, ces *modèles acycliques* sont indigestes, et que l'auteur, dont la passion apparaît souvent à travers les lignes, n'a pas su communiquer cette passion à ses lecteurs.

Ce qui frappe dès le début, c'est l'extrême négligence de la présentation du texte qui fourmille d'erreurs. Mots ou expressions mathématiques mis à la place d' autres par exemple, p. 31, *monomorphism* au lieu d'*epimorphism* ; p. 49, $A + 2$ au lieu de A_2 ; p. 31, $i = 2$ au lieu de $i_2 =$; très souvent les indices changent au cours d'une démonstration, par exemple (p. 102–103) un indice noté $\bullet$ pour indiquer un complexe ou un objet gradué se transforme en un 0, avec l'ennui que le texte garde un sens, mais bien sûr pas celui que l'on attend ; le coefficient du binôme $\binom{n}{m}$ étant représenté par (nm), seule une lecture attentive du texte permet de le deviner ; sur la même ligne, p. 107 on trouve $g - h = s \circ d + d \circ s$ (les morphismes g et h sont homotopes) et $k = (g - h\ s)$ (en fait k est la matrice ligne $(g, -h, s)$) ; p. 80 l'auteur définit une homotopie par la formule $\sum_{i=1}^{n} h^i$, « oubliant » le signe $(-1)^i$; p. 140–141, se trouve une K-algèbre B, qui est parfois une K-algèbre quelconque, parfois une algèbre de polynômes, et pour rendre les choses plus simples, on y prend des produits tensoriels, sans indiquer s'ils sont pris sur K, sur B ou même sur $B[x]$ dont il est aussi fait usage sur ces pages ; enfin quand $\otimes_B$ apparaît, c'est souvent sous la forme $\otimes B_K$ au lieu de $\otimes_B K$; le cotriple *induit par les modèles*, un objet privilégié dans un ouvrage traitant des modèles acycliques, est cependant défini (p. 92) de manière grossièrement fausse en faisant intervenir les sommes $\coprod_{M \to C} C$ au lieu des sommes $\coprod_{M \to C} M$. Inutile de continuer, les erreurs sont innombrables. Lorsqu'un texte contient autant de négligences, il devient vite lassant puis illisible, même pour un spécialiste. La fougue de l'auteur emporté par son sujet et croyant que l'intendance suivra n'est pas une excuse. Le lecteur a droit à un certain respect.

Plus curieusement encore, Michael Barr ne traite pas mieux le théorème central de l'ouvrage, le théorème 3.1, p. 102. Un théorème de modèles acycliques, quel qu'il soit, affirme que moyennant certaines conditions, étant donné deux complexes de foncteurs augmentés $K_\bullet \to K_{-1}$ et $L_\bullet \to L_{-1}$, toute transformation naturelle $f : K_{-1} \to L_{-1}$ se prolonge de manière unique à homotopie près en une transformation naturelle $f_\bullet : K_\bullet \to L_\bullet$. Dans la généralisation que présente Barr le prolongement $f_\bullet$ appartient à une certaine catégorie de fractions. Or les morphismes dans les catégories de fractions sont malaisés à comprendre et à composer. Dans la pratique on cherche donc autant que faire se peut à s'en débarrasser en utilisant des objets privilégiés (complexes de Kan, objets fibrant...). Le fait est que dans les applications (chapitres 6, 7, 8) les catégories de fractions ont disparu, mais où ? nous ne le saurons jamais.

Par contre dans le corollaire 3.2, p. 103, apparaît l'expression *acyclic on models* qui n'est nulle part définie, et que je soupçonne de n'être qu'une expression toute faite pour un autre contexte, et brutalement plaquée ici. Page 120, théorème 2.1, est introduite sans référence la nouvelle expresion *weak homotopy equivalence* dont j'ai fini par trouver la définition dans la préface, et retrouvé p. 97 sans autre occurence, sous le nom de *quasi-homotopy equivalence*. Enfin pourquoi attribuer à Dold-Puppe (1961) ce qui appartient à Dold (1958), à Eilenberg-Zilber ce qui est du à Cartier ?

Le fond n'est pas mieux réussi que la forme. Car, cela apparaît clairement à la lecture des chapitres d'applications du théorème principal, Michael Barr a voulu nous offrir une œuvre d'art, et en tant qu'artiste, c'est le jet spontané de sa pensée qu'il nous offre tel quel. Donc il rédige ce qui lui plait, laissant de côté ce qui ne lui paraît pas indispensable sur l'instant, à moins qu'il ne joue au *copié/collé* avec divers textes antérieurs. Le résultat est un curieux patchwork dont l'architecture échappe parfois au lecteur averti, et qui semblera encore plus arbitraire au néophyte qui d'aventure se risquerait dans ces pages.

Un beau gâchis. Dommage.

Michel Zisman, Université Denis Diderot Paris 7