

LIVRES

Theory and Applications of Nonviscous Fluid Flows

R. KH. ZEYTOUNIAN

Physics and Astronomy, Springer-Verlag, 2002. 294 p. 74,95 €(HT).

ISBN 3-540-41412-6

Ce livre présente un grand nombre de modèles mathématiques rendant compte de différents phénomènes physiques que peuvent présenter des fluides newtoniens non visqueux. L'objectif de cet ouvrage n'est pas de dériver rigoureusement ces équations ni de les étudier d'un point de vue mathématique, mais plutôt de présenter un large éventail de méthodes asymptotiques permettant de les obtenir, et d'étudier quelques-unes de leurs propriétés.

Le livre s'ouvre sur un chapitre présentant les équations de Boltzmann et la dérivation formelle des équations de la mécanique des fluides, Euler compressible en particulier. À l'instar du reste de l'ouvrage, aucun théorème précis n'est énoncé, mais de nombreuses références à des travaux mathématiques sont proposées (y compris à des résultats récents, jusqu'en 2000). Le court chapitre suivant présente les équations des fluides newtoniens, en particulier les différents choix de paramètres et d'échelles physiques permettant d'obtenir les équations de "Navier-Stokes-Fourier". Le livre traitera en fait surtout de versions non visqueuses de ces équations, à commencer par les équations d'Euler. L'auteur présente ensuite différentes méthodes asymptotiques utilisées en modélisation, en indiquant pour chacune, outre des références précises, des exemples d'applications et leurs limitations. De nombreuses nouvelles équations apparaissent ainsi, modélisant des phénomènes physiques variés : fluides peu compressibles, fluides à viscosité variable, équations de Burgers. Des propriétés qualitatives de leurs solutions sont également présentées. Suit alors le chapitre central du livre, traitant de nombreuses variantes des équations d'Euler : équations de Boussinesq, KdV, KP, Schrödinger, Steichen... Les arguments physiques et asymptotiques menant à toutes ces équations sont expliqués, encore une fois avec des références à des articles physiques, numériques et mathématiques. Un chapitre est ensuite consacré aux flots atmosphériques, avec notamment l'analyse de l'influence de la force de Coriolis et la présentation des systèmes quasigéostrophique et de Boussinesq. Un court chapitre traite des fluides peu compressibles, suivi d'un autre sur les fluides en "turbo machines". Enfin les nappes de tourbillon et l'étude d'ondes de choc font l'objet du huitième chapitre. Le neuvième et dernier chapitre de ce livre présente quelques résultats mathématiques sur les équations d'Euler ainsi que sur la limite incompressible notamment.

Ce livre n'est pas un ouvrage de mathématiques : ni le passage à la limite entre différents modèles, ni même l'existence de solutions à ces modèles ne sont en général montrés. Mais c'est justement une source de problèmes ouverts pour l'étude mathématique de la mécanique des fluides, ainsi qu'un excellent moyen offert aux mathématiciens de comprendre l'origine physique de certaines équations, avec la présence de nombreuses références, tant physiques que mathématiques. Signalons au passage qu'un deuxième ouvrage de l'auteur vient de paraître, intitulé *Asymptotic Modelling of Fluid Flow Phenomena* (Kluwer Academic Publishers, Fluid Mechanics and its Applications, Vol. 64). À peu près deux fois plus volumineux que le premier, il en présente en particulier certains chapitres de manière plus détaillée, et

offre un panorama impressionnant de différents modèles asymptotiques : là encore sans raisonnements mathématiques rigoureux, mais avec un très grand éventail de phénomènes physiques modélisés.

Isabelle Gallagher, CNRS, École polytechnique

Torsors and rational points

A.N. SKOROBOGATOV

Cambridge Tracts in Mathematics, **144**, Cambridge University Press. 187 p.

£ 37,50. ISBN 0-521-80237-7

Une des questions les plus anciennes de la théorie des nombres consiste à déterminer si un système d'équations $P_i(x_1, \dots, x_n) = 0$, $1 \leq i \leq r$, où les P_i sont des polynômes à coefficients rationnels, possède une solution dans \mathbf{Q}^n . Ce problème est a priori très difficile ; de fait Matjasevic (s'appuyant sur des travaux de Davies, Putnam, et Robinson) a montré il y a plus de trente ans que le problème analogue pour les équations en nombres entiers était indécidable. On est donc amené à rechercher des conditions nécessaires, si possibles « calculables », pour qu'un système d'équations polynomiales ait une solution (resp. une solution non triviale si on prend des polynômes homogènes ; dans ce dernier cas l'existence d'une solution non triviale entière ou rationnelle revient au même). On espère ensuite pouvoir montrer dans des cas particuliers que ces conditions nécessaires sont suffisantes.

Dans le langage de la géométrie algébrique, on s'intéresse à l'ensemble $X(\mathbf{Q})$ des points rationnels d'une variété algébrique X (affine ou projective) définie sur \mathbf{Q} (plus généralement, on peut remplacer \mathbf{Q} par un corps de nombres). Une condition nécessaire à l'existence d'un point rationnel sur X est que X possède des points réels, et des points sur tous les corps p -adiques \mathbf{Q}_p . Mais ces conditions dites locales (qui sont faciles à tester algorithmiquement) ne sont suffisantes que pour très peu de classes de variétés (les quadriques par exemple ; on dit dans ce cas que le *principe de Hasse* est vérifié).

Un *torseur* Y sur X sous un groupe algébrique G est une variété munie d'un morphisme $f : Y \rightarrow X$ et d'une action de G qui respecte les fibres de f , satisfaisant en plus la condition suivante : pour tous points y_1, y_2 de Y (points géométriques, i.e. à valeurs dans une clôture algébrique de \mathbf{Q} ; ne pas oublier que $X(\mathbf{Q})$ peut être vide!), il existe un unique élément g de G tel que $g.y_1 = y_2$. Cette notion est l'analogue de la notion de fibré principal en géométrie différentielle ou analytique. Son utilité pour obtenir un lien plus fin entre $X(\mathbf{Q})$ et l'ensemble des points « locaux » $X(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}) := \prod_p X(\mathbf{Q}_p)$ est apparue dans les années soixante-dix, entre autres dans les travaux de Manin, Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer. Cette idée trouve son inspiration dans la théorie classique de la descente sur les courbes elliptiques, et aussi dans les travaux de Châtelet sur l'arithmétique de certaines surfaces rationnelles qui portent son nom.

Le livre de Skorobogatov est le premier à rendre compte de façon très détaillée des travaux les plus importants sur le sujet, tout en donnant des preuves complètes pour les résultats principaux. Une des forces de l'ouvrage est que le point de vue est sans cesse double : l'auteur n'hésite pas à utiliser des machineries sophistiquées (cohomologie étale, catégories dérivées) pour donner des démonstrations élégantes et aider le lecteur à mieux comprendre les phénomènes ; mais il illustre aussi la théorie générale de nombreux exemples (souvent donnés par des équations explicites ou de jolies constructions géométriques). Un effort tout particulier a également été fait pour avoir une présentation « self-contained » des résultats principaux. Ainsi l'étudiant peut-il très vite comprendre les bases de la théorie avec ses applications, au besoin en sautant les détails techniques des démonstrations. Au contraire le spécialiste se

plongera avec délice dans celles-ci, en remarquant les généralisations et simplifications apportées parfois par Skorobogatov par rapport aux articles originaux. Quelques exercices et questions ouvertes permettent de se faire la main, et chaque chapitre se termine par un petit historique des questions abordées.

Décrivons maintenant brièvement le contenu des différents chapitres. Après une introduction assez détaillée, les chapitres 2 et 3 (qui présentent un intérêt indépendamment de leurs applications arithmétiques) exposent la théorie générale des toiseurs, en particulier leur classification via des ensembles de cohomologie et le lien avec la théorie géométrique des invariants. Dans le chapitre 4, on s'intéresse au cas où le groupe G du toiseur est un groupe de type multiplicatif, i.e. un groupe commutatif extension d'un groupe fini par un tore. C'est dans ce cadre que Colliot-Thélène et Sansuc ont développé leur théorie de la descente. En particulier on a une description

$$(0.0.1) \quad X(\mathbf{Q}) = \bigcup_Y f_Y(Y(\mathbf{Q}))$$

où Y décrit l'ensemble des toiseurs $f_Y : Y \rightarrow X$ d'un certain « type ». On voit immédiatement alors que pour que $X(\mathbf{Q})$ soit non vide, il est nécessaire que l'un des Y possède des points dans tous les \mathbf{Q}_p (on convient que $\mathbf{R} = \mathbf{Q}_\infty$), et cette condition est suffisante si on peut démontrer que les toiseurs Y de ce type satisfont le principe de Hasse. Ce programme a été mené à bien par Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer notamment dans le cas des surfaces de Châtelet, et dans ce chapitre Skorobogatov explique comment on obtient des équations explicites pour les toiseurs, ce qui est indispensable pour obtenir de tels résultats concrets.

Les chapitres 5 et 6 font le lien entre l'existence de points locaux sur les toiseurs d'un certain type, et une obstruction cohomologique à l'existence d'un point rationnel introduite par Manin en 1970. Grosso modo, il est possible, au moyen du *groupe de Brauer* de X (il s'agit du groupe de cohomologie étale $H^2(X, \mathbf{G}_m)$) de définir un sous-ensemble $X(\mathbf{A}_\mathbf{Q})^{\text{Br}}$ de $X(\mathbf{A}_\mathbf{Q})$, qui contient $X(\mathbf{Q})$. Ce sous-ensemble a l'avantage par rapport à $X(\mathbf{Q})$ d'être (au moins en théorie) calculable. La propriété $X(\mathbf{A}_\mathbf{Q})^{\text{Br}} = \emptyset$ est ainsi une obstruction, dite de Manin, à l'existence d'un point rationnel sur X . Manin avait montré que pour une courbe de genre 1, la non-vacuité de $X(\mathbf{A}_\mathbf{Q})^{\text{Br}}$ impliquait celle de $X(\mathbf{Q})$ pourvu que le groupe de Tate-Shafarevitch de la jacobienne de X soit fini (on conjecture que c'est toujours le cas). Skorobogatov démontre de manière détaillée comment l'existence d'un élément dans $X(\mathbf{A}_\mathbf{Q})^{\text{Br}}$ implique l'existence de toiseurs Y (dits universels) pour lesquels l'obstruction de Manin disparaît, et tels que l'un d'eux possède des points dans tous les \mathbf{Q}_p . Ces résultats (dus à Colliot-Thélène et Sansuc quand G est un tore et généralisés par lui-même à tout groupe de type multiplicatif) constituent le noeud de la théorie. A contrario le fait que dans l'équation (1) aucun des Y n'ait de points dans tous les complétés s'interprète aussi comme $X(\mathbf{A}_\mathbf{Q})^{\text{Br}} = \emptyset$. Dans le chapitre 7, ces résultats généraux sont appliqués aux fibrés en coniques; par exemple l'étude des toiseurs universels sur les surfaces de Châtelet permet de conclure que pour une telle surface, l'existence d'un élément dans $X(\mathbf{A}_\mathbf{Q})^{\text{Br}}$ implique l'existence d'un point rationnel sur X : en effet dans ce cas précis ces toiseurs vérifient le principe de Hasse, et comme l'un d'eux possède des points dans tous les complétés, il possède un point rationnel qu'il ne reste plus qu'à projeter sur X .

Les chapitres 8 et 9 sont consacrés au cas où le groupe G n'est plus supposé abélien. Skorobogatov y explique de manière détaillée son célèbre exemple (datant de 1997) de variété avec $X(\mathbf{Q}) = \emptyset$ et $X(\mathbf{A}_\mathbf{Q})^{\text{Br}} \neq \emptyset$ (un tel exemple était cherché depuis l'introduction de l'obstruction de Manin en 1970). Il interprète également ce type d'exemples en termes d'une obstruction liée aux toiseurs non-abéliens. Pour les

espaces homogènes de groupes algébriques linéaires, on voit également comment le problème de descente d'un torseur de $\overline{\mathbf{Q}}$ à \mathbf{Q} peut fournir des obstructions à l'existence d'un point rationnel. Ceci est lié aux H^2 non-abéliens déjà utilisés par Springer dans les années soixante.

Pour conclure, ce livre me semble être appelé à devenir la référence sur le sujet, et il devrait aussi donner envie à quelqu'un qui a envie de s'y lancer de poursuivre. Puisse-t-il susciter quelques vocations !

David Harari, CNRS, École Normale Supérieure

Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius

CLAUDE SABBABH

EDP Sciences/CNRS Éditions, 2002. 306 p. 42 €. ISBN 2-86883-306-1

Ce livre a comme principal sujet les connexions méromorphes. Il est écrit pour les étudiants et les non-spécialistes. Rédigé dans un langage moderne, il expose un grand nombre de résultats anciens et nouveaux. Dans le dernier chapitre, point culminant du livre, C. Sabbah donne des résultats sur les variétés de Frobenius du point de vue des déformations isomonodromiques. Ce chapitre utilise intégralement le matériel développé dans les chapitres antérieurs, ce qui sert aussi bien de motivation pour une étude intégrale du livre que d'application.

Les variétés de Frobenius ont été introduites dans les travaux de K. Saito à la fin des années soixante-dix. Il a étudié des déploiements de singularités isolées et leurs connexions de Gauß-Manin. Il suggère une structure très riche sur l'espace de base d'un déploiement semiuniversel. Une variété complexe avec une telle structure est aujourd'hui appelée variété de Frobenius. Une telle variété a essentiellement deux ingrédients : une multiplication commutative et associative sur le fibré tangent holomorphe et une forme bilinéaire, symétrique et non dégénérée, appelée métrique, qui satisfait plusieurs conditions très naturelles. L'une de ces conditions est la platitude de la connexion de Levi-Civita de la métrique. Par conséquent, Saito appelle cette structure une structure plate.

La notion de variété de Frobenius est due à Dubrovin. Sa définition en 1991 a été motivée par les travaux des physiciens Witten, Dijkgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde et d'autres. Ce travail a amené le développement mathématique de la cohomologie quantique par Kontsevich et Manin et beaucoup d'autres, qui est une deuxième source de variétés de Frobenius. En fait, l'isomorphie, partiellement conjecturale, partiellement prouvée, entre certaines variétés de Frobenius provenant de la cohomologie quantique et certaines construites dans la théorie des singularités est une version de la symétrie miroir. Le travail de Dubrovin et d'autres, a permis de trouver une troisième source de variétés de Frobenius. Elles sont construites grâce aux hiérarchies de systèmes intégrables d'équations aux dérivées partielles. Ainsi, les variétés de Frobenius forment un sujet riche et fascinant qui met en relation des structures très différentes.

La relation avec les connexions méromorphes était inhérente dans la construction de K. Saito par la théorie des singularités. C. Sabbah en extrait une méthode pour construire des variétés de Frobenius en partant de certaines connexions méromorphes (chapitre VII, théorème 3.6). Cette méthode rend la construction originelle par la théorie des singularités beaucoup plus facilement accessible et elle est aussi applicable dans d'autres situations. C. Sabbah a le mérite d'avoir explicité cette méthode et de l'étudier point par point dans le chapitre VII.

Cette méthode donne un deuxième point de vue sur les variétés de Frobenius. La structure du fibré tangent TM d'une variété de Frobenius M donne naissance à une connexion méromorphe sur le relèvement du fibré tangent π^*TM où $\pi : \mathbb{P}^1 \times M \rightarrow M$.

Cette connexion a un pôle logarithmique le long de $\{\infty\} \times M$ et un pôle de rang de Poincaré un le long de $\{0\} \times M$ (un certain pôle irrégulier) et est plate sur $\mathbb{C}^* \times M$. On peut aussi exhiber un accouplement sur π^*TM avec des bonnes propriétés qui provient de la métrique sur M . Alors cette structure sur π^*TM est équivalente à la donnée d'une structure de Frobenius sur M .

La méthode commence par une variété complexe M et un fibré vectoriel abstrait, de rang la dimension de M , sur $\mathbb{P}^1 \times M$ avec une connexion méromorphe, qui vérifie les conditions ci-dessus et tel que la restriction de ce fibré vectoriel à chaque $\mathbb{P}^1 \times \{t\}$ pour $t \in M$ soit trivial. Alors une section globale qui satisfait certaines propriétés, une forme primitive de K. Saito, donne une application de périodes qui rend ce fibré abstrait isomorphe au fibré π^*TM . Elle envoie la connexion méromorphe sur π^*TM et induit sur M une structure de variété de Frobenius (théorème VII.3.6.). Le désir d'expliquer cette construction, avec tous les outils nécessaires, pour des étudiants et des non-experts est une des motivations de ce livre. Les chapitres 0-VI présentent, de manière systématique et précise, une énorme quantité de résultats sur les connexions méromorphes. La plupart sont connus et figurent dans des articles de recherche (Malgrange, Bolibruch et beaucoup d'autres), mais peu ont été incorporés dans des livres.

Le chapitre 0 expose beaucoup de résultats connus sur les fibrés vectoriels holomorphes et méromorphes, sur les fibrés de Higgs et les systèmes locaux. Ce chapitre donne des références précises et fixe les notations pour la suite. Il est très utile pour les étudiants. C'est le seul chapitre du livre où beaucoup de preuves sont omises en faisant référence à la littérature. Dans les autres chapitres, presque tous les résultats sont prouvés clairement.

Le chapitre 1 parle des fibrés vectoriels sur \mathbb{P}^1 . Le théorème de Birkhoff-Grothendieck est prouvé. Les familles de fibrés vectoriels sur \mathbb{P}^1 sont traitées et le résultat que la condition d'être trivial est une condition ouverte pour un fibré sur \mathbb{P}^1 est aussi prouvée.

Le chapitre 2 est en deux parties. Dans la première partie (1-3), C. Sabbah explique la correspondance de Riemann-Hilbert pour les fibrés vectoriels méromorphes munis d'une connexion à singularité régulière. Dans la deuxième partie (4-5), on y trouve des résultats concernant les singularités irrégulières et le phénomène de Stokes.

Le chapitre 3 explique un point qui n'est souvent pas assez apprécié. Un fibré vectoriel holomorphe avec une connexion méromorphe le long d'un diviseur est une donnée plus riche que le fibré méromorphe correspondant avec la connexion. Dans le cas où l'espace de base est un germe $(\mathbb{C}, 0)$, le premier est un $\mathbb{C}\{z\}$ -module tandis que le second est un $\mathbb{C}\{z\}[z^{-1}]$ espace vectoriel, ainsi on appelle le premier un *réseau*. Le chapitre 3 analyse et classe de tels réseaux avec une connexion méromorphe et leur associe un certain polynôme caractéristique.

Le chapitre 4 discute du problème classique de Riemann-Hilbert intimement lié au problème de Birkhoff. Ce chapitre donne différentes formulations et interprétations et explique les vieilles et nouvelles contributions. Il donne un résultat positif de Bolibruch et Kostov et un autre de M. Saito qui est très utiles dans le cas des singularités.

Le chapitre 5 explique de façon algébrique une transformation de Fourier pour les fibrés vectoriels méromorphes sur \mathbb{P}^1 à connexion méromorphe. L'autre le raffine pour les réseaux, ce qui permet de relier directement le problème de Riemann-Hilbert au problème de Birkhoff du chapitre 4.

Le chapitre 6 traite des déformations isomonodromiques de solutions des problèmes du chapitre 4. Sous des conditions de semi-simplicité, on a des déformations universelles. Dans le cas du problème de Riemann-Hilbert, ceci nous conduit aux équations de Schlesinger. Dans le cas du problème de Birkhoff, ces déformations universelles sont traitées d'une manière qui est motivée par des travaux de Dubrovin et Givental.

Le chapitre 7 donne la méthode expliquée ci-dessus avec plusieurs exemples de variétés de Frobenius : la construction de Dubrovin d'une variété de Frobenius semi-simple d'après le chapitre 6, deux manières de voir la variété de Frobenius A_n , quelques aperçus d'autres variétés de Frobenius et un schéma approximatif pour construire les variétés de Frobenius à partir de la théorie des singularités.

Pour compléter ce schéma, il faudrait utiliser la connexion de Gauß-Manin sur le déploiement de singularités, sa transformée de Fourier partielle et ses relations avec des filtrations de Hodge, pour une solution du problème de Birkhoff. Mais ceci n'est pas l'objet de ce livre. C. Sabbah l'a élaboré dans plusieurs articles de recherche [1][5][6]. Dans [3], on trouve une version un peu différente, sans transformation de Fourier, qui est adaptée au cas spécial et originel des germes de singularités. Les deux références [2] et [4] expliquent d'autres aspects sur les variétés de Frobenius.

Le livre de C. Sabbah donne des explications complètes, les motivations et les preuves. Beaucoup de ses preuves et de ses énoncés ne sont pas formulés comme ça dans la littérature même s'ils sont bien connus des experts. Les notations sont bien choisies. La bibliographie est excellente. Ce livre comporte aussi beaucoup d'exercices. Il s'adresse aux étudiants avancés et aux personnes intéressées par les connexions méromorphes. Bien sûr, avec 289 pages et tellement de matériaux, cela demande du travail, mais ça vaut la peine de faire cet effort.

Références

- [1] A. Douai, C. Sabbah : Gauss-Manin systems, Brieskorn lattices and Frobenius structures (I). Preprint (52 pages), math.AG/0211352.
- [2] B. Dubrovin : Geometry of 2D topological field theories. In : Integrable systems and quantum groups. Montecatini, Terme 1993 (M Francoviglia, S. Greco, eds.). Lecture Notes in Math. 1620, Springer-Verlag 1996, 120–348.
- [3] C. Hertling : Frobenius manifolds and moduli spaces for singularities. Cambridge Tracts in Mathematics **251**. Cambridge University Press, 2002.
- [4] Yu. Manin : Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces. American Math. Society, Colloquium Publ. v. **47**, 1999.
- [5] C. Sabbah : Monodromy at infinity and Fourier transform. Publ. RIMS, Kyoto Univ. **33** (1997), 643–685.
- [6] C. Sabbah : Hypergeometric period for a tame polynomial. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **328** (1999), 603–608, and (42 pages) math.AG/9805077.

C. Hertling, MPIM Bonn

La pensée mathématique contemporaine

FRÉDÉRIC PATRAS

PUF, 2001. 135 p. 21,04 €. ISBN 2-130-516-785

Que reste-t-il des débats passionnés des débuts du siècle dernier (le XX^e) concernant les fondations des mathématiques, les axiomes de l'arithmétique ou de la théorie des ensembles ? Qui s'intéresse encore aux *Grundlagen der Arithmetik* de Gottlob Frege, et les compare à la *Philosophie de l'arithmétique* de Edmund Husserl ? Ou aux recherches épistémologiques, auxquelles un Hermann Weyl n'a pas dédaigné de consacrer une part importante de son travail ? À ce propos, Claude Chevalley et André Weil, dans une notice de ses travaux publiée en 1957 dans *L'Enseignement Mathématique*, deux ans après sa mort, ont écrit ce qui suit¹ :

¹ cité par Patras, p. 88.

« Quant aux préoccupations philosophiques de Weyl pendant cette période d'intense fermentation [vers 1918], elles ne tardèrent pas (heureusement, serions nous tentés de dire) à se couler dans un moule plus étroitement mathématique »

reflétant, semble-t-il, l'opinion dominante des mathématiciens français : la crise est terminée, les guerres en Occident sont achevées, il est grand temps de faire des maths, « pour l'honneur de l'esprit humain² ».

Ce n'est pas l'opinion de Patras qui a écrit ce beau livre pour persuader ses lecteurs (pas uniquement des mathématiciens) que le débat philosophique a toujours sa place dans notre société, mais qui doit constater au départ « l'extraordinaire appauvrissement du débat philosophique autour des mathématiques » (p. 1).

Les deux premiers chapitres de *La pensée mathématique contemporaine* (Le style en mathématique, De Platon à Husserl) sont donc prioritairement consacrés à une présentation philosophique des problèmes qu'il traitera plus loin. Mais le lecteur peu (ou plutôt souvent pas du tout, d'après ce qui précède!) habitué au langage des philosophes, à la logique interne de leur discours, ne doit pas craindre d'être abandonné en terrain inconnu dès les premières pages. Au contraire, car Patras lui apporte sans jargonner ce qui est nécessaire à son propos, et qu'il puise dans les écrits des grands philosophes, les fonctionnaires de l'humanité, comme les désigne Husserl : le lecteur découvrira donc, en plus de l'argumentation brillante de l'auteur, le plaisir de s'introduire agréablement dans l'univers d'Aristote, Descartes, Kant, Hegel, Husserl, et bien d'autres que je ne cite pas ici, tout en restant d'un bout à l'autre de l'ouvrage sur le terrain de la science, des mathématiques, et non celui de la vulgarisation.

Les deux chapitres suivants (Les origines des mathématiques modernes, Axiomes et intuitions) nous convient à une étude historique des mathématiques depuis Gauss, sur le chemin du formalisme. Ni une galerie de portraits, ni une collection ordonnée de théorèmes datés et nommés suivant leur ou leurs auteurs. Une histoire non pas des mathématiques, mais de la *pensée* mathématique, en particulier aux antipodes de la conception de Dieudonné³. Une histoire qui nous conduira au structuralisme.

La base rassurante sur laquelle repose la sérénité des mathématiciens d'après la seconde guerre mondiale est le *structuralisme*, ou plus exactement le *structuralisme mathématique*, à ne pas confondre avec le structuralisme des sciences humaines, et le mathématicien le plus célèbre professant cette doctrine, c'est Bourbaki. Le chapitre 5 (Le courant structuraliste) lui est consacré en grande partie. Écrire une étude critique sur Bourbaki n'est pas un exercice facile, surtout pour un Français, car tous les mathématiciens français, autant que nous sommes (sauf peut-être les plus jeunes), nous avons non seulement subi son influence générale, mais nous avons, de plus, souvent eu pour maître l'un ou l'autre des savants membre du groupe Bourbaki. La réflexion profonde de Pierre Cartier (dans *Vie et mort de Bourbaki*⁴) facilite cependant le travail. La critique philosophique essentielle se trouve dans le chapitre suivant, Structures et catégories, mais est déjà annoncée page 29, lorsque, après avoir dit que Bourbaki était le promoteur d'une refonte de la pensée mathématique, utilisant un nouveau style, le structuralisme, Patras écrit :

« Or, Bourbaki, au moment même où il s'attaquait à cette tâche, admirable tout à la fois historiquement et conceptuellement, indépendamment des critiques qui peuvent lui être adressées rétrospectivement, s'opposait de toute son autorité

² comme diraient Lagrange, Jacobi et Dieudonné.

³ par exemple dans J. Dieudonné *History of Algebraic and Differentiable Topology* 1900-1960, Birkhäuser 1989.

⁴ IHÉS 1997, voir aussi *The continuing silence of Bourbaki* — an interview with Pierre Cartier, *The Mathematical Intelligencer*, Vol 20, Number 1.

à la constitution d'un style de pensée catégorique, dont il était déjà manifeste dans les années 1960, qu'il ne pouvait que l'emporter sur le style structuraliste. »

L'erreur de Bourbaki, ainsi qu'elle est décrite avec beaucoup de finesse, est d'avoir considéré que les fondements, une fois « rigoureusement » établis, restaient immuables (Cartier, dans son article, relie cette attitude à l'ambiance générale des années 30-50). Il est plus proche de la réalité de concevoir l'univers des mathématiques muni d'une structure moins rigide, permettant aux développements nouveaux de la science de réagir sur ses fondements. Le style catégorique possède aujourd'hui cette qualité, qui lui permet aussi de s'avérer utile pour la connaissance de la pensée en général et des fondements de la philosophie, un thème que Patras a aussi abordé dans de nombreux articles⁵. Je laisse au lecteur le plaisir de découvrir ces analyses, ainsi que les belles pages que l'auteur consacre, dans les deux derniers chapitres, à Alexandre Grothendieck et à René Thom, qui ont justement su, de manière fort différente d'ailleurs, consacrer aussi à la réflexion sur les objets de leur travail, une partie de leurs recherches. Retenons que ce livre a pour première ambition de rapprocher les mathématiciens que nous sommes du débat philosophique. Mais, au delà de nous même, c'est au destin de toute notre discipline qu'il s'intéresse, ainsi qu'il est écrit (page 109) :

« [...] il faut en finir avec un discours pragmatique et restaurer, aux côtés de la recherche, le débat philosophique. La mathématique a tout à y gagner : c'est pour elle le seul moyen de reconquérir une audience. Les succès médiatiques de la physique, sa concurrente immédiate dans le panthéon des sciences pures, tiennent à ce que ses questions les plus fondamentales ont su frapper l'imagination collective. »

Michel Zisman
Université Paris 7

Quantum calculus

VICTOR KAC, POKMAN CHEUNG

Universitext, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2002. 112 p.

34,95 €(HT). ISBN 0-387-95341-8

C'est un *divertimento* d'une centaine de pages que Victor Kac⁶ et P. Cheung nous offrent à la suite de cours donnés par le premier aux *undergraduates* du MIT. Les prémisses en sont très simples : au lieu de considérer la dérivée d'une fonction f (dépendant d'une variable réelle x), on considère sa « q -dérivée »

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}$$

où q est un nombre fixé différent de 1, et l'on pousse *andante scherzando* aussi loin que possible avec des étudiants de première ou de deuxième année. C'est ainsi que la q -dérivée $D_q x^n = [n]x^{n-1}$ du monôme x^n donne naissance au q -analogue

$$[n] = 1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

⁵ *Catégories et foncteurs*, Dict. Histoire et Philosophie des Sciences, Ed. D. Lecourt. PUF (1999) ;

Phénoménologie et théorie des catégories. New Interaction of Mathematics with Natural Sciences and the Humanities. L. Boi Ed. Springer Verlag, à paraître ;

L'horizon sémantique et catégorial de la méthode axiomatique Noesis, à paraître.

⁶ Prononcez *Katz* ou *Kats*. Une translittération savante de la forme cyrillique du nom de Kac est souvent à l'origine de prononciations erronées.

de l'entier n et, pour tout réel a et tout polynôme f de degré N , on a une formule de Taylor du type

$$f(x) = \sum_{k=0}^N D_q^k f(a) \frac{(x-a)_q^k}{[k]!} \quad (1)$$

où l'on a posé $[k]! = [1][2] \dots [k]$ ($[0]! = 1$) et

$$(x-a)_q^k = (x-a)(x-qa) \dots (x-q^{k-1}a).$$

On prendra garde que l'exposant k dans l'expression $(x-a)_q^k$ ne se comporte pas exactement comme un exposant puisqu'on a

$$(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n.$$

Ceci donne une petite idée des subtilités et des charmes de ce calcul différentiel particulier qu'on nomme en anglais *q-calculus*. De (1) les auteurs dérivent un certain nombre d'identités entre produits et sommes telles que le développement du polynôme $(x-a)_q^n$ lui-même :

$$(x-a)_q^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{k(k-1)/2} a^k x^{n-k} \quad (2)$$

où

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}$$

est le q -coefficient binomial de Gauss, qui, comme on sait, est égal au nombre de sous-espaces de dimension k d'un espace vectoriel de dimension n sur le corps fini \mathbf{F}_q .

Lorsqu'on remplace x par 1 dans (2) et qu'on fait tendre n vers l'infini, on obtient l'identité suivante, déjà connue d'Euler, dont les deux membres convergent pour $|q| < 1$:

$$\prod_{k \geq 0} (1 - q^k a) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{k(k-1)/2} \frac{a^k}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^k)}.$$

De là Kac et Cheung déduisent quelques applications amusantes en théorie des nombres, comme la formule de Gauss pour le nombre de partitions d'un entier en somme de deux carrés ou celle de Jacobi pour le nombre de partitions d'un entier en somme de quatre carrés, ou encore des formules pour le nombre de partitions d'un entier en somme de deux ou quatre nombres triangulaires, c'est-à-dire de la forme $n(n+1)/2$. Tous ces jeux sur la q -dérivation occupent une soixantaine de pages ; ils sont plaisants, et les démonstrations sont élémentaires et courtes, à l'exception de celle d'une formule du produit de Ramanujan qui prend quatre pages et requiert un peu de théorie des fonctions analytiques complexes.

Qui dit dérivation, dit intégration. Il est donc naturel que les auteurs poursuivent leur promenade avec un q -analogue des primitives. L'outil central est ici l'intégrale de Jackson définie par

$$\int f(x) d_q x = (1-q)x \sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^k x). \quad (3)$$

Sous de bonnes conditions le membre de droite de (3) converge vers une fonction dont la q -dérivée est f . L'intégrale de Jackson permet aux auteurs de définir des q -analogues des fonctions Gamma et Beta classiques.

Les vingt dernières pages de l'opuscule sont consacrées à des variations élémentaires sur l'opérateur aux différences finies

$$D_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

appelé ici « h -dérivée » (h est un réel fixé, différent de 0). La formule de Taylor prend dans ce cas la forme

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} D_h^k f(a) \frac{(x-a)_h^k}{k!}$$

où $(x-a)_h^k = (x-a)(x-a-h)\dots(x-a-(k-1)h)$. Dans cette dernière partie on voit apparaître la transformée d'Abel, la formule d'interpolation de Newton, les polynômes de Bernoulli et la formule d'Euler-Maclaurin.

Le livre de Kac et Cheung est sans prétention ; ce qu'on y trouve apparaît dans des ouvrages classiques nettement plus ambitieux comme [1] ou [2]. Mais c'est cette légèreté et le style lumineux qui le rendent si plaisant. Ce petit bijou se lit d'un seul trait et se glisse facilement dans un sac de voyage. Je ne puis qu'en recommander la lecture. On pourra accessoirement y trouver de l'inspiration pour un bout de cours de DEUG ou de licence qui sort des sentiers battus.

Références

- [1] G. E. Andrews, *q-series : their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics and computer algebra*, CBMS Regional Conference Lecture Series in Mathematics, vol. 66, Amer. Math. Soc., Providence, 1986.
 - [2] G. Gasper, M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, Cambridge University Press, 1990.
- Christian Kassel, CNRS, Université Louis Pasteur, Strasbourg*