

LIVRES

Topics in geometric group theory

PIERRE DE LA HARPE

Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2000.

310 p. ISBN 0-226-31721-8. 20,80 €

Pour pouvoir décrire la théorie géométrique des groupes, et donc le sujet de cet ouvrage, il est important d'en rappeler certains résultats constitutifs, qui fondent ce domaine, qui l'illustrent, qui motivent son intérêt. Le choix de ces thèmes, tous cités dans ce livre auquel nous renvoyons pour des références, est personnel. Nous reviendrons plus tard sur son aspect d'inventaire à la Prévert.

« ... et un raton laveur ».

1) Le groupe \mathbf{Z}^2 d'isométries de l'espace vectoriel euclidien \mathbf{R}^2 est encore mystérieux. Si $N(t)$ est le nombre d'éléments x de \mathbf{Z}^2 tels que $\|x\| \leq t$, on ne connaissait toujours pas en 2001 la borne inférieure des $\alpha > 0$ tels que $N(t) - \pi t^2 = O(t^\alpha)$.

2) Un groupe Γ est dit *de type fini* s'il admet une partie génératrice finie. Soit S une partie génératrice finie fixée de Γ , stable par passage à l'inverse. La *marche aléatoire simple* sur Γ est la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sur Γ de probabilité de transition $P(X_{n+1} = y | X_n = x)$ égale à $1/\text{Card}(S)$ si $y \in xS$, et à 0 sinon. Elle est dite *récurrente* si la probabilité $P(\exists n > 0, X_n = x | X_0 = x)$ de retour en un point de départ $x \in G$ vaut 1 (ce qui ne dépend ni de x , ni de S).

Un théorème de Varopoulos (1986) dit que la marche aléatoire simple sur un groupe Γ de type fini est récurrente si et seulement si Γ est fini, ou contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe à \mathbf{Z} ou \mathbf{Z}^2 .

3) Un théorème de Stallings et de Swan (1968) dit qu'un groupe est de dimension cohomologique 1 si et seulement s'il est libre.

4) Un groupe est *linéaire* sur un corps K s'il est isomorphe à un sous-groupe de $\text{GL}_n(K)$. Un groupe Γ est *résiduellement fini* si l'intersection de ses sous-groupes d'indice fini est triviale. Un théorème de Malcev (1940) dit qu'un groupe linéaire de type fini en caractéristique nulle est résiduellement fini. Un lemme dit de Selberg (1960) (sans doute dû à Malcev (1940)) affirme qu'un groupe linéaire de type fini en caractéristique nulle contient un sous-groupe d'indice fini sans torsion.

5) Par un exercice de Bourbaki (1975), tout groupe de Lie réel connexe semi-simple, comme $SL_n(\mathbf{R})$, contient un sous-groupe dense et libre de rang 2.

6) Un théorème de Tits (1972) dit qu'un groupe linéaire Γ , en caractéristique nulle, vérifie l'alternative :

- ou bien Γ contient un sous-groupe libre de rang 2,
- ou bien Γ contient un sous-groupe résoluble d'indice fini.

7) On dit qu'un sous-groupe discret Γ d'un groupe de Lie réel connexe G est un *réseau* s'il existe une mesure de probabilité G -invariante sur G/Γ . Un groupe est *de présentation finie* s'il est isomorphe au quotient d'un groupe libre $L(S)$ de rang fini par un sous-groupe $N(R)$ normalement engendré par une partie finie R de $L(S)$. On dit alors que le couple (S, R) est une *présentation finie* du groupe.

Une combinaison de résultats importants, s'étalant sur une vingtaine d'années, et récapitulés dans cet ouvrage peut-être pour la première fois dans un livre, montre que tout réseau de G est de présentation finie.

Le groupe $SL_2(\mathbf{F}_q[T])$ n'est pas de type fini, mais $SL_n(\mathbf{F}_q[T])$ l'est pour $n \geq 3$. Le groupe $SL_3(\mathbf{F}_q[T])$ n'est pas de présentation finie (Behr, 1979), mais $SL_n(\mathbf{F}_q[T])$ l'est pour $n \geq 4$ (Rehmann-Soulé, 1976).

8) L'ensemble $\mathcal{G}r_n$ (non dénombrable si $n \geq 2$) des classes d'isomorphisme de groupes admettant une partie génératrice finie de cardinal n est muni d'une topologie naturelle, de la manière suivante. Soit $\tilde{\mathcal{G}}r_n$ l'ensemble des sous-groupes distingués d'un groupe libre $L(S)$ de rang n . On le munit de la topologie, dite topologie de Cayley, induite par la distance (ultramétrique) $d(N, N') = \inf\{n \in \mathbf{N} \mid B(e, n) \cap N = B(e, n) \cap N'\}$, avec $B(e, n)$ l'ensemble des mots réduits de longueur au plus n dans $L(S)$. L'espace $\tilde{\mathcal{G}}r_n$ est compact. Alors $\mathcal{G}r_n$ est en bijection avec l'ensemble quotient de $\tilde{\mathcal{G}}r_n$ par la relation $N \sim N'$ si et seulement si $L(S)/N$ et $L(S)/N'$ sont isomorphes.

Un théorème de Champetier (1994) montre que, muni de sa tribu des boréliens pour la topologie quotient, l'espace $\mathcal{G}r_n$ n'est pas standard (un espace borélien est standard s'il est isomorphe à l'espace borélien défini par un espace topologique métrisable localement compact σ -compact).

9) On dit qu'un sous-groupe discret Γ d'un groupe de Lie réel connexe G est *arithmétique* s'il existe un groupe algébrique linéaire \underline{G} défini sur \mathbf{Q} , et un morphisme de groupes de Lie f , surjectif et de noyau compact, de la composante neutre de $\underline{G}(\mathbf{R})$ dans G , tel que Γ et $f(\underline{G}(\mathbf{Z}))$ soient commensurables. Par exemple, $SL_n(\mathbf{Z})$ est un sous-groupe arithmétique de $SL_n(\mathbf{R})$.

Un résultat maintenant classique dit que tout sous-groupe arithmétique est un réseau. Un théorème de Margulis (en train de devenir classique!) dit que la réciproque est vraie si G est de rang au moins 2, et si Γ est irréductible.

10) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, le groupe des tresses B_n , défini par générateurs et relations par

$$B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i - j| > 1, \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \text{ si } |i - j| = 1 \rangle$$

est linéaire par un théorème récent (2000) de Krammer et de Bigelow.

11) Un *sous-groupe de congruence* de $SL_n(\mathbf{Z})$ est un sous-groupe d'indice fini contenant le noyau du morphisme $SL_n(\mathbf{Z}) \rightarrow SL_n(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ de réduction modulo un entier $\ell \geq 2$. Pour $n \geq 3$, tout sous-groupe distingué infini de $SL_n(\mathbf{Z})$ est d'indice fini (un résultat de Margulis), et tout sous-groupe d'indice fini est de congruence (un théorème de Bass-Milnor-Serre (1967) et Mennicke (1965)). Ces deux faits sont faux pour $n = 2$.

12) Tout groupe de type fini Γ , muni d'une partie génératrice finie S , admet une unique distance invariante par translation à gauche (appelée la *métrique des mots*), telle que la distance d'un élément γ à l'élément neutre e soit la longueur minimale d'une écriture de γ comme mot en éléments de S et leurs inverses. Une *quasi-isométrie* entre deux espaces métriques X, Y est une application $f : X \rightarrow Y$ telle qu'il existe des constantes $\lambda \geq 1, \varepsilon \geq 0$, avec

$$\forall x, x' \in X, \quad \frac{1}{\lambda}d(x, x') - \varepsilon \leq d(f(x), f(x')) \leq \lambda d(x, x') + \varepsilon$$

$$\forall y \in Y, \quad d(y, f(X)) \leq \varepsilon.$$

Pour $n \geq 3$, si un groupe de type fini Γ' est quasi-isométrique à $\Gamma = \text{SL}_n(\mathbf{Z})$, alors, modulo sous/sur-groupes d'indice fini et quotients/extensions de noyau fini, ils sont isomorphes. Plus généralement, par une compilation de nombreux résultats, qu'il est bien agréable de retrouver dans un même livre, un groupe de type fini quasi-isométrique à un réseau irréductible d'un groupe de Lie G réel connexe semi-simple de centre fini, est isomorphe modulo sous/sur-groupes d'indice fini et quotients/extensions de noyau fini, à un réseau de G , et on sait exactement quand deux réseaux de G sont quasi-isométriques.

13) Soit Γ un groupe de type fini, muni d'une métrique des mots. Si $f(n)$ est le cardinal de la boule de centre e et de rayon n , la *croissance* de Γ est le comportement asymptotique de la fonction $n \mapsto f(n)$ (ce qui ne dépend pas de S , lorsque l'on identifie les fonctions croissantes par la relation d'équivalence $f \sim g$ si et seulement s'il existe $a \geq 1, b \geq 0$ tels que $f(n) \leq ag(an + b) + b$ et de même en échangeant f et g). Par exemple, les groupes libres sont à croissance exponentielle, et les groupes abéliens libres à croissance polynomiale.

Un théorème de Gromov (1981) dit qu'un groupe est à croissance polynomiale si et seulement s'il est virtuellement nilpotent. Un théorème d'Avez (1970) dit que le groupe fondamental d'une variété riemannienne compacte connexe X , de courbure (sectionnelle) négative ou nulle, de dimension au moins 3, est à croissance exponentielle, sauf si X est plate. Les premiers exemples de groupes à croissance *intermédiaire* (i.e. sur-polynomiale et sous-exponentielle) sont dus à Grigorchuk (1980). La partie la plus détaillée du livre de de la Harpe concerne la construction et l'étude d'un groupe de Grigorchuk Γ , qui vérifie les propriétés suivantes.

a) Soit X l'intervalle $[0, 1]$ privé des diadiques. Soit a la bijection de X qui échange les deux moitiés de X :

$$a : t \mapsto \begin{cases} t + \frac{1}{2} & \text{si } t < 1/2; \\ t - \frac{1}{2} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et 1 l'application identité de $[0, 1]$. Notons encore a et 1 les bijections de $X \cap [u, v]$ conjuguées aux applications a et 1 précédentes par l'unique application affine envoyant $[0, 1]$ sur $[u, v]$. Pour tout mot infini à droite $w = w_0 w_1 \dots$ dans les lettres $a, 1$, notons b_w la bijection de X valant w_0 sur la première moitié de X , valant w_1 sur la première moitié de ce qui reste, etc. Alors Γ est le groupe de bijections de X engendré par $\{a, b_{w_1}, b_{w_2}, b_{w_3}\}$, pour $w_1 = a a 1 a a 1 a a 1 \dots$, $w_2 = a 1 a a 1 a a 1 a \dots$, $w_3 = 1 a a 1 a a 1 a a \dots$.

b) Le groupe Γ est un groupe de torsion, infini, de type fini, qui n'est pas de présentation finie, moyennable, résiduellement fini, à croissance intermédiaire.

Des groupes en géométrie à la géométrie des groupes

La théorie géométrique des groupes est en gros l'étude des *groupes métriques*, i.e. des groupes munis d'une distance invariante par translation à gauche. Il peut s'agir par exemple d'un groupe de Lie connexe muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche, d'un groupe de type fini muni d'une distance des mots, et pas si trivialement que cela, d'un sous-groupe d'un tel groupe, muni de la distance induite. Mais la théorie géométrique des groupes est surtout un langage et une problématique.

Le programme d'Erlangen de Klein [Kle] définit ainsi une géométrie : « étant donné un espace et un groupe de transformations de cet espace, en étudier les êtres du point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe [...]; développer la théorie des invariants relatifs à ce groupe. » Ce transfert de point de vue (géométrie = groupe) a été renforcé par la vision de Gromov [Gro1] des groupes a priori abstraits comme objets géométriques (groupe = géométrie).

Le livre de de la Harpe illustre très bien les grands problèmes de la théorie géométrique des groupes. Un regroupement dans des grandes thématiques permet de mettre de l'ordre dans l'inventaire de la partie précédente, dont l'aspect a priori aléatoire est surtout dû à la diversité des domaines touchés. La liste ci-dessous est bien sûr personnelle et non exhaustive.

(i) *Classification des groupes métriques à quasi-isométrie près.*

Deux métriques des mots sur un même groupe de type fini sont quasi-isométriques. Comme le montre le point (8), et une extension conjecturale à l'espace des classes de quasi-isométries de groupes admettant une partie génératrice de cardinal n , le problème général est très ouvert. On ne pourra pas se contenter d'un ensemble dénombrable d'invariants, ni d'un espace borélien standard d'invariants. De nombreux résultats (voir par exemple le point (12)) visent à classer les groupes de type fini, munis de métriques des mots, qui sont quasi-isométriques à un autre donné, d'origine géométrique. Dans le prolongement des idées de Klein, des invariants de quasi-isométries sont développés (dimension conformes d'espaces à l'infini, dimensions de nature cohomologique (voir le point (3),...)).

(ii) *Propriétés géométriques de groupes.*

Certaines propriétés de groupes de type finis munis d'une métrique des mots (avoir un sous-groupe d'indice fini libre, avoir un sous-groupe d'indice fini nilpotent (voir le point (13)), être hyperbolique au sens de Gromov, ...) sont invariantes par quasi-isométries, d'autres non (être résiduellement fini (à sous-groupes d'indice fini/quotients finis près), avoir la propriété (T) de Kazhdan, ...), et pour bien d'autres encore on ne sait pas.

(iii) *Propriétés asymptotiques de groupes métriques.*

Le livre fondateur [Gro2] de Gromov est une source importante d'exemples et de problèmes dans cette direction. Les points (1) et (13) ci-dessus, qui s'interpellent dans l'introduction et la conclusion du livre de de la Harpe, concernent la croissance asymptotique du cardinal des boules dans un groupe métrique discret.

Le comportement asymptotique de marches aléatoires (voir par exemple le point (2)) rentre aussi dans ce domaine.

(iv) *Propriétés asymptotiques de familles de groupes métriques.*

La croissance du nombre de (certains) sous-groupes d'indices finis d'un groupe donné est aussi intéressante (Sont à comparer, par exemple, la croissance du nombre de tous les sous-groupes d'indice au plus n et celle des sous-groupes arithmétiques d'indice au plus n dans $SL_2(\mathbf{R})$.)

(v) *Structure des sous-groupes des groupes métriques.*

Où l'on revient de Gromov à Klein, en utilisant la structure géométrique d'un groupe métrique donné pour étudier la structure de ses sous-groupes (voir les points (4), (5), (6), (7), (11), (12)).

Il y a un danger en théorie géométrique des groupes, celui de rester anecdotique. Mais ce n'est pas le cas du livre de de la Harpe.

Cet ouvrage contient bien d'autres choses encore, comme un rappel du théorème de Poincaré sur les groupes engendrés par réflexions ou une évocation des groupes hyperboliques de Gromov. La richesse et la variété des outils nécessaires pour démontrer les résultats de la section 1 font que le livre de de la Harpe ne contient pas toutes leurs preuves. Ceci peut parfois provoquer une certaine frustration, et fait que ce livre ne saurait être lu linéairement, comme l'indique son titre. Mais sa bibliographie est somptueuse (29 pages!), et ses références, bien amenées, de niveaux variés, sont une incitation à passer des heures dans une bibliothèque. Ce livre fourmille d'exemples, et contient de nombreux exercices et problèmes, certains faciles, d'autres difficiles. C'est un livre qui devrait être dans toutes les bibliothèques personnelles, car il est agréable, pour se détendre ou se cultiver, de l'ouvrir au hasard, d'y piocher des faits amusants et profonds, quitte à poursuivre l'apprentissage dans d'autres ouvrages.

Pour une mise à jour des références et des problèmes ouverts mentionnés dans le livre de de la Harpe, on peut consulter le texte de son auteur « Topics in geometric group theory — mise à jour » sur la page

<http://www.unige.ch/math/biblio/preprint/pp2001.html>

Références

- [Kle] F. Klein, *Le programme d'Erlangen*, Gauthier-Villars (1974).
 [Gro1] M. Gromov, *Infinite groups as geometric objects*, in Proc. Inter. Cong. Math. Warszawa **1** (1984) 385-392.
 [Gro2] M. Gromov, *Asymptotics invariants of infinite groups*, Vol. 2 de « Geometric group theory », A. Niblo, M. Roller eds, LMS LNS **182**, Cambridge Univ. Press, 1993.

Frédéric Paulin, École normale supérieure

Geometry of differential forms

SHIGEYUKI MORITA

Translations of Mathematical Monographs, 201. Iwanami Series in Modern Mathematics. American Mathematical Society, 2001. 321 p. ISBN 0-8218-1045-6. \$53.00

Ce livre de Morita couvre un vaste programme : variétés différentiables, cohomologie de De Rham, théorème de Hodge, fibrés vectoriels et principaux et classes caractéristiques à la Chern-Weil.

C'est un programme alléchant qui correspond par son volume à un copieux cours de maîtrise. Cependant, si l'on regarde de plus près, le résultat est un peu décevant. La rédaction est parfois inutilement bavarde. Sur le fond, les difficultés sont souvent gommées par des artifices. Deux exemples (parmi d'autres).

La définition des formes différentielles, puis plus loin des variétés riemanniennes comme objet munis pour chaque $v \in V$ d'une structure sur l'espace tangent en v , « dépendant de façon C^∞ de v ». Qu'est-ce que cela veut dire avant la mise en place du fibré tangent ?

La dualité de Poincaré est obtenue comme corollaire du théorème de Hodge — théorème admis dans le texte.

Les points délicats sur lesquels les collègues qui veulent enseigner un tel cours pourraient souhaiter se renseigner sont souvent non traités et les étudiants qui abordent pour la première fois ce sujet peuvent être déconcertés par l'abondance de précautions « didactiques » qui précèdent les définitions.

Jean Barge, *École polytechnique*

Finite Möbius Groups, Minimal Immersions of Spheres and Moduli

GABOR TOTH

Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002. 317 p. ISBN 0-387-95323-X. 88,38 €

Ce livre est un traité minutieux de la théorie des immersions minimales (isométriques) d'une sphère dans une autre. Une immersion $f : S^m(\kappa) \rightarrow S_V$, où $S^m(\kappa)$ est la sphère de courbure κ de \mathbb{R}^m et S_V la sphère unité de rayon 1 d'un espace vectoriel V , est minimale (pour les métriques standards) si elle est isométrique et harmonique (on peut se ramener à la sphère unité en remplaçant isométrique par homothétique).

Un résultat primordial de TAKAHASHI en 1966 restreint les sphères de départ S^m à celles de courbure

$$\kappa_p = \frac{m}{p(p+m-1)}$$

où $p(p+m-1)$ est la p -ième valeur propre du laplacien sphérique Δ^{S^m} . De plus les composantes de l'immersion sont des *harmoniques sphériques* d'ordre p , c'est-à-dire des polynômes p -homogènes harmoniques. De telles fonctions sphériques sont appelées fonctions p -propres (p -eigenmaps). Inversement elles sont minimales si elles sont isométriques (ou homothétiques). On peut donc définir un *degré* pour une application minimale, ce qui quantifie le problème. On passe aussi d'un problème de géométrie différentielle à un problème plus algébrique comme on va le voir.

Un premier objectif (correspondant au premier chapitre – sur les quatre que comprend le livre) est de donner des exemples de telles applications, ce qui s'obtient naturellement par des constructions équivariantes de $S^3 \simeq SU(2)$ dans S_V où $SU(2)$ admet une représentation sur V .

On peut s'intéresser aussi aux dimensions possibles de V et un résultat de MOORE minore $\dim V$ par $2m+1$ indépendamment du degré $p \geq 2$. Les constructions citées ci-dessus montrent que cette borne inférieure est atteinte. À l'autre bout, la dimension maximale (à degré p fixé) s'obtient en construisant l'*immersion minimale standard* $f_{m,p}$ à valeur dans $\mathcal{H}_{m,p}$ l'espace des polynômes harmoniques homogènes de degré p sur S^m . L'application $f_{m,p}$ généralise l'application de Véronèse $S^2 \rightarrow S^4$, dans le sens où ses composantes sont L^2 -orthogonales (et ce indépendamment de la base). On définit alors une relation entre deux applications f_1, f_2 de même degré p , de dimension de départ m et d'espaces cibles respectifs V_1, V_2 : f_2 dérive de f_1 s'il existe un morphisme surjectif $A : V_1 \rightarrow V_2$ tel que $f_2 = A \circ f_1$. On prouve alors que toute immersion minimale (pleine) dérive de l'immersion standard.

Une autre utilisation très importante de cette notion (pourtant élémentaire) de dérivation est d'aborder la résolution du problème central du livre : décrire l'espace des modules de ces immersions (supposées pleines) ? L'ensemble des classes de congruence des immersions dérivées de f forme un convexe \mathcal{M}_f dont l'intérieur correspond aux immersions dérivées f' avec même dimension d'arrivée (autrement f est aussi dérivée de f') tandis que le bord est constitué des (classes des) immersions dérivées avec des espaces cibles de dimension strictement plus petites. Qui plus est ce convexe est l'enveloppe convexe des dérivées f' de f dont l'espace $\mathcal{M}_{f'}$ se réduit à un point (on dit que f' est linéairement rigide). Au final on étudie donc un espace total $\mathcal{M}_{m,p}$ correspondant à l'immersion standard $f_{m,p}$. Pour décrire celui-ci, noter que $SO(m+1)$ agit à droite sur $\mathcal{M}_{m,p}$, et que cette action s'étend à $\mathcal{F}_{m,p} = \text{Vect}(\mathcal{M}_{m,p})$. Or

il y a aussi une représentation naturelle de $SO(m+1)$ dans l'espace $S^2\mathcal{H}_{m,p}$ des endomorphismes symétriques de $\mathcal{H}_{m,p}$ et en fait $\mathcal{F}_{m,p}$ est une sous-représentation de $S^2\mathcal{H}_{m,p}$. Déterminer la dimension de $\mathcal{F}_{m,p}$ revient à connaître les représentations irréductibles de $SO(n)$. Ceci permet d'obtenir une écriture explicite de $\mathcal{F}_{m,p}$ et de minorer la dimension de $\mathcal{M}_{m,p}$ par 18, si toutefois $p \geq 4$ et $m \geq 3$ (sinon il est prouvé que cet espace se réduit à un point).

Ces résultats sont dus en première mouture à DO CARMO et WALLACH, à partir des années 1970, mais sont résolus ici par l'auteur par d'autres méthodes. Noter que pour parvenir à ses fins, l'auteur étudie aussi le cas plus simple des fonctions p -propres (plus nécessairement conformes) pour lequel l'analyse est sensiblement la même.

Le livre regorge de digressions notamment dans la première partie, où l'auteur classe les groupes finis d'isométries de \mathbb{R}^3 , et d'homographies de la sphère (groupe de Möbius), donnant au passage une jolie construction des polyèdres réguliers. De même, les constructions d'immersions équivariantes induisent des applications de S^3/G dans une sphère. Cela permet de montrer un théorème de DETURCK et ZILLER : tout espace homogène sphérique peut être plongé minimalement (et isométriquement) dans une sphère.

Le livre est très dense, et s'il commence par les aspects élémentaires du sujet, les calculs sont rapidement touffus et atteignent la complexité attendue pour un sujet récent. L'auteur fait le tour d'un domaine qu'il connaît bien puisqu'il y a grandement contribué, en évitant l'écueil du survey, tout en indiquant clairement les autres méthodes de démonstrations possibles. Son désir visible de simplifier autant que faire se peut les démonstrations est louable et convaincant ; par contre on peut regretter que la présentation avec ses multiples notations n'aident pas le lecteur à discerner la stratégie essentielle des calculs techniques. Néanmoins l'ouvrage est bien parti pour être une référence sur ce sujet transverse.

Pascal Romon, Université de Marne-La-Vallée

Weighing the Odds – A Course in Probability and Statistics

DAVID WILLIAMS

Cambridge University Press, 2001. 560 p. ISBN : 052100618X. 49,69 €

David Williams est l'auteur — bien connu dans la communauté probabiliste — de plusieurs livres qui ont eu, dès leur parution, un retentissement important. Ce fut le cas, tout d'abord, avec son livre (1979, Wiley) sur le mouvement brownien qui a été le premier, sur ce sujet, de l'ère « post Itô–Mc Kean » : *Diffusion processes and their sample paths* (1965, Springer), livre de référence mais d'accès difficile...

Avec la collaboration de C. Rogers, D. Williams (1987, Wiley, maintenant republié par CUP) a écrit un second traité (en deux volumes), d'une beaucoup plus grande ampleur, dans lequel les auteurs développent, entre autres, les thèmes du livre de 1979 à l'aide du calcul stochastique.

Le troisième livre de D. Williams (1991, CUP) adopte le point de vue que « la plupart » des problèmes de probabilité peuvent être résolus à l'aide de (la construction de) martingales adéquates.

Dans chacun de ses livres, l'auteur dialogue avec le lecteur, et lui communique son enthousiasme ; l'accent est mis beaucoup plus sur la portée (et/ou l'esthétique...) des résultats, leurs applications, la puissance des méthodes évoquées que sur le déroulement rigoureux des arguments : Définition – Lemme – Théorème – Démonstration...

Le nouveau livre de D. Williams (2001) : *Weighing the Odds*, qui fait l'objet de cette revue, et dont on pourrait traduire le titre par « La pondération des aléas »,

présente les mêmes caractéristiques que les trois premiers livres : de façon systématique, l'auteur s'adresse aux étudiants de niveau licence (*grosso modo*) voire à toute personne qui s'interroge plus ou moins sérieusement sur les aspects probabilistes ou statistiques de la « vie courante », ce qui amène à de nombreuses discussions du genre : « jeux de hasard » à la télévision (p. 15), introduction à la génétique (p. 87-95), augmentation significative (?) de cancers autour de certaines zones industrielles (p. 239 ; j'en profite pour signaler les études rassemblées sur ce sujet dans un fascicule (1999) du *Journal de la Soc. Stat. de France*, à l'issue d'une journée de Statistique (1998) à l'Académie des Sciences)

Mais le livre contient également beaucoup d'autres « ouvertures » : allez regarder, nous dit l'auteur, tel ou tel livre sur la percolation (p. 439), la géométrie stochastique (p. 438)... Il nous fait partager ses hésitations entre les philosophies fréquentiste et bayésienne, la balance penchant d'un côté ou de l'autre (p. 311), selon les questions ; il se lamente (p. 285) sur la séparation (le fossé ?) entre les probabilités à la Kolmogorov, et les probabilités quantiques ; je vous donnerai donc plus tard (chapitre 10), écrit-il, les rudiments des probabilités quantiques.

Bien sûr, le style d'exposition de Williams a ses inconvénients et souvent, le texte plaira plus au lecteur « qui sait déjà » (ce qui est tout à fait naturel...) qu'au néophyte sérieux qui devra aller chercher ailleurs les ε et δ manquants... Ceci est un peu méchant ! Disons plutôt que, au lieu de faire réfléchir le lecteur sur les hypothèses « impeccables » de tel ou tel théorème, Williams dirige le projecteur sur des exemples, contre-exemples (par exemple : le défaut d'uniforme intégrabilité p. 414), sur des notations plus ou moins conflictuelles qui révèlent des difficultés : c'est le cas avec les lois conditionnelles (p. 258-260) sur lesquelles il revient tout au long du livre (Chapitres 1-4-9) : dans le fond, celui-ci est une discussion ininterrompue des modifications de l'aléa – d'où le titre du livre - compte tenu de notre connaissance partielle des phénomènes étudiés.

Venons en à la structure générale du livre : cinq premiers chapitres (environ 160 pages) consacrées aux notions fondamentales des probabilités présentées en regard de celles de la statistique ; ils sont suivis de trois chapitres (environ 200 pages) sur les statistiques : intervalles de confiance, statistique bayésienne, modèles linéaires (le chapitre 8 qui, à lui seul, fait 100 pages), puis on revient aux probabilités dans les deux derniers chapitres avec, pour le chapitre 9, une discussion de l'espérance conditionnelle, des martingales et des processus de Poisson et, pour le chapitre 10, des probabilités quantiques.

Le livre se termine par quatre appendices, qui contiennent un certain nombre de points techniques (par exemple : l'axiome du choix !) laissés de côté lors de l'exposition principale, ainsi que la solution des principaux exercices (Appendice B), et une invitation à des lectures plus approfondies et une ample discussion de la littérature (Appendice D).

Le livre contient de nombreux exercices, reprend la discussion de questions classiques (par exemple : paradoxe de l'autobus, p. 434 ; problème des moments, etc.), remises au goût du jour avec des aventures interplanétaires (!), et surtout avec l'exploitation d'articles très récents (par exemple : B. Simon (2000) pour le problème des moments, p. 500).

En conséquence, ce livre fait souvent penser au classique volume 1 de Feller, avec, cependant, un discours beaucoup plus proche du lecteur (voir plus haut) ; il est bourré d'astuces pédagogiques, dont la référence systématique toute simple aux numéros de page (par exemple : le résultat R se trouve en 236R) n'est pas la moindre ! Mais aussi, l'auteur nous fait souvent démarrer sur une fausse piste, puis rétablit le bon argument ; dans le chapitre 10, il initie le lecteur par touches successives, de plus en

plus précises... , aux probabilités quantiques; de nombreuses notes d'humour (j'ai bien aimé : s_{obs} à faire pleurer les statisticiens... , p. 170) émaillent le texte.

En résumé, ce nouveau livre de Williams fait progresser le lecteur de discussions volontairement élémentaires sur les questions de pile ou face vers une vision globale des probabilités et des statistiques, dans le but avoué de réconcilier ces deux domaines qui (dixit l'auteur, premières lignes de la Préface!) se sont séparés, puis ont divorcé.

C'est une véritable mine d'informations dans les deux domaines, l'auteur donnant finalement accès aux techniques et aux connaissances les plus récentes.

Il n'est pas besoin d'être devin pour affirmer que ce livre va devenir très rapidement un élément indispensable de la bibliothèque de tout agrégatif (option probabilités et statistiques...), à défaut de faire partie de la bibliothèque officielle de l'agrégation de Mathématiques (comme « Toulouse »...).

En tout cas, bravo David pour ce nouveau tour de force, et bonne continuation! (je doute que tu ranges ton stylo, ou ta souris, au placard, comme tu l'affirmes à la première page!).

*Marc Yor
temporairement au Research Institute of Mathematical Sciences
Kyoto University (Japon)*