injustices et de froisser des susceptibilités en tentant vainement de citer tous ceux qui auraient mérité de l'être (au nombre desquels je n'ai pas la prétention de me compter).

Olivier Catoni
CNRS - Université Paris VI
Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires

Géométrie non commutative d'après Alain Connes : la notion de triplet spectral

G. Skandalis

L'Académie Royale des Sciences de Suède, réunie en assemblée générale le 24 janvier 2001, a décidé de décerner le Prix Crafoord pour l'année 2001, dans le domaine des mathématiques, à Alain Connes, professeur à l'IHÉS et au Collège de France, Paris, pour ses travaux importants dans le domaine de la théorie des algèbres d'opérateurs et pour avoir été l'un des fondateurs de la géométrie non-commutative.

Le mathématicien français Alain Connes a ouvert de nouvelles voies dans la théorie des algèbres d'opérateurs et est l'un des fondateurs de la géométrie non-commutative. Cette dernière est un domaine entièrement nouveau des mathématiques à la création duquel Alain Connes a apporté une contribution décisive.

Pour l'illutrer nous avons reçu le texte suivant, écrit par Georges Skandalis. Il est à noter aussi qu'Alain Connes a été l'un des conférenciers de l'Université de tous les Savoirs, et que son texte est disponible dans le volume consacré aux Mathématiques publié aux Éditions Odile Jacob.

⋆ ⋆ ⋆

Qu'est-ce que la géométrie non commutative selon Alain Connes ? D'abord, des exemples issus de la géométrie, de l'analyse harmonique, de la physique, voire de la théorie des nombres... La motivation est avant tout physique : on veut allier la relativité – donc la géométrie riemannienne – à la physique quantique, donc non commutative.

Je présente ici quelques aspects de la théorie. L'exposé qui suit se veut non technique. S'il m'arrive d'employer quelques «gros mots» par ci par là, c'est en espérant qu'ils aideront ceux qui connaissent ce jargon, mais qu'ils ne seront pas un obstacle pour les autres.

Un bon analogue non commutatif de la notion d'espace (localement) compact est fourni par la théorie des C^*-algèbres.

Rappelons qu'une *C^*-algèbre* est une algèbre de Banach complexe A munie d'une *involution* $a \mapsto a^*$ (antilinéaire et qui vérifie $(ab)^* = b^*a^*$ pour $a, b \in A$) et telle que, pour tout $a \in A$, on ait $\|a^*a\| = \|a\|^2$.

Les C^*-algèbres commutatives sont exactement les algèbres de Banach des fonctions continues (nulles à l'infini) sur un espace (localement) compact. On peut donc considérer les C^*-algèbres non commutatives comme des « espaces (localement) compacts non commutatifs ».

Le but de la géométrie non commutative selon Connes est d'essayer d'appliquer certains outils de la géométrie à certaines C^*-algèbres non commutatives naturelles, qui peuvent être considérées comme des « variétés différentielles non commutatives ». Certains outils passent sans problème au cadre non commutatif : la théorie des fibrés vectoriels, donne celle des modules projectifs, qui sont classifiés par la K-théorie. La cohomologie de de Rham passe plus difficilement ; son analogue non commutatif, la *cohomologie cyclique* de Connes, a été un des premiers succès de la géométrie non commutative. Ensuite, peu à peu Connes a pu construire dans cette cohomologie cyclique les analogues du cycle fondamental, des formes différentielles, des connexions, ainsi que plusieurs autres objets courants de la géométrie.

On dispose dans notre étude de plusieurs exemples naturels, sur lesquels on voudrait pouvoir appliquer des idées géométriques :

– *Le dual d'un groupe de type fini.* Soit Γ un groupe. Il lui est naturellement associé l'algèbre $\mathbf{C}\Gamma$: le $\mathbf{C}$-espace vectoriel admettant une base $(u_g)_{g\in\Gamma}$, muni du produit défini par $u_g u_h = u_{gh}$ (pour $g, h \in \Gamma$). Son adhérence $C_r^*(\Gamma)$ dans la représentation régulière dans l'espace hilbertien $\ell^2(\Gamma)$ est une C^*-algèbre appelée *C^*-algèbre réduite de* Γ. Signalons que, suivant les propriétés étudiées, on peut être amené à considérer une autre C^*-algèbre complétion de $\mathbf{C}\Gamma$: la C^*-algèbre maximale, C^*-algèbre enveloppante de l'algèbre $\mathbf{C}\Gamma$. Lorsque Γ est commutatif, l'algèbre $C_r^*(\Gamma)$ est l'algèbre des fonctions continues sur le groupe (compact) $\widehat{\Gamma}$ dual de Pontrjagyn de Γ. Si Γ est de plus de type fini, $\widehat{\Gamma}$ est une variété (un tore). Lorsque Γ n'est plus commutatif mais reste de type fini, il est naturel de considérer la C^*-algèbre $C_r^*(\Gamma)$ comme une variété non commutative.

– *Les produits croisés.* Lorsque le groupe Γ opère par automorphismes sur une algèbre A, on forme ce produit croisé $A \rtimes \Gamma$: c'est l'algèbre engendrée par A et $\mathbf{C}\Gamma$ avec la règle de commutation $u_g a = (g.a)u_g$ pour $a \in A,\ g \in \Gamma$, où l'on a noté $a \mapsto g.a$ l'action de g dans A.

Dans les exemples qui nous intéressent, l'algèbre A est l'algèbre des fonctions continues sur une variété V et l'action du groupe Γ (de type fini) sur A provient d'une action par difféomorphismes sur V.

L'exemple le plus simple, pour lequel de très nombreux calculs ont été effectués est celui du « tore non commutatif » :
Notons $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C};\ |z| = 1\}$; le groupe $\Gamma = \mathbf{Z}$ opère sur $\mathbf{U}$ par une rotation irrationnelle : $n.z = e^{2i\pi n\theta}z$, où $\theta \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Notons alors $u = u_1$ et $v : z \mapsto z$, $v \in A = C(\mathbf{U})$.
Le produit croisé $A \rtimes \mathbf{Z}$ est la C^*-algèbre universelle engendrée par deux opérateurs unitaires u, v tels que $uv = e^{2i\pi\theta}vu$.
Cette algèbre s'appelle le tore non commutatif, puisque son analogue commutatif, obtenu pour $\theta = 0$, est la C^*-algèbre universelle engendrée par deux opérateurs unitaires qui commutent, c'est-à-dire $C^*(\mathbf{Z}^2) = C(\widehat{\mathbf{Z}^2}) = C(\mathbf{T}^2)$.

Une variante très importante du produit croisé est :
– *La C^*-algèbre d'un feuilletage.* C'est l'exemple de base, qui guide les travaux dans le domaine depuis une vingtaine d'années : celui de la « variété non commutative » V/F, espace des feuilles d'un feuilletage F sur une variété V. En se plaçant sur une transversale (ouverte) M, on est amené à considérer le produit croisé de l'algèbre $C_0(M)$ des fonctions continues nulles à l'infini sur M par un (pseudo)-groupe de difféomorphismes.

Pour pouvoir adapter les outils de la géométrie dans le cadre non commutatif, on cherche à exprimer les divers outils de la géométrie d'une variété V à l'aide d'une algèbre de fonctions sur V, sans utiliser la commutativité de cette algèbre.

Prenant modèle sur l'exemple des opérateurs de type signature ou Dirac sur une variété riemannienne, Alain Connes a proposé comme objet de départ d'« une géométrie non commutative » un triplet (H, A, D) où H est un espace de Hilbert, A est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{L}(H)$ des opérateurs continus sur H, et D est un opérateur autoadjoint non borné à résolvante compacte, agissant sur H. Un tel triplet (H, A, D) est appelé un *triplet spectral*. Le tout est maintenant de mettre sur notre triplet spectral suffisamment de conditions pour pouvoir faire des calculs, tout en incluant suffisamment d'exemples. Ces conditions varient d'un exemple à l'autre. Cela montre en fait la richesse de la théorie.

La géométrie non commutative dans le cas commutatif

Soit V une variété riemannienne compacte. Notons $C(V)$ l'algèbre des fonctions continues sur V.
Soit D un « bon » opérateur différentiel elliptique d'ordre 1. Pour fixer

les idées, on va supposer que D est l'opérateur de signature $D = d + d^*$. On va considérer D comme opérateur autoadjoint non borné, à résolvante compacte, agissant sur l'espace de Hilbert H des formes différentielles de carré intégrable.
Considérons l'algèbre $C(V)$ comme agissant par multiplication sur H.
Remarquons tout de suite que, pour $f \in C(V)$, l'opérateur

$$[D, f] = Df - fD$$

est borné si et seulement si f est lipschitzienne.
De plus, $\|[D, f]\|$ est égal à la constante de Lipschitz de f.
En effet, si f est de classe C^1, $[D, f]$ est l'opérateur de multiplication de Clifford par df.

À cet endroit, on peut noter que notre donnée nous a permis de retrouver complètement la métrique sur V, donc la structure riemannienne. En effet, la distance entre deux points vaut

$$d(a, b) = \sup\{|f(a) - f(b)|,\ f \in C(X); \|[D, f]\| \leq 1\}.$$

On retrouve aussi facilement la structure C^∞ de V, puisqu'une fonction $f \in C(V)$ est de classe C^∞ si et seulement si elle est dans le domaine C^∞ de la dérivation $\delta : f \mapsto [|D|, f]$, c'est à dire, pour tout n, dans le domaine de la composée n-ième $\delta^{\circ n}$ de δ avec elle même. Ici $|D|$ désigne le module de D, c'est à dire l'opérateur positif tel que $|D|^2 = D^*D = D^2$. En effet, $|D|$ est un opérateur pseudodifférentiel dont le symbole principal est scalaire (en un vecteur cotengant ξ c'est la multiplication par $\|\xi\|$). Le commutateur de $|D|$ avec un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0 est pseudodifférentiel d'ordre 0, et est donc borné.

Remarquons que notre triplet spectral nous a permis de retrouver une algèbre d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 0 ! Notons que les opérateurs obtenus ainsi à partir de $C^\infty(V)$ par commutateur avec $|D|$ ont un symbole principal scalaire (ils sont même scalaires dans le cas plat). Si on veut obtenir des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 0 opérant sur le fibré des formes, il suffit de considérer la plus petite sous algèbre d'opérateurs sur H contenant $C^\infty(V)$, les commutateurs $[D, f]$ pour $f \in C^\infty(V)$ et stable par commutateur avec $|D|$. Notons-la $\mathcal{P}_0$. On retrouve aussitôt les opérateurs pseudodifférentiels d'ordre m (complexe) : ce sont les opérateurs de la forme $P(D^2 + 1)^{m/2}$, où $P \in \mathcal{P}_0$.

Nous allons à présent rappeler un outil très puissant et que nous n'aurons aucun mal à définir juste en termes de notre triplet spectral : *le résidu non commutatif, ou résidu de Wodzicki.*

Le résidu d'un opérateur pseudodifférentiel P est donné par une «formule locale» :

$$\operatorname{res} P = (2\pi)^{-\dim V} \int_V s_P$$

où s_P est une densité sur V qui se calcule à l'aide du symbole (total) de P : pour $x \in V$, $s_P(x)$ est la moyenne sur la sphère de l'espace cotangent en x du symbole d'ordre $-\dim(V)$ de P (dans n'importe quelle carte de V). Ce résidu admet de très nombreuses interprétations. Pour nous, la plus pratique à utiliser est la suivante : notons Tr la trace définie sur l'idéal des opérateurs à trace sur H. La fonction

$$z \mapsto \mathrm{Tr}(P(D^2+1)^{-z/2})$$

définie pour $\Re(z)$ assez grande ($\Re(z) > \dim(V) + m$ où m est – la partie rélle de – l'ordre de P), admet un prolongement méromorphe sur tout $\mathbf{C}$, avec des pôles simples. Alors $\mathrm{res}(P)$ est le résidu en 0 de cette fonction. En particulier, le résidu de Wodzicki s'interprète uniquement en termes de notre triplet spectral. De plus, ce résidu est une trace : si P, Q sont des opérateurs pseudodifférentiels, on a $\mathrm{res}\, PQ = \mathrm{res}\, QP$. C'est d'ailleurs l'unique trace sur l'algèbre des opérateurs pseudodifférentiels sur V.

À l'aide du résidu de Wodzicki, on peut à présent retrouver le cycle fondamental sur V, c'est-à-dire l'intégrale sur V des formes différentielles de plus haut degré. On supposera que la dimension n de V est un multiple de 4. Dans ce cas, le fibré des formes différentielles est somme directe orthogonale de deux sous fibrés $E_+ \oplus E_-$ (les espaces propres de l'opérateur $*$ de Hodge) et l'opérateur de signature est impair pour cette décomposition (il envoie les section de E_+ dans celles de E_- et inversement). On notera ε l'opérateur de *graduation* défini par $\varepsilon(\xi_+ + \xi_-) = \xi_+ - \xi_-$, où $\xi_\pm$ est une section de $E_\pm$. Si $f_0, f_1, \ldots, f_n \in C^\infty(V)$, on a

$$\int_V f_0 df_1 \ldots df_n = \pi^n \,\mathrm{res}(\varepsilon f_0 [D, f_1] \ldots [D, f_n](D^2+1)^{-n/2})$$

où ε est l'opérateur de graduation.

L'opérateur $\varepsilon f_0 [D, f_1] \ldots [D, f_n](D^2+1)^{-n/2}$ apparaissant dans cette formule est d'ordre $-n$. Le résidu de Wodzicki de ces opérateurs peut être aussi interprété comme une *trace de Dixmier* qui est une trace positive définie sur un idéal légèrement plus gros que l'idéal des opérateurs à trace.

Les axiomes d'une géométrie non commutative

La discussion du cas commutatif nous amène à préciser les conditions que l'on va mettre sur notre triplet spectral.

a) L'ensemble des $f \in A$ tels que $[D, f]$ soit borné est dense dans A. Comme la résolvante de D est compacte, cette condition est une version non bornée, due à Baaj-Julg de la théorie de Kasparov. On dit que le triplet (H, A, D) est *module de Fredholm non borné.*

Un tel module définit un *indice analytique* qui est un morphisme de la K-théorie de A vers $\mathbf{Z}$. Un des problèmes naturels est alors de calculer cet homomorphisme.

b) La résolvante de D est dans une classe de Schatten C^p, *i.e.* $(D^2+1)^{-p/2}$ est un opérateur à trace. On dit que le triplet (H,A,D) est *p-sommable.* Dans ce cas la *dimension* de (H,A,D) est égale à $\inf\{p;\ (D^2+1)^{-1/2} \in C_p\}$. Une condition beaucoup plus faible est de dire que $\exp(-sD^2)$ est à trace pour $s > 0$. Dans ce cas on dit que (H,A,D) est *θ-sommable.*

On peut dans ces deux cas écrire une *formule d'indice :* on peut à l'aide de la trace des opérateurs écrire un cocycle cyclique sur l'algèbre $\{a \in A;\ [D,a]$ est borné$\}$ qui va jouer le rôle de la classe d'indice dans la formule d'Atiyah-Singer.

c) On peut faire des hypothèses plus contraignantes, en supposant que

– (H,A,D) est p-sommable ;

– les éléments C^∞ pour la dérivation $\delta : f \mapsto [|D|, f]$ forment une sous-algèbre $\mathcal{A}$ dense dans A ;

– pour P dans la plus petite sous-algèbre de $\mathcal{L}(H)$ contenant $\mathcal{A}$, les commutateurs $[D,f]$ pour $f \in \mathcal{A}$ et stable par δ, la fonction $z \mapsto \mathrm{Tr}(P(D^2+1)^{-z/2})$ définie pour $\Re(z)$ assez grande, admet un prolongement méromorphe sur tout $\mathbf{C}$, avec des pôles simples.

Dans ce cas, on pourra écrire une formule de l'indice en termes de résidus de prolongements méromorphes de fonctions de la forme

$$z \mapsto \mathrm{Tr}(P(D^2+1)^{-z/2}) \ ;$$

comme cette formule est uniquement basée sur des résidus, elle est plus «robuste» : elle ne change pas quand on modifie D par un opérateur de rang fini. Dans le cas d'un opérateur (pseudo-)différentiel D sur une variété, cette formule ne dépend que du symbole total de D. Pour cela on dit que cette formule d'indice est *locale.*

d) Dans certains cas, on pourra exprimer le fait que l'opérateur D est *différentiel d'ordre* 1. Cela s'exprimera en disant que $[D,f]$ est *local.* En géométrie «commutative», cette localité s'exprime en disant que $[D,f]$ commute aux multiplications par les fonctions ; mais évidemment, dans le cadre non commutatif, ce n'est pas la bonne définition : les éléments de $\mathcal{A}$ elle même doivent être locaux. Inspiré par la théorie de Tomita, Connes propose un analogue non commutatif à la localité : on suppose donné un opérateur antilinéaire $J : H \to H$ tel que $J^2 = \pm\,\mathrm{id}$ et $J\mathcal{A}J^{-1}$ et $\mathcal{A}$ commutent. On dit alors que $T \in \mathcal{L}(H)$ est local si T commute à $J\mathcal{A}J^{-1}$. Dans le cas commutatif où H est l'espace des sections L^2

d'un fibré S sur une variété V, J est juste une structure réelle sur S et $J\mathcal{A}J^{-1} = \mathcal{A}$.

Nous terminons en discutant trois exemples non commutatifs.

1. Le cas d'un groupe Γ de type fini.

On peut prendre $H = \ell^2(\Gamma)$ dans lequel $A = C_r^*(\Gamma)$ opère par translations ; l'opérateur $|D|$ est l'opérateur $\xi \mapsto \ell\xi$, où $\ell : \Gamma \to \mathbf{R}_+$ est une fonction longueur, *i.e.* satisfait $\ell(gh) \leq \ell(g) + \ell(h)$.
Remarquons que $u_g^{-1}|D|u_g - |D|$ est un opérateur de multiplication continu et sa norme est égale à $\ell(g)$; donc

$$[|D|, u_g] = u_g\Big(u_g^{-1}|D|u_g - |D|\Big)$$

est aussi continu. Notons que $(H, A, |D|)$ est p-sommable si et seulement si le groupe Γ est à croissance polynomiale (pour la longueur ℓ), ce qui implique que Γ est presque nilpotent. Par contre, lorsque ℓ est la longueur des mots, ce module est toujours θ-sommable.

On n'a construit que le module $|D|$ de D. Celui-ci donne des informations métriques, mais il manque la *phase* de D qui est la seule qui compte pour l'indice. Celle-ci pourra être construite dans certains cas. Par exemple cette construction peut se faire si le groupe Γ opère sur un arbre, ou sur un immeuble de Bruhat-Tits.

2. L'opérateur de signature transverse sur un feuilletage.

C'est un cas étudié par Connes en collaboration avec Moscovici dans toute une série d'articles. On va en fait se placer dans le cas légèrement plus simple d'un groupe dénombrable Γ de difféomorphismes d'une variété M de classe C^∞ de dimension n. Si l'on veut construire un opérateur de signature dans ce cadre, le premier problème que l'on rencontre est que, dans le cas général, il n'y a pas de métrique sur M invariante par Γ, donc on ne peut pas construire un opérateur différentiel elliptique dont le symbole principal soit invariant par Γ. Pour cela, Connes et Moscovici se placent dans l'espace P des métriques sur M, c'est-à-dire l'ensemble des repères du fibré tangent, quotienté par l'action de $O(n)$. On construit alors un opérateur pseudodifférentiel D *hypoelliptique* qui est « presque invariant » par *tous les difféomorphismes* de M.

Cet opérateur se décrit en écrivant une formule $D|D| = Q$,

$$Q = d_V^* d_V - d_V d_V^* + d_t + d_t^*$$

où d_V est un opérateur de différentiation « vertical » *i.e.* le long de la fibre de la fibration $P \to M$ et d_t est un opérateur de différentiation « transverse » à cette fibration.

On peut démontrer que le triplet (H, A, D) ainsi obtenu satisfait toutes les conditions c) ci-dessus. On peut donc donner une formule locale de l'indice. Pour faciliter le calcul de ce cocycle, Connes et Moscovici introduisent de plus une algèbre de Hopf $\mathcal{H}_n$ non commutative et non cocommutative de « champs de vecteurs transverses » sur $\mathbf{R}^n$ qui joue le rôle de « groupe quantique de symétries » de la situation. Signalons qu'une algèbre de Hopf analogue est aussi utilisée par Connes et Kreimer afin d'organiser les calculs dans la théorie de la renormalisation.

3. Le cas du tore non commutatif.

Dans ce cas, tous les calculs sont complètement explicites : l'espace de Hilbert que l'on va prendre s'écrit

$$H = \ell^2(\mathbf{Z}^2) \oplus \ell^2(\mathbf{Z}^2).$$

L'algèbre A engendrée par des opérateurs unitaires u, v tels que $vu = e^{2i\pi\theta}uv$ opère sur chacune des composantes $\ell^2(\mathbf{Z}^2)$ par les mêmes formules :

$$u(E_{n,m}) = E_{n+1,m} \text{ et } v(E_{n,m}) = e^{2ni\pi\theta}E_{n,m+1},$$

où l'on a noté $(E_{n,m})_{n,m\in\mathbf{Z}}$ la base hilbertienne canonique de $\ell^2(\mathbf{Z}^2)$. L'opérateur D s'écrit :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \partial^* \\ \partial & 0 \end{pmatrix}$$

où ∂ est l'opérateur donné par $\partial(E_{n,m}) = (n + im)E_{n,m}$.

On dispose aussi ici de l'opérateur antilinéaire J qui opère sur chaque composante $\ell^2(\mathbf{Z}^2)$ par la formule $JE_{n,m} = e^{2nmi\pi\theta}E_{-n,-m}$. L'opérateur D est alors différentiel au sens de la condition d) ci-dessus.

Cet exemple a donné lieu à des calculs très jolis, et a servi de laboratoire pour de nombreux outils de la théorie. Certains d'entre eux se sont révélés assez fins pour avoir un comportement dépendant des propriétés diophantiennes du nombre irrationnel θ.

De nombreux autres exemples naturels ont été – et sont étudiés. On n'est certainement qu'au début de l'histoire...

George Skandalis
Université Paris VII
Institut de Mathématiques de Jussieu