

Comment s'enroulent les processus aléatoires

J. Franchi

Texte déjà paru dans L'Ouvert, avril 2002 (105).

Il s'agit ici de présenter un thème bien particulier de la très riche et très active recherche en théorie des probabilités : l'étude des enroulements effectués par un processus aléatoire, et en particulier par le mouvement brownien ou le flot géodésique, autour d'un point ou d'une courbe ou d'une pointe. Le but principal est d'obtenir pour ces enroulements à l'instant t la bonne normalisation, c'est-à-dire la vitesse à laquelle ils évoluent, et la loi asymptotique de ces enroulements normalisés lorsque le temps t tend vers l'infini.

Bien entendu, le choix de ce thème et la présentation qui en est faite ci-dessous reflètent l'intérêt et le point de vue personnels de l'auteur, et donc ne prétendent ni à l'objectivité ni à l'exhaustivité, et n'engagent que lui.

1. Introduction

Le mouvement brownien est un objet fondamental dans plusieurs branches scientifiques, et pas seulement dans la théorie des probabilités.

Il intervient beaucoup en particulier en analyse mathématique, en physique théorique, comme par exemple pour appréhender les intégrales de chemin de Feynman et pour modéliser la croissance des polymères, en mathématiques financières ; il a des connexions encore avec la géométrie différentielle, la géométrie hyperbolique et les systèmes dynamiques.

Introduit à l'origine de façon heuristique par le biologiste Brown observant de fines particules soumises à des multitudes de petits chocs, il est rapidement devenu un concept de base pour bien des physiciens théoriciens et des mathématiciens, et est passé du stade d'outil à celui d'objet d'études à part entière, après avoir été dûment formalisé par les mathématiciens de la première moitié du vingtième siècle. Il offre en effet entre autres l'avantage d'être au carrefour de plusieurs notions essentielles en théorie des probabilités : c'est tout à la fois un processus gaussien, une martingale, et un processus de Markov ; sans pour cela que ce soit un objet dont il soit possible de faire rapidement le tour... Les travaux dont il est le cœur se multiplient à vive allure depuis le milieu du vingtième siècle.

Quelques unes des grandes étapes ont été les découvertes suivantes : ses liens avec les marches aléatoires, avec la théorie du potentiel et les fonctions harmoniques, avec la théorie de la mesure, avec les équations de Laplace et de la chaleur ; l'intégration stochastique et le calcul stochastique d'Itô, la théorie des martingales, la résolution des équations différentielles stochastiques, le temps local, la théorie des excursions, le calcul de Malliavin.

Insistons sur la nature géométrique du mouvement brownien, car cela importe pour le propos de cet article. La géométrie étudie essentiellement les espaces courbes, et en premier lieu ceux qui sont approximativement localement faits comme les espaces euclidiens, à savoir les variétés riemanniennes. Une telle variété est naturellement munie d'un laplacien (généralisant le laplacien euclidien usuel), lequel donne naturellement naissance à un mouvement brownien vivant sur la variété ; par conséquent le mouvement brownien est aussi un objet intrinsèquement géométrique. Et les quantités qu'on pourra calculer par son intermédiaire seront donc des quantités relevant de la géométrie de la variété qui le porte. Il en est ainsi en particulier des enroulements, ou nombres de tours, produits par le mouvement brownien, qui font pour une bonne part l'objet de cet article.

Un autre objet naturel et important sur une variété (complète), ou plutôt sur le fibré tangent de cette variété (constitué par l'ensemble de ses éléments de contact), est son flot géodésique : partant au temps 0 d'un élément de contact (*i.e.* un point et un vecteur tangent unitaire basé en ce point), on suit à vitesse constante la géodésique qu'il détermine. Considérant simultanément le flot géodésique agissant sur tous les éléments de contact, on obtient un exemple fondamental de système dynamique. Le comportement au cours du temps d'un tel système dynamique est frappant en particulier lorsque la variété qui le porte est de courbure partout négative. Il est alors connu depuis Hadamard que ce comportement est « ergodique » : en temps suffisamment grand, la moyenne temporelle par rapport au flot de toute fonctionnelle raisonnable sur le fibré tangent s'identifie génériquement (par rapport à certaines lois de départ des géodésiques) à une moyenne spatiale ; ce qui signifie que le flot géodésique passe statistiquement un temps bien réparti dans toutes les configurations possibles.

Ce comportement ergodique du flot géodésique le rapproche de façon surprenante a priori du mouvement brownien. Et de fait l'analogie entre ces deux processus, de natures très différentes pourtant, puisque l'un est totalement déterministe (une fois son origine fixée) et l'autre totalement aléatoire, peut être précisée et amplifiée, en courbure négative toujours, et permet de calculer au moyen du mouvement brownien des quantités subtiles relatives au flot géodésique, qu'on ne sait pas calculer autrement (quoiqu'il convienne ici de mentionner la méthode du codage, concurrente et très différente à la fois, développée en particulier par M. Babillot et M. Peigné), comme justement la loi asymptotique de certains enroulements.

2. Mouvement brownien plan et théorème de Spitzer

Donnons d'abord une façon de définir le mouvement brownien plan : pour chaque entier n , quadrillons le plan par un grillage régulier parallèle aux axes et de maille formant un carré de côté $1/\sqrt{n}$. La marche aléatoire simple sur ce

quadrillage est obtenue par la règle de déplacement suivante : en chaque point atteint on lance deux pièces de monnaie, la première décidant si on se déplace horizontalement ou verticalement et la seconde si on se déplace de $+1$ ou de -1 . Choisissons de plus de ne regarder cette marche qu'aux instants multiples de n . À toute suite illimitée de lancers de pièces est ainsi associée une trajectoire de la marche aléatoire. Reliant les points successifs par où passe une trajectoire, on la voit comme une ligne brisée continue dans le plan. Nous avons donc, pour tout n , correspondant à toutes les suites illimitées possibles de lancers de pièces, un ensemble de trajectoires continues du plan. On démontre que lorsque n tend vers l'infini ces trajectoires convergent localement uniformément vers d'autres trajectoires, qui sont celles du mouvement brownien plan : on tire au sort finalement une telle trajectoire ω , et le mouvement brownien B est simplement défini par : pour tout temps réel $t \geq 0$, $B_t(\omega)$ est le point aléatoire $\omega(t)$ du plan où est la trajectoire ω à l'instant t .

On nomme « mesure de Wiener » la loi ou mesure de probabilité suivant laquelle sont tirées au sort les trajectoires browniennes ω ; la procédure décrite ci-dessus la présente comme une image de la loi de probabilité régissant le lancer d'une suite illimitée de pièces.

La convergence ci-dessus fait que les trajectoires du mouvement brownien plan sont continues. Puisque pour chaque n la marche est markovienne, et même à accroissements indépendants et homogènes, le mouvement brownien plan est markovien, et même à accroissements indépendants et homogènes. Le théorème central-limite assure qu'il est de plus un processus gaussien. La propriété d'autosimilarité de la famille des marches se traduit aussi en une propriété d'autosimilarité du mouvement brownien : la loi de $t \mapsto B_t$ est, pour tout $s > 0$, la même que celle de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{s}}B_{st}$. On démontre que les trajectoires browniennes ne sont dérivables en aucun de leurs points.

Il est assez clair que cette construction n'est pas liée à la dimension deux du plan, et que de fait on obtient de la même façon la mesure de Wiener et donc le mouvement brownien de l'espace euclidien de dimension d quelconque, \mathbb{R}^d . Il est moins clair, mais tout aussi exact dans l'essentiel des cas, qu'on peut de même quadriller une variété riemannienne et la munir ainsi de sa mesure de Wiener, c'est-à-dire de son mouvement brownien naturel. Cela peut aussi être obtenu à partir du mouvement brownien euclidien de même dimension, en le transportant dans l'espace tangent en un point de la variété, et en faisant rouler sans glissement sur la variété cet espace tangent, le long de sa trajectoire brownienne générique.

La fonction exponentielle étant entière dans le plan complexe, on peut observer que l'exponentielle du mouvement brownien plan a encore des trajectoires de mouvement brownien plan, à condition de les parcourir à une certaine vitesse non uniforme, et elle-même aléatoire. Une conséquence est que le mouvement brownien plan $t \mapsto B_t$ ne passe jamais par 0 en un temps > 0 , ni par aucun point de tout ensemble dénombrable fixé à l'avance. (Il passe en revanche de temps à autre arbitrairement près de tout point ; on dit pour cela qu'il est « récurrent ».) On peut donc définir ses coordonnées polaires $(r_t, \theta_t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $t \mapsto \theta_t$ étant une détermination continue de son angle polaire, qui représente

l'enroulement accompli par le mouvement brownien plan $t \mapsto B_t$ autour de l'origine 0.

F. Spitzer a obtenu en 1958 le théorème suivant, qui est le point de départ de toutes les études effectuées depuis et jusqu'à aujourd'hui sur les enroulements des processus.

Théorème 1. — *Lorsque t tend vers l'infini, la loi de la variable aléatoire $\frac{\theta_t}{\log t}$ converge vers une loi de Cauchy (de paramètre $\frac{1}{2}$).*

La loi de Cauchy de paramètre p a pour densité sur \mathbb{R} la fonction

$$x \mapsto \frac{p/\pi}{p^2 + x^2}.$$

Les premières preuves de ce théorème étaient longues et difficiles. Les progrès du calcul stochastique ont permis d'en donner une preuve simple et courte en 1982, preuve qui à son tour a permis de progresser rapidement dans les questions découlant naturellement du théorème de Spitzer, qui était resté assez longtemps un résultat isolé.

Écrivons rapidement une telle preuve. L'écriture du Laplacien en coordonnées polaires et la formule d'Itô, formule de base du calcul stochastique, montrent qu'on peut trouver deux mouvements browniens réels indépendants β et W , c'est-à-dire un mouvement brownien plan (β, W) , de sorte que pour tout $t \geq 0$ on ait :

$$r_t = r_0 e^{\beta(\sigma_t)} \text{ et } \theta_t = \theta_0 + W(\sigma_t), \text{ où } \sigma_t := \inf\{s > 0 \mid \int_0^s e^{2\beta_u} du > t\}.$$

Utilisant l'autosimilarité pour changer (β_s, W_s)

en $(\log t) \times (\beta(s/\log^2 t), W(s/\log^2 t))$, (à t fixé), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log t} (\theta_t - \theta_0) &\equiv W\left(\inf\left\{(\log^{-2} t)s > 0 \mid \int_0^s e^{2(\log t)\beta(u/\log^2 t)} du > t\right\}\right) \\ &= W\left(\inf\left\{s > 0 \mid \frac{1}{\log t} \times \log\left[\int_0^s e^{2(\log t)\beta_v} dv\right] > 1 - \frac{2 \log \log t}{\log t}\right\}\right) \\ &\longrightarrow W\left(\inf\{s > 0 \mid 2 \max_{[0,s]} \beta > 1\}\right) = W\left(\inf\{s > 0 \mid \beta_s > \frac{1}{2}\}\right), \end{aligned}$$

qui a la loi de Cauchy annoncée.

3. Première extension du théorème de Spitzer

La première des questions découlant naturellement du théorème de Spitzer est : qu'en est-il de la loi conjointe des enroulements du brownien plan autour de plusieurs points ?

Fixons donc n points distincts A_1, \dots, A_n du plan, et notons θ_t^j la détermination continue de l'angle polaire relatif à A_j du brownien B_t , c'est-à-dire son enroulement autour de A_j . Le théorème de Spitzer assure que chaque variable $\frac{\theta_t^j}{\log t}$ converge vers une loi de Cauchy, mais ne dit pas quelle est la loi limite du

vecteur aléatoire $\frac{1}{\log t}(\theta_t^1, \dots, \theta_t^n)$, ni même si une telle loi limite existe. Cette question, sensiblement plus délicate que celle traitée par Spitzer, a été résolue par J. Pitman et M. Yor en 1986.

Pour comprendre un peu ce qui se passe, introduisons les notions de petits et grands tours.

L'enroulement θ_t^j est en fait donné par intégration de la forme différentielle élémentaire $d\theta^j$ le long de la trajectoire brownienne entre les instants 0 et t :

$$\theta_t^j = \int_0^t d\theta_s^j = \int_{B[0,t]} d\theta^j.$$

Ceci est clair pour toute courbe de classe C^1 , et reste vrai pour la « courbe » brownienne, dans le cadre du calcul stochastique. Les petits tours autour du point A_j sont obtenus en ne considérant la courbe brownienne que lorsqu'elle passe suffisamment près de A_j :

pour un paramètre $r > 0$ fixé, ils sont donnés par : $\int_0^t 1_{\{r_s^j < r\}} d\theta_s^j$,

où r_s^j désigne la distance entre A^j et B_s .

De même, pour $R > r$ fixé, les grands tours sont donnés par $\int_0^t 1_{\{r_s^j > R\}} d\theta_s^j$.

Ce sont des petits tours autour du point à l'infini du plan complexe, mais dans une échelle de temps tenant compte de la géométrie du plan ; on peut le réaliser en appliquant une inversion.

On prouve que la contribution restante, constituée par les « tours moyens »

$$\int_0^t 1_{\{r \leq r_s^j \leq R\}} d\theta_s^j, \text{ n'importe asymptotiquement pas : } \frac{1}{\log t} \int_0^t 1_{\{r \leq r_s^j \leq R\}} d\theta_s^j$$

converge vers 0 en probabilité lorsque $t \rightarrow \infty$, pour tous r et R fixés.

Observons dès maintenant que c'est là un fait général dans ces questions d'enroulement (autour de points, de courbes ou de pointes) : les contributions qui importent asymptotiquement sont celles dues aux moments où la trajectoire passe près de la singularité autour de laquelle elle tourne. C'est facile à concevoir en songeant au comportement de l'aiguille d'une boussole, qui ne fait beaucoup de tours que lorsqu'elle passe près du pôle nord. Lorsque le temps est très grand, du fait de la normalisation par un facteur (pour l'instant $\log t$) tendant vers l'infini, on ne voit l'enroulement évoluer que par à-coups, et, à la limite, par sauts correspondant aux affolements de la boussole lorsqu'elle frôle le pôle nord.

Fixons ensuite r et R de façon que les n disques $D(A^j, r)$ soient disjoints deux à deux et inclus dans $D(0, R)$. Du fait de ces disjonctions, des symétries radiales et de la propriété de Markov, les n petits tours dans les $D(A^j, r)$ et les grands tours hors de $D(0, R)$ sont indépendants, à condition toutefois de supposer connu le temps passé entre les instants 0 et t dans la zone intermédiaire, ce temps étant mesuré dans une échelle rendant plus symétriques les rôles des A^j et de l'infini. Ce temps passé, normalisé encore par $\log t$, converge en loi vers une variable limite L à densité exponentielle. On peut par ailleurs, supposant connue cette variable limite L , évaluer séparément les lois limites indépendantes des petits et grands tours dans le théorème de Spitzer : la loi limite des petits tours est de Cauchy de paramètre L , mais la loi limite des grands tours n'est pas de Cauchy. La contribution des grands tours est bien sûr commune aux n

points A^j . Ces considérations constituent les grandes lignes de la preuve du résultat suivant, dû à J. Pitman et M. Yor.

Théorème 2. — *Lorsque t tend vers l'infini, la loi de la variable aléatoire $\frac{2}{\log t}(\theta_t^1, \dots, \theta_t^n)$ converge vers la loi de $(W+LC_1, \dots, W+LC_n)$, où C_1, \dots, C_n sont des variables de Cauchy de paramètre 1 indépendantes, et L et W sont indépendantes des C^j , de loi déterminée par*

$$\mathbb{E}\left(e^{iuW-a^2L}\right) = \left(chu + a^2 \frac{shu}{u}\right)^{-1}.$$

Le symbole \mathbb{E} ci-dessus désigne l'espérance, à savoir l'intégrale, ou la moyenne, suivant toutes les trajectoires possibles.

J. Pitman et M. Yor remarquèrent aussi que leur résultat peut s'exprimer sous la forme d'un théorème des résidus stochastique donnant la loi limite d'une seule intégrale stochastique

$$\frac{1}{\log t} \int_0^t f(B_s) dB_s,$$

où f est une fonction méromorphe sur la sphère de Riemann.

Signalons qu'une telle intégrale stochastique peut être définie par limite de sommes de Riemann-Stieltjes, comme les intégrales de Riemann-Stieltjes (dont en particulier les intégrales de Riemann) classiques. Le calcul stochastique d'Itô prescrit comment peuvent se manipuler ces intégrales. La règle essentielle est donnée par la formule d'Itô, qui se substitue à la formule élémentaire du calcul usuel $g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t) dt$.

Elle énonce essentiellement que

$$F(B_b) - F(B_a) = \int_a^b F'(B_t) \cdot dB_t + \frac{1}{2} \int_a^b \Delta F(B_t) dt.$$

Notons en passant qu'elle fait apparaître le lien entre le mouvement brownien B et le laplacien Δ . Signalons encore en passant l'identité isométrique fondamentale

$$\mathbb{E}\left(\left[\int_a^b F(B_t) \cdot dB_t\right]^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_a^b |F(B_t)|^2 dt\right),$$

qui, elle, indique pourquoi le mouvement brownien offre pour les physiciens théoriciens le grand intérêt de fournir une racine carrée de dt : on a ci-dessus de façon très résumée : $(dB_t)^2 \equiv dt$.

4. Extensions géométriques du théorème de Spitzer

Le théorème de Pitman-Yor répond pour l'essentiel aux questions naturelles d'enroulement asymptotique dans le plan euclidien. Comment poursuivre et amplifier ce travail ?

4.1 Un résultat général en dimension deux

Observons d'abord que la relative complexité de l'énoncé de ce théorème vient surtout du point à l'infini du plan, le point qui lui manque pour constituer la sphère de Riemann. Et, de fait, si on transporte la question et le mouvement brownien du plan sur la sphère usuelle par projection stéréographique, on obtient la même question relativement au mouvement brownien sphérique, mais toutefois avec la différence notable que les trajectoires en sont parcourues dans une échelle de temps modifiée. On s'attend par ailleurs bien sûr à ce que dans le cas de la sphère et de son mouvement brownien tous les points autour desquels on tourne jouent le même rôle, y compris le pôle image du point à l'infini du plan. Notons qu'autour d'un point sur la sphère seuls les petits tours conservent du sens. Nous avons ainsi le résultat suivant relatif à la sphère usuelle, dans lequel les θ_t^j figurent les petits tours autour de n points distincts :

Théorème 3. — *Sur la sphère \mathbb{S}^2 , lorsque t tend vers l'infini, la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{t}(\theta_t^1, \dots, \theta_t^n)$ converge vers la loi de (C_1, \dots, C_n) , où C_1, \dots, C_n sont des variables de Cauchy indépendantes (de paramètre $\frac{1}{4}$).*

Faisons trois remarques sur ce résultat :

- son énoncé est plus simple que celui du théorème relatif au plan ;
- la normalisation n'est plus $\frac{1}{\log t}$, mais $\frac{1}{t}$;
- il est plus simple de l'établir directement sur la sphère (en suivant la démarche esquissée ci-dessus pour le résultat plan, avec des difficultés en moins) que de passer par le plan et la projection stéréographique.

Ces trois remarques sont en fait liées. La différence essentielle entre le plan et la sphère est que l'un est non compact et de surface infinie, et que l'autre est compact (et donc de surface finie). Dans le premier cas, bien que récurrent, le mouvement brownien ne peut passer entre les instants 0 et t un temps asymptotiquement proportionnel à t dans chaque disque : il y a en effet une infinité de disques disjoints de taille fixée. Tandis que dans le second cas, et dans le cas de toute variété compacte, le mouvement brownien passe effectivement entre les instants 0 et t dans chaque ouvert un temps asymptotiquement proportionnel à t et à la surface (ou au volume) de cet ouvert. C'est le phénomène d'« ergodicité ».

Comme les petits tours sont liés au temps passé dans un petit disque (ou une petite calotte), cela explique la différence de normalisation du cas ergodique avec le cas plan ; cela fait sentir aussi que la preuve directe doit être en effet plus aisée.

Généralisons maintenant le résultat sphérique dans deux directions à la fois, toutes deux géométriquement très naturelles.

Il est d'abord très légitime de remplacer la sphère, exemple très particulier, par une surface compacte quelconque. Il est ensuite plus agréable et plus général d'exprimer le résultat sous forme de la loi limite d'une intégrale stochastique par rapport à une forme différentielle fermée de degré 1 arbitraire sur la variété

privée d'un nombre fini de singularités ; c'est en effet la notion généralisant à la fois la 1-forme élémentaire $d\theta^j$, les combinaisons linéaires de telles formes, et les fonctions méromorphes dans le plan complexe ; et la théorie de telles intégrales stochastiques est au point depuis 1978.

On obtient alors le résultat suivant.

Théorème 4. — *Soit M une surface riemannienne connexe compacte d'aire S , et soit sur M privée de n points T_1, \dots, T_n une 1-forme ω de classe C^2 , qu'on suppose fermée au voisinage des points T_j . Notons c_j le résidu de ω en T_j , et B_t le mouvement brownien de M , issu de $B_0 \neq T_1, \dots, T_n$.*

Alors la loi de $\frac{1}{t} \int_{B[0,t]} \omega$ converge vers la loi de Cauchy de paramètre $\frac{\pi}{S} \sum_{j=1}^n |c_j|$.

Une telle convergence est valable conjointement pour toute famille finie de formes ω .

Pour démontrer ce théorème, on commence par montrer la convergence vers 0 lorsque la forme ω est soit sans singularité soit exacte, puis on se ramène via des intégrations par parties à l'étude conjointe des petits tours autour des points T_j . Ne disposant pas de coordonnées globales, on est conduit à considérer la contribution de chaque incursion auprès d'une singularité. La clef est alors d'utiliser des coordonnées conformes et d'observer que la variation totale de l'angle au cours d'une incursion délimitée par le rayon ne dépend pas de l'horloge (la vitesse de parcours) de la trajectoire, et donc qu'elle est la même que dans le cas d'une incursion brownienne plane dans un disque.

On voit ainsi que la contribution d'une incursion a une loi de Cauchy, indépendante des extrémités de cette incursion ; ce qui permet de plus de montrer que les différentes incursions contribuent indépendamment les unes des autres.

On estime ensuite le nombre des incursions effectuées jusqu'au temps t , ce qui se fait au moyen du théorème ergodique et par rétrécissement des disques géodésiques entourant les singularités (pour annihiler les fluctuations de la métrique de M).

Signalons qu'existe naturellement sur une variété une autre sorte d'enroulements, ceux dus à l'homologie de la variété (non privée d'un nombre fini de points). Dans le cas des surfaces compactes, ce sont les tours qu'on peut faire autour des anses. L'exemple le plus simple est celui d'une bouée (tore de dimension deux), pour laquelle on voit bien qu'il y a deux directions indépendantes d'enroulement ; on dit que son groupe d'homologie est \mathbb{Z}^2 . En général, le groupe d'homologie est le groupe d'homotopie abélianisé (en le quotientant par son sous-groupe dérivé). La notion duale est la cohomologie, qui est isomorphe à l'espace vectoriel des formes différentielles harmoniques sur la variété : on voit de nouveau que les enroulements sont obtenus par intégration de formes différentielles harmoniques (nécessairement de degré un lorsqu'on intègre le long de courbes).

Comme signalé ci-dessus pour établir le théorème précédent, la contribution asymptotique due à une telle forme, sans singularité, est nulle. Cela tient à ce

que les enroulements browniens homologiques évoluent à une vitesse moindre que les enroulements browniens singuliers qui nous occupent essentiellement dans cet article. En effet, le phénomène déjà signalé d'affolement de la boussole frôlant le pôle nord n'a pas lieu dans ce cas, et on conçoit donc que cela ralentisse notablement la vitesse d'évolution. De fait, dans le cas des enroulements browniens homologiques dans une variété compacte la bonne normalisation est la racine carrée du temps, et on obtient une loi limite gaussienne, ce qui n'est pas une surprise si on songe au théorème central limite. Cette analogie est justifiée par le fait que dans le cas d'une forme régulière ω^r n'interviennent que des variables aléatoires intégrables. Un tel résultat se démontre essentiellement en appliquant le théorème ergodique et un théorème central limite relatif à la martingale de carré intégrable définie par l'intégrale stochastique $\int_{B[0,t]} \omega^r$.

De plus la contribution asymptotique d'une forme harmonique régulière est bien répartie dans la variété, par ergodicité, et on peut donc négliger la contribution due à un petit voisinage d'un point donné; tandis que, comme nous l'avons vu plus haut, seul un tel petit voisinage d'un point contribue asymptotiquement aux enroulements autour de ce point. La propriété de Markov permet par suite d'établir que les deux sortes d'enroulement s'effectuent de manière asymptotiquement indépendante. Donc les résultats d'enroulements browniens singuliers présentés dans cet article ont toujours lieu conjointement avec les résultats (considérablement plus faciles) d'enroulements browniens réguliers. Dans le cas d'une variété compacte, nous aurons de la sorte systématiquement convergence conjointe en loi d'un nombre fini quelconque d'enroulements singuliers $\frac{1}{t} \int_{B[0,t]} \omega_j$ et d'enroulements réguliers $\frac{1}{\sqrt{t}} \int_{B[0,t]} \omega_k^r$, respectivement vers des variables de Cauchy et vers des variables gaussiennes, toutes ces variables étant indépendantes.

4.2 En dimension supérieure

Le résultat précédent pose clairement la question de son analogue en dimension $d \geq 3$.

Dans \mathbb{R}^3 , les enroulements ne peuvent avoir de sens qu'entre courbes sans point commun, et sont donnés entre deux lacets de classe C^1 qui ne s'intersectent pas par l'indice d'entrelacement de Gauss; celui-ci peut s'exprimer par une intégrale double faisant intervenir les vecteurs tangents des deux lacets et leur produit vectoriel, intégrale dans laquelle un des deux lacets peut être remplacé par un chemin, en renonçant seulement à obtenir une valeur entière. Par ailleurs, puisque le brownien plan ne rencontre pas l'origine et puisque la projection sur tout plan du brownien de \mathbb{R}^3 est un brownien plan, le brownien de \mathbb{R}^3 ne rencontre aucune droite fixée à l'avance. Par déformation, cela entraîne qu'il ne rencontre aucune courbe régulière fixée à l'avance, et que ceci reste vrai pour toute variété de dimension 3.

Nous avons donc une bonne notion d'enroulements pour le brownien d'une variété riemannienne de dimension trois autour d'un lacet lisse de cette variété. Mais le calcul de ces enroulements n'est pas évident. Revenons à \mathbb{R}^3 , et souvenons-nous des leçons classiques d'électrostatique et de magnétostatique, et pour commencer remémorons-nous le théorème d'Ampère, qui servait à dénombrer le nombre de spires d'un solénoïde: l'enroulement d'une courbe autour d'une autre, c'est à dire l'entrelacement de Gauss, est égal à la circulation le

long d'une des deux courbes du champ magnétique produit par un courant uniforme dans l'autre. Or il se trouve que sur notre variété compacte existe une généralisation naturelle, sinon du champ magnétique, du moins de la 1-forme de circulation du champ magnétique engendré par un lacet lisse; c'est une 1-forme harmonique connue depuis 1960 par le livre de G. de Rham sur les variétés différentiables.

De plus tout ceci reste valable aussi en dimension $d \geq 3$, à condition de remplacer le lacet \mathcal{L} par une sous-variété orientée compacte de dimension $(d - 2)$, disons encore \mathcal{L} .

Nous avons alors l'enroulement du brownien B de M qui est donné à l'instant t par l'intégrale stochastique $\int_{B[0,t]} H_{\mathcal{L}}$, où $H_{\mathcal{L}}$ est la 1-forme harmonique de circulation magnétique et donc d'enroulement autour de \mathcal{L} mentionnée ci-dessus. Le problème est ainsi bien posé.

Mais une difficulté importante se présente par rapport à la dimension deux, pour laquelle nous avons fait un usage crucial des coordonnées conformes : de telles coordonnées n'existent plus en dimension plus grande. La solution est de nouveau inspirée par nos anciens cours d'électrostatique, et les liens bien connus entre le mouvement brownien, la théorie du potentiel (newtonien ou non), et l'électrostatique.

Le noyau de la chaleur $p_t(x, y)$ de la variété compacte M donne la probabilité infinitésimale pour le brownien B de passer de x à y en un temps t ; l'intégrale $\int_0^\infty (p_t(x, y) - 1) dt$ fournit la fonction de Green $g(x, y)$ de M ; l'intégrale $\int_{\mathcal{L}} g(x, y) dy$ fournit le potentiel électrostatique $V(x)$ de \mathcal{L} au point x ; $E := -dV$ est la 1-forme de circulation du champ électrique engendré par \mathcal{L} .

On utilise V pour définir un petit condensateur tubulaire à armatures équipotentielles autour de \mathcal{L} , dans lequel la distance à \mathcal{L} , disons r , est bien définie, puis on vérifie que, près de \mathcal{L} , $V + \frac{1}{2\pi} \log r$ est borné et $E \sim \frac{dr}{2\pi r}$. On calcule aussi une approximation de $H_{\mathcal{L}}$ dans ce condensateur, montrant qu'on peut y remplacer $H_{\mathcal{L}}$ par une 1-forme orthogonale à E . Ceci permet de calculer des lois de contribution d'incursion de B dans le condensateur. Enfin il faut estimer par ergodicité la fréquence de ces incursions, d'où le paramètre de la loi de Cauchy limite en fonction de la capacité du condensateur, qu'on peut finalement elle aussi calculer.

Il est en outre possible de modifier tout ceci pour l'adapter au cas d'une variété M plus nécessairement compacte, B devenant alors une diffusion (c'est-à-dire essentiellement un processus de Markov continu) plus générale que le mouvement brownien, à condition toutefois d'exiger qu'elle reste ergodique.

Résumons ce qui précède, sous la forme précise d'un énoncé très général d'enroulements browniens asymptotiques conjoints.

Soit M une variété riemannienne connexe orientée complète de classe C^3 et de dimension $d \geq 3$.

Soit \mathcal{L} une sous-variété compacte de M , de classe C^2 et de dimension $d - 2$.

Soit F une fonction de classe C^3 sur M telle que la mesure μ ayant la densité e^{-2F} par rapport à la mesure de volume de M soit une probabilité.

Soit X la diffusion sur M de générateur $\frac{1}{2}\Delta - (\nabla F) \cdot \nabla$ (c'est un opérateur différentiel d'ordre deux uniformément elliptique, obtenu en perturbant le

laplacien de Beltrami de M par un terme d'ordre un). X est non dégénérée, ergodique, symétrique, et admet la mesure invariante μ (ce qui signifie que si sa loi à l'instant 0 est μ , alors elle est aussi μ à tout instant). Si M est de volume fini, on peut prendre F constante, et alors X est le mouvement brownien de M .

Notons λ la mesure de volume de \mathcal{L} induite par celle de M . Pour les composantes connexes $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_j, \dots, \mathcal{L}_k$ de \mathcal{L} , posons $\alpha_j := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}_j} e^{-2F} d\lambda_j$.

Lorsque F est constante (et donc X brownien), on a simplement : α_j égal au volume de \mathcal{L}_j divisé par deux fois le volume de M .

Il faut bien sûr supposer que la loi de départ, celle de X_0 , ne charge pas \mathcal{L} : ainsi X ne peut démarrer d'un point situé sur \mathcal{L} , et ses enroulements autour de \mathcal{L} sont bien définis.

Le résultat dans ce cadre général est le suivant.

Théorème 5. — *Soit ω une 1-forme différentielle dans $M \setminus \mathcal{L}$, fermée près de \mathcal{L} et telle que $\omega(\nabla F)$ et la divergence $\delta\omega$ soient μ -intégrables. Notons ρ_j le résidu de ω autour de \mathcal{L}_j .*

Alors, la loi de $\frac{1}{t} \int_{X[0,t]} \omega$ converge lorsque $t \rightarrow \infty$ vers la loi de Cauchy de paramètre $\sum_{j=1}^k |\rho_j| \alpha_j$.

Comme précédemment, cet énoncé est valable conjointement pour tout nombre fini de formes ω . Il est aussi, comme l'étaient déjà tous les énoncés précédents, valable conjointement pour tout nombre fini de temps fixés a priori :

on a pour tous $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_p$ convergence conjointe lorsque $t \rightarrow \infty$

des $\frac{1}{t} \int_{X[0, s_\ell t]} \omega$ vers $\sum_{j=1}^k \rho_j \alpha_j \sum_{i=1}^{\ell} (s_i - s_{i-1}) C_{i,j}$,

pour $1 \leq \ell \leq p$, où les $C_{i,j}$ sont kp variables de Cauchy indépendantes de paramètre 1.

Enfin cet énoncé est encore valable si on remplace la diffusion X par son « pont » basé en $x \in M$, c'est-à-dire si on la contraint à partir d'un point fixé x et à y revenir au temps t . Notons qu'en dimension trois, on récupère ainsi un résultat asymptotique portant sur de vrais coefficients (entiers) d'entrelacement de Gauss entre le lacet aléatoire constitué par la trajectoire générique du pont de diffusion et les lacets déterministes lisses autour desquels elle tourne.

Si on particularise au cas de la sphère S^3 (qui topologiquement est \mathbb{R}^3 compactifié par un point à l'infini), le théorème ci-dessus décrit les enroulements asymptotiques du mouvement brownien (ou d'une autre diffusion ergodique) autour d'un nombre fini de nœuds disjoints (sans tenir compte de l'ordre dans lequel il entoure ces différents nœuds). Les paramètres α_j rencontrés ci-dessus dans la loi limite sont ici proportionnels aux longueurs des nœuds.

S'il n'y a qu'un nœud et qu'en gros il n'est pas traçable sur un tore, le théorème d'uniformisation de Thurston énonce qu'il existe une variété hyperbolique de

volume fini homéomorphe au complémentaire de ce nœud dans \mathbb{S}^3 ; et cette variété hyperbolique est unique d'après le théorème de rigidité de Mostow. Dans un tel homéomorphisme, le nœud a été contracté en l'unique point à l'infini de la variété hyperbolique, appelé pointe; et tout petit voisinage tubulaire (torique) du nœud est envoyé sur un voisinage de la pointe homéomorphe au produit d'un tore \mathbb{T}^2 par une demi-droite \mathbb{R}_+ . Imaginons maintenant notre mouvement brownien (ou tout autre processus) allant assez loin vers la pointe : il va s'enrouler très rapidement dans les deux directions possibles du tore, et donc produire des enroulements singuliers, en quelque sorte autour du nœud situé à l'infini.

En admettant qu'on puisse uniformiser de même le complémentaire de n nœuds disjoints dans \mathbb{S}^3 , on obtient de façon canonique une variété hyperbolique de volume fini possédant n pointes, dans chacune desquelles un processus est susceptible d'aller s'enrouler comme autour d'un nœud situé à l'infini.

Cette considération est une première motivation pour s'intéresser aux variétés hyperboliques. Une autre, plus essentielle, est que le flot géodésique s'y comporte de façon suffisamment ergodique pour permettre en particulier le calcul asymptotique de ses enroulements. La difficulté de ce genre de calcul est bien plus grande pour le flot géodésique que pour une diffusion, du fait de la nature déterministe du flot, en opposition avec la propriété de Markov des diffusions (qui signifie qu'elles n'ont aucune inertie et qui fournissent continuellement de l'indépendance).

5. Flot géodésique des variétés hyperboliques

Une variété hyperbolique est une variété riemannienne de courbure sectionnelle constante égale à -1 . C'est nécessairement un quotient de l'espace hyperbolique réel \mathbb{H}^{d+1} par un sous groupe discret d'isométries (dites de Möbius). Dans le modèle du demi-espace de Poincaré : $\mathbb{H}^{d+1} \cong \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^*$, la métrique est donnée en tout point d'altitude $y \in \mathbb{R}_+^*$ par la métrique euclidienne divisée par le facteur $y^2 : (|dx|^2 + dy^2)/y^2$. Les géodésiques sont les demi-droites verticales et les demi-cercles centrés sur $\mathbb{R}^d \equiv \mathbb{R}^d \times \{0\}$. Les isométries de Möbius constituent un sous-groupe du groupe engendré par les similitudes euclidiennes conservant le demi-espace et les inversions de pôle sur \mathbb{R}^d , à savoir le sous-groupe des isométries conservant l'orientation. Elles agissent aussi sur le bord $\mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ (qui est situé à distance infinie de tout point de l'espace), et sont déterminées par leur action sur le bord. Dans le cas $d = 1$ du plan hyperbolique, ce sont les homographies, qu'on peut voir comme les éléments du groupe $PSL_2(\mathbb{R})$.

5.1 Enroulements browniens en volume fini

Tout voisinage pas trop grand \mathcal{P}_h (sectionné à altitude h) d'une pointe donnée \mathcal{P} d'une variété hyperbolique M étant homéomorphe à $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{d-k} \times \mathbb{R}_+$, pour un entier $k \in \{1, \dots, d\}$ nommé rang de \mathcal{P} , nous y disposons de coordonnées x_1, \dots, x_d, y dans lesquelles la métrique prend la forme ci-dessus, et donc dans lesquelles la mesure de volume μ est proportionnelle à $y^{-d-1} dx_1 \dots dx_d dy$. On voit que si le volume de M est fini alors nécessairement la pointe \mathcal{P} doit être de rang maximal d , autrement dit la section de \mathcal{P}_h orthogonalement à

l'axe vertical Oy doit être compacte (et donc un tore \mathbb{T}^d). On voit aussi que les formes élémentaires d'enroulement dx_j , qui ont une norme en chaque point (x, y) proportionnelle à y , sont telles que $\int_{\mathcal{P}_h} |dx_j|^2 d\mu$ et $\int_1^\infty y^{1-d} dy$ sont finies en même temps. Par conséquent en volume fini et pour $d > 2$ il n'y a pas d'enroulement homologique singulier du brownien de M , puisque toutes les formes harmoniques sont alors de carré intégrable, et donc le seul résultat d'enroulement brownien homologique sur une variété hyperbolique de dimension > 3 et de volume fini est un théorème central limite, déjà mentionné. En revanche, en dimension trois ($d = 2$) les formes d'enroulement près des pointes sont intégrables mais non de carré intégrable, et en dimension deux ($d = 1$) elles sont non-intégrables. Cela va se traduire par des vitesses d'enroulement différentes dans ces deux cas.

La méthode pour calculer les enroulements browniens près des pointes est proche de celle utilisée auparavant pour calculer l'enroulement près d'un point non situé à l'infini : on considère les excursions dans le voisinage \mathcal{P}_h (pour h assez grand) et on utilise les coordonnées mentionnées ci-dessus pour décomposer le mouvement brownien au cours de chacune de ces excursions, comme on le décomposait suivant des coordonnées polaires dans le plan. Et on dispose encore de l'ergodicité pour dénombrer les excursions.

On obtient ainsi le résultat suivant (conjoint par rapport aux différentes pointes \mathcal{P}^j).

Théorème 6. — *Soit M une variété hyperbolique connexe complète de volume fini V et de dimension deux ou trois. Notons B le mouvement brownien de M . Soit ω une 1-forme différentielle de classe C^2 sur M , fermée près des n pointes de M . Alors lorsque $t \rightarrow \infty$:*

1) *En dimension 2, la loi de $\frac{1}{t} \int_{B[0,t]} \omega$ converge vers la loi de Cauchy de paramètre $\sum_{j=1}^n |\rho_j|/V$,*

où ρ_j désigne le résidu de ω près de la pointe \mathcal{P}^j .

2) *En dimension 3, la loi de $\frac{1}{\sqrt{t \log t}} \int_{B[0,t]} \omega$ converge vers la loi gaussienne centrée de variance $\sum_{j=1}^n Q_j(\rho_j, \rho'_j)/V$,*

où Q_j est une forme quadratique explicite caractérisant la géométrie de la pointe \mathcal{P}^j (c'est-à-dire de sa section torique), et où ρ_j et ρ'_j sont les résidus de ω près de la pointe \mathcal{P}^j .

5.2 Enroulements géodésiques en volume fini

Le choix des variétés hyperboliques va être désormais essentiel, puisqu'il va permettre de transférer les résultats d'enroulements homologiques donnés ci-dessus du mouvement brownien au flot géodésique. Pour préciser cela, il nous manque encore la façon de choisir les géodésiques, c'est-à-dire l'élément de contact qui les définit et qui indique leur position dans le fibré unitaire tangent à l'instant 0. En volume fini, il y a pour cela un choix canonique, qui est la mesure de Liouville sur le fibré unitaire tangent : projetée sur la variété de base, c'est simplement sa mesure de volume, et au-dessus de chaque point de la variété de base, c'est la mesure uniforme sur l'hypersphère de toutes les directions tangentes possibles. On démontre de fait le résultat suivant.

Théorème 7. — *Soit M une variété hyperbolique de volume fini. Soit ω une 1-forme différentielle de classe C^2 sur M . Notons $(\theta_t, t \in \mathbb{R}_+)$ le flot géodésique (sur le fibré unitaire tangent T^1M).*

Alors le comportement asymptotique lorsque $t \rightarrow \infty$ de la loi de $\int_{\theta_{[0,t]}} \omega$ sous la mesure de Liouville de T^1M (normalisée pour en faire une probabilité) est exactement le même que celui de $\int_{B_{[0,t]}} \omega$ sous la loi du brownien de M :

1) *Si ω est de carré intégrable sur M (ce qui est toujours le cas si la dimension de M est > 3) alors la loi de $\frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\theta_{[0,t]}} \omega$ converge vers une loi gaussienne centrée.*

2) *Si la dimension de M est 3 et si ω est fermée près des pointes et n'est pas de carré intégrable sur M , alors la loi de $\frac{1}{\sqrt{t \log t}} \int_{\theta_{[0,t]}} \omega$ converge vers une loi gaussienne centrée.*

3) *Si la dimension de M est 2 et si ω est fermée près des pointes et n'est pas de carré intégrable sur M , alors la loi de $\frac{1}{t} \int_{\theta_{[0,t]}} \omega$ converge vers une loi de Cauchy.*

Dans chaque cas, le paramètre non précisé ci-dessus de la loi limite est le même que pour l'intégrale brownienne correspondante.

La méthode pour prouver que le comportement géodésique est asymptotiquement le même que le comportement brownien a été inventée par Y. Le Jan, pour le cas (1) ci-dessus. Pour comprendre d'où peut provenir l'exactitude de la comparaison asymptotique entre les trajectoires géodésiques et les trajectoires browniennes, quoiqu'elles soient localement totalement dissemblables, il faut remonter dans le revêtement universel de la variété hyperbolique M , c'est-à-dire dans l'espace hyperbolique de même dimension, que nous identifions avec le modèle du demi-espace de Poincaré : $\mathbb{H}^{d+1} \equiv \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^*$.

On peut faire là quelques constatations. D'abord, le mouvement brownien hyperbolique a dans le demi-espace les mêmes trajectoires que le mouvement brownien euclidien, sauf qu'elles ne sont pas parcourues de la même façon ; elles mettent en particulier un temps infini pour atteindre le bord (qui est situé à une distance hyperbolique infinie), mais elles y parviennent toujours à terme, puisque le mouvement brownien réel ne saurait rester toujours dans \mathbb{R}_+ ; il en est de même pour le flot géodésique. Ensuite (sur M comme sur \mathbb{H}^{d+1}) la mesure de Liouville est invariante pour le flot géodésique comme la mesure de volume l'est pour le mouvement brownien, ce qui signifie que, partant à l'instant 0 sous la mesure de Liouville (projetée sur la base dans le cas brownien), on y est toujours à chaque instant t . De plus, partant d'un point donné de \mathbb{H}^{d+1} , la mesure harmonique d'arrivée sur toute hypersphère hyperbolique centrée en ce point est la mesure uniforme pour les deux processus (la loi du flot géodésique étant donnée par la mesure de Liouville). Donc si on fait tendre le rayon de cette hyper-sphère vers l'infini, on obtient la même loi de sortie à l'infini pour les deux processus conditionnés à partir d'un même point.

Ces remarques poussent à associer dans \mathbb{H}^{d+1} à toute trajectoire géodésique une trajectoire brownienne issue du même point et conditionnée à sortir in fine au même point du bord.

Mais cela ne suffit pas. Les distances hyperboliques devenant facilement infinies près du bord, il faut contrôler la proximité entre ces trajectoires. Cela se fait au moyen d'un changement de contour d'intégration ; toutefois l'intégrande pour un tel changement de contour ne peut pas être directement ω , puisqu'il faut avoir une forme relevée dans \mathbb{H}^{d+1} d'une part, et d'autre part fermée (puisque l'on s'agit d'appliquer le théorème de Stokes). Il faut donc construire une forme fermée prolongeant le relèvement de ω dans \mathbb{H}^{d+1} , lui appliquer le changement de contour d'intégration, établir que la partie indésirable de ce contour est de contribution asymptotiquement négligeable, et redescendre sur M .

Ce programme ne va pas sans quelques notables difficultés. En particulier il nécessite de travailler avec le mouvement brownien de la variété « feuilletée », qui est dans T^1M le bon relèvement du brownien de M ; les « feuilles » sont les parties de T^1M qui correspondent à un même point à l'infini dans le relèvement dans \mathbb{H}^{d+1} . Elles sont obtenues par l'action conjointe du flot géodésique d'une part, et d'autre part d'un deuxième flot, dit « horocyclique », dont les trajectoires sont orthogonales à celles du flot géodésique. Et le flot horocyclique empêche qu'on se contente du fibré tangent, car il n'est défini que sur le fibré des repères orthonormés.

Enfin il reste une étape importante, indispensable dans les cas (1) et (2) du théorème : il faut établir l'existence d'un trou spectral relatif au laplacien de la variété feuilletée, en se fondant sur l'existence (déjà connue) de ce trou relativement au laplacien de M . La difficulté est là due au fait que le laplacien de la variété feuilletée n'est plus elliptique, ce qui revient à dire que le brownien de ce feuilletage ne diffuse plus dans toutes les directions en chaque point (on dit qu'il est dégénéré) ; en effet, il ne se déplace que dans la direction des feuilles, et pas dans les directions transverses, et ne finira par diffuser quand même partout que du fait du quotient par Γ , *i.e.* du repliement des feuilles sur le fibré des repères relatif à M .

5.3 Enroulements des variétés hyperboliques en volume infini

Lorsque la variété hyperbolique M n'est plus de volume fini, il convient tout d'abord de voir par quoi doit être remplacée la mesure de Liouville, qui est désormais inadaptée (puisque de masse infinie). Géométriquement, la variété M possède maintenant des pointes de tout rang et des vasques, sortes d'entonnoirs allant vers l'infini en s'évasant toujours plus, responsables principales du volume infini, dans lesquelles sous la mesure de Liouville les géodésiques se perdraient irrémédiablement sans produire d'enroulement.

Il faut remonter au groupe fondamental Γ de M , fait d'isométries de Möbius de \mathbb{H}^{d+1} , et considérer son « ensemble limite », qui est l'ensemble des points d'adhérence d'une quelconque de ses orbites. C'est un sous-ensemble du bord de \mathbb{H}^{d+1} , qui a une structure du type Cantor. Sa dimension de Hausdorff, notée δ , qui peut prendre toute valeur réelle entre 0 et d , a un rôle crucial. Patterson a construit dans les années 70 une famille de mesures finies qui porte son nom et qui est canoniquement associée au groupe Γ . Les mesures de Patterson sont portées par l'ensemble limite de Γ , indexées par les points de \mathbb{H}^{d+1} , et de chaque point constituent une sorte de mesure angulaire sur le bord, de nature géométrique. Sullivan les a utilisées pour construire sur $T^1\mathbb{H}^{d+1}$ et par suite sur T^1M la mesure qui se substitue naturellement à la mesure de Liouville. Paramétrant le fibré tangent $T^1\mathbb{H}^{d+1}$ par les extrémités d'une géodésique générique et une abscisse curviligne uniforme sur cette géodésique, il a attribué à chaque extrémité de la géodésique une mesure de Patterson pour loi; la mesure qui convient, dite de Bowen-Margulis ou de Patterson-Sullivan, admet une certaine densité (dépendant de δ) par rapport au produit de ces deux lois et de la mesure de Lebesgue (pour l'abscisse curviligne). Elle est bien de masse finie, au moins sous l'hypothèse additionnelle que M est « géométriquement finie », et se réduit à la mesure de Liouville dans le cas du volume fini.

Le mouvement brownien ne convient plus non plus; il faut le remplacer par une diffusion qui sort à l'infini suivant les mesures de Patterson. Une telle diffusion existe, et peut être construite de plusieurs manières. Lorsque le paramètre géométrique δ est strictement supérieur à $d/2$, on connaît la première valeur propre du laplacien de M , qui vaut $\delta(\delta-d)$, et la fonction propre fondamentale associée Φ : elle vaut en chaque point la masse de la mesure de Patterson correspondante. De même que le mouvement brownien est gouverné par le demi-laplacien $\frac{1}{2}\Delta$, la diffusion sur M qui convient pour le remplacer est gouvernée par l'opérateur elliptique $\frac{1}{2}[\Phi^{-1}\Delta \circ \Phi - \delta(\delta-d)]$ (c'est son « générateur infinitésimal »). C'est une sorte de mouvement brownien « conditionné » à sortir suivant les mesures de Patterson.

En dépit de nombre de difficultés supplémentaires par rapport à tout ce qui précède, la stratégie globale consistant à approcher le comportement des géodésiques par les trajectoires de la diffusion fondamentale évoquée ci-dessus fonctionne, et on peut encore parvenir à calculer les enroulements de cette diffusion fondamentale. Ce qui permet finalement de parvenir en particulier aux deux résultats suivant.

Théorème 8. — Soient M une variété hyperbolique géométriquement finie de dimension $d+1$, δ la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite de son groupe fondamental, m sa mesure de Bowen-Margulis-Patterson-Sullivan normalisée, Φ sa fonction propre fondamentale, et (Z_t) la diffusion fondamentale associée.

1) Supposons $d = 1$ et considérons une 1-forme différentielle ω fermée dans un voisinage des pointes de M et m -intégrable dans le reste de M .

Alors lorsque $t \rightarrow \infty$ les lois de $t^{\frac{-1}{2\delta-1}} \int_{\theta_{[0,t]}} \omega$ sous m et de $t^{\frac{-1}{2\delta-1}} \int_{Z_{[0,t]}} \omega$ convergent vers une loi stable symétrique d'exposant $(2\delta - 1)$ (et de taux explicitement calculable en fonction entre autre des résidus de ω).

2) Supposons $\delta > d/2$, et considérons une fonction f de classe C^2 sur T^1M , avec des dérivées bornées et höldériennes, telle que $\int_{T^1M} f dm = 0$. Alors lorsque $t \rightarrow \infty$ la loi de $\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t f(\theta_s) ds$ sous m converge vers une loi gaussienne centrée (de variance assez explicite).

Le deuxième énoncé ci-dessus est un théorème central limite, tandis que le premier exhibe une nouvelle vitesse d'évolution, plus rapide que toutes celles qui sont intervenues auparavant dans cet article, puisque nécessairement $1 \geq \delta > 1/2$ dès qu'existe au moins une pointe.

Ces deux énoncés concluent le présent exposé, mais pas la recherche dans le domaine présenté ici, qui continue.

Jacques Franchi

I.R.M.A.,

Université Louis Pasteur de Strasbourg

Bibliographie (incomplète)

- [1] M. BABILLOT et M. PEIGNÉ – « Homologie des géodésiques fermées sur des variétés hyperboliques avec bouts cuspidaux. », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4^e série **33** (2000), no. 1, p. 81–120.
- [2] R. DURRETT – « A new proof of Spitzer's result on the winding of 2-dimensional Brownian motion. », *Ann. Probab.* **10** (1982), p. 244–246.
- [3] N. ENRIQUEZ, J. FRANCHI et Y. LE JAN – « Canonical lift and exit law of the fundamental diffusion associated with a Kleinian group », *Sém. de Probab. XXXV*, 2001, p. 206–219.
- [4] ———, « Central limit theorem for the geodesic flow associated with a Kleinian group, case $\delta > d/2$ », *J. Math. Pures Appl.* **80** (2001), no. 2, p. 153–175.
- [5] ———, « Stable windings on hyperbolic surfaces », *Prob. Th. Rel. Fields* **119** (2001), p. 213–255.
- [6] N. ENRIQUEZ et Y. LE JAN – « Statistic of the winding of geodesics on a Riemann surface with finite area and constant negative curvature », *Rev. Mat. Iberoamericana* **13** (1997), no. 2, p. 377–401.
- [7] J. FRANCHI – « Théorème des résidus asymptotiques pour le mouvement brownien sur une surface riemannienne compacte », *Ann. Inst. H. Poincaré* **27** (1991), no. 4, p. 445–462.

- [8] ———, « Asymptotic singular windings of ergodic diffusions », *Stochastic Process. Appl.* **62** (1996), p. 277–298.
- [9] ———, « Asymptotic singular homology of a complete hyperbolic 3-manifold of finite volume », *Proc. London Math. Soc.* **79** (1999), no. 3, p. 451–480.
- [10] N. IKEDA et S. WATANABE – « Integrals of differential forms along the path of diffusion processes », *Publ. RIMS Kyoto Univ.* (1978), no. 15, p. 827–852.
- [11] N. IKEDA et S. WATANABE – *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North-Holland Kodansha, 1981.
- [12] K. ITÔ et H. P. MCKEAN – *Diffusion processes and their sample paths*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1965.
- [13] Y. LE JAN – « The central limit theorem for the geodesic flow on non compact manifolds of constant negative curvature », *Duke Math. J.* **74** (1994), no. 1, p. 159–175.
- [14] S. J. PATTERSON – « Lectures on measures on limit sets of Kleinian groups », *Analytical and geometrical aspects of hyperbolic space*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 111, Cambridge Univ. Press, 1987, p. 281–323.
- [15] J. PITMAN et M. YOR – « Asymptotic laws of planar Brownian motion », *Ann. Probab.* **14** (1986), p. 733–779.
- [16] ———, « Further asymptotic laws of planar Brownian motion », *Ann. Probab.* **17** (1989), p. 965–1011.
- [17] D. REVUZ et M. YOR – *Continuous martingales and Brownian motion*, Springer, Berlin, 1991, 1994 et 1999.
- [18] F. SPITZER – « Some theorems concerning two-dimensional Brownian motion », *Trans. Amer. Math. Soc.* **87** (1958), p. 187–197.
- [19] D. SULLIVAN – « Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups », *Acta Math.* **153** (1984), p. 259–277.