

LIVRES

Recent Trends in Combinatorics. The legacy of Paul Erdős

Edited by ERVIN GYÖRI & VERA T. SÓS

Cambridge Univ. Press, 2001. ISBN : 0 521 80170 2. £35

Ce livre est en fait un recueil d'articles. C'est une collection des surveys et des articles de recherche qui sont issus d'un congrès à Mátraháza, Hongrie. Il faut mentionner que c'est une réédition d'un volume du journal *Combinatorics, Probability and Computing* [1] qui a été consacré à ce congrès.

Le domaine principal de ce livre est la combinatoire. Mais plus précisément les sujets traités portent sur des problèmes variés auxquels s'est intéressé Paul Erdős. C'est la raison du sous-titre « The legacy of Paul Erdős ».

On peut considérer que Paul Erdős est un des plus grands mathématiciens du 20^e siècle et sans aucun doute le plus grand combinatoire. Son originalité est d'avoir posé et résolu un nombre considérable de problèmes essentiellement combinatoires, en utilisant des méthodes extrêmement diverses. Parmi les sujets auxquels il s'est intéressé il faut citer la théorie extrémale des graphes, la théorie probabiliste des graphes, la combinatoire et la théorie de nombres, la géométrie combinatoire.

Le premier article parle de l'homme et du mathématicien ; pour avoir plus d'information sur Paul Erdős on peut se référer aux livres [2], [3].

Les autres articles sont écrits par des spécialistes éminents qui ont pour la plupart été des co-auteurs de Paul Erdős. Chacun des articles présentés se réfère à des travaux de Paul Erdős. La diversité des sujets traités montre l'étendue des recherches de Paul Erdős et l'influence considérable qu'il a pu avoir dans le domaine de la combinatoire.

Voici la liste des articles présentés dans cet ouvrage.

MIKLÓS SIMONOVITS, VERA T. SÓS, *Paul Erdős : The Man and the Mathematician (1913-1996)*

PAUL ERDŐS, *A Selection of Problems and Results in Combinatorics*

NOGA ALON, *Combinatorial Nullstellensatz*

E. A. BENDER, P. J. CAMERON, A. M. ODLYZKO, L. B. RICHMOND, *Connectedness, Classes and Cycle Index*

BÉLA BOLLOBÁS, OLIVER RIORDAN, *A Tutte Polynomial for Coloured Graphs*

PETER J. CAMERON, PAUL ERDŐS, *Notes on Sum-Free and Related Sets*

HANS-GEORG CARSTENS, WALTER A. DEUBER, WOLFGANG THUMSER, ELKE KOPPENRADE, *Geometrical Bijections in Discrete Lattices*

MICHAŁ KAROŃSKI, EDWARD R. SCHEINERMAN, KAREN B. SINGER-COHEN, *On Random Intersection Graphs : The Subgraph Problem*

JÁNOS KOMLÓS, *The Blow-up Lemma*

JAROSLAV NESĚTRIL, *The Homomorphism Structure of Classes of Graphs*

Problem Collection of the DIMANET Mátraháza Workshop

Notons qu'une particularité de cet ouvrage est la richesse des problèmes ouverts proposés dans les différents articles. Comme on l'a déjà vu, la dernière partie de ce livre est consacrée aux problèmes ouverts proposés au congrès à Mátraháza, mais il nous faut mentionner que les autres articles aussi contiennent des conjectures très intéressantes et prometteuses.

Notons enfin que ce livre s'adresse à des chercheurs confirmés ou des étudiants en thèse de mathématiques.

Références

- [1] *Combinatorics, Probability and Computing*, Volume **8**, Numbers 1 & 2 (1999)
- [2] Paul Hoffman, *ERDŐS, l'homme qui n'aimait que les nombres*, Belin, 2000
- [3] Bruce Schechter, *My brain is open, the mathematical journeys of Paul Erdős*, Simon & Schuster, New York, 1998

Jean Fonlupt et Zoltán Szigeti
Équipe Combinatoire, Université Paris VI

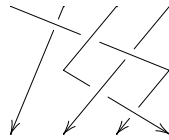
Braids and self-distributivity

P. DEHORNOY

Progress in Mathematics **192**, 623 p., Birkhäuser (2000). ISBN 3-7643-6343-6.

Comme son titre l'indique, ce livre traite des systèmes auto-distributifs, et de leurs rapports avec les tresses. N'étant pas compétent pour passer en revue les 400 dernières pages, consacrées à l'étude interne des systèmes auto-distributifs (en notant toutefois que ces pages sont fort bien écrites, pédagogiques et donc agréables à lire), je vais parler essentiellement des 170 premières qui, après avoir introduit les tresses, montrent où l'auto-distributivité intervient dans leur étude. Commençons par décrire les acteurs de ce livre, les tresses et les LD-systèmes (LD pour « left self-distributive »).

Les tresses apparaissent de plus en plus comme un objet central en mathématiques à travers leurs différentes définitions. Topologiquement, le groupe de tresses B_n peut être défini comme le groupe fondamental de l'espace des configurations formées de n points distincts de \mathbb{C} . On peut encore voir les tresses comme les classes d'isotopie ambiante (déformation induite par une déformation continue de l'espace ambiant) d'applications continues $f : \{1, 2, \dots, n\} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \times [0, 1]$ telles que $f(\{1, 2, \dots, n\} \times t)$ soit formé de n points distincts de $\mathbb{C} \times t$ pour tout t dans $[0, 1]$. On obtient les mêmes objets en se contentant des applications linéaires par morceaux; on peut donc voir les tresses comme classes d'équivalence (pour la déformation) de dessins du genre :



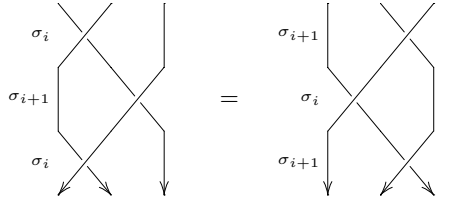
La tresse ci-dessus possède 4 brins ($n = 4$); le segment $[0, 1]$ parcourt de haut en bas la feuille, et \mathbb{C} , représenté en perspective, est un plan transversal à la feuille. Le produit dans B_n correspond à la juxtaposition verticale de dessins. On voit que, quitte à déformer pour éviter deux croisements à la même hauteur, une tresse se décompose en produit de tresses élémentaires qui « n'entrelacent » que les i et $i + 1$ -èmes brins :

$$\begin{array}{cccccc}
 \dots & i-1 & i & i+1 & i+2 & \dots \\
 \sigma_i : & \downarrow & \swarrow \searrow & \downarrow & \downarrow & \\
 \dots & i-1 & i & i+1 & i+2 & \dots \\
 \sigma_i^{-1} : & \downarrow & \swarrow \searrow & \downarrow & \downarrow &
 \end{array}$$

Comme l'indique le nom qu'on leur a donné, il est clair que les tresses élémentaires σ_i et σ_i^{-1} sont inverses l'une de l'autre. On en déduit la version algébrique des tresses comme le groupe défini par générateurs et relations :

$$\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i - j| > 1 \text{ et } \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \rangle. \quad (*)$$

Nous illustrons la dernière relation :



Une dernière définition notable des tresses est comme sous-groupe du groupe des automorphismes du groupe libre à n générateurs x_1, \dots, x_n , engendré par les $\tilde{\sigma}_i$ définis par : $\tilde{\sigma}_i(x_j) = x_j$ si $j \neq i, i + 1$ et $\tilde{\sigma}_i(x_{i+1}) = x_i$, $\tilde{\sigma}_i(x_i) = x_i x_{i+1} x_i^{-1}$.

À une tresse est naturellement associée la permutation de $\{1, \dots, n\}$ obtenue en suivant les brins. Cette application est en fait un homomorphisme $B_n \xrightarrow{\pi} \mathfrak{S}_n$ dans le groupe symétrique, et correspond à envoyer σ_i sur la transposition $s_i = (i, i + 1)$ (si l'on rajoute les relations $s_i^2 = 1$ aux relations de B_n , on obtient une présentation de \mathfrak{S}_n).

On appelle *positives* les tresses qui sont dans le sous-monoïde de B_n engendré par les σ_i (i.e. qui n'utilisent pas d'inverses ; c'est aussi — mais ce n'est pas évident — le monoïde de présentation (*)). Une permutation se relève de façon unique en une tresse positive qui a autant de croisements que la permutation a d'inversions. Une telle tresse est dite *réduite*. L'application des permutations dans les tresses réduites est une section ensembliste de π , mais n'est pas un morphisme de groupes, ni même de monoïdes. Les tresses réduites amènent à une forme normale des tresses, explorée vers 1970 par Garside, Brieskorn-Saito et Deligne, basée sur le fait qu'une tresse positive admet un plus grand diviseur à gauche réduit. Une tresse positive admet donc une unique décomposition $b = b_1 \dots b_n$ où chaque b_i est le plus grand diviseur réduit de $b_i b_{i+1} \dots b_n$. On démontre de plus que toute tresse est de façon unique le quotient $a^{-1} b$ de deux tresses positives où a et b n'ont pas de diviseur commun à gauche positif non-trivial.

Notons enfin que, vue l'inclusion naturelle de B_n dans B_{n+1} , comme conséquence de l'inclusion de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n + 1\}$, il est naturel pour étudier les tresses de les mettre toutes ensemble dans le groupe $B_\infty = \bigcup_i B_i$.

L'autre acteur du livre, les LD-systèmes, sont les ensembles munis d'une relation binaire (que nous noterons \wedge) vérifiant l'identité « de distributivité » $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge (x \wedge z)$. De même que l'étude poussée de l'associativité mène à des concepts intéressants (catégories monoïdales), de même tout le livre est le fruit de l'étude de cette identité. Un LD-quasigroupe est un LD-système où l'identité ci-dessus est « inversible », c'est-à-dire qu'il est muni d'une autre opération binaire \vee telle que $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = y$. Un exemple typique de LD-quasigroupe est un groupe muni des opérations de conjugaison à droite et à gauche : $x \wedge y = xyx^{-1}$ et $x \vee y = x^{-1}yx$. Le rapport entre tresses et LD-systèmes commence par deux observations.

La première est que pour tout LD-quasigroupe S , le groupe B_n agit sur S^n par les formules $\sigma_i.(s_1, \dots, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n) = (s_1, \dots, s_i \wedge s_{i+1}, s_i, \dots, s_n)$ et

$$\sigma_i^{-1}.(s_1, \dots, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n) = (s_1, \dots, s_{i+1}, s_{i+1} \vee s_i, \dots, s_n).$$

Si on ne retient que la première identité on définit une action des tresses positives sur tous les LD-systèmes. On peut faire un peu mieux, définir une opération *partielle* de B_n sur les LD-systèmes *simplifiables* (ce terme signifie qu'une identité $a \wedge b = a \wedge c$ se simplifie en $b = c$). On définit l'action de σ_i^{-1} sur les seules suites de la forme $(s_1, \dots, s_i \wedge s_{i+1}, s_i, \dots, s_n)$, comme étant $(s_1, \dots, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$, puis on dit que l'action de $b \in B_n$ sur $\underline{s} \in S^n$ est définie et a pour image \underline{s}' si, quand on décompose b en produit de tresses élémentaires, à tout stade l'action est définie (soit que la tresse élémentaire soit positive, soit qu'elle soit négative et que la suite à laquelle on l'applique soit de la forme ci-dessus). Si le LD-système est simplifiable cette notion est bien définie (les suites sur lesquelles l'action de b est définie, et leur image, ne dépendent pas de la décomposition choisie de b).

La deuxième observation est qu'on peut munir B_∞ d'une loi qui en fait un LD-système simplifiable en posant $a \wedge b = a \text{ sh}(b) \sigma_1 \text{ sh}(a^{-1})$ où sh est l'endomorphisme (shift) de B_∞ qui envoie σ_i sur σ_{i+1} . Ce LD-système n'est pas un LD-quasigroupe, mais il est simplifiable. On définit donc une opération partielle de B_∞ sur les suites (infinies) d'éléments de B_∞ . On appelle tresses *spéciales* les éléments du sous-LD système engendré par σ_1 . Deux résultats importants (et non évidents) du livre sont que les tresses spéciales sont les tresses b telles que l'action de b sur la suite $(1, 1, 1, \dots)$ soit définie et égale à $(b, 1, 1, \dots)$, et qu'elles forment un LD-système libre à un générateur.

La construction du célèbre *ordre de Dehornoy* sur les tresses utilise ces faits. Rappelons qu'un groupe G est ordonnable à gauche s'il possède un ordre tel que $g < h$ entraîne $fg < fh$. Le groupe est ordonnable (ou bi-ordonnable) si l'on a aussi $gf < hf$. Se donner un ordre à gauche équivaut à se donner une partie \mathcal{P} (les éléments > 1) telle que $\mathcal{P}\mathcal{P} \subset \mathcal{P}$ et telle que G soit l'union disjointe de \mathcal{P} , \mathcal{P}^{-1} et $\{1\}$. On a un bi-ordre si \mathcal{P} est invariante par conjugaison. L'existence d'un ordre à gauche implique que G est sans torsion, ainsi que son algèbre sur \mathbb{Z} (une conjecture de Kaplansky est que le premier implique toujours le second). Ces propriétés dont la première avait été auparavant péniblement démontrée pour les tresses, et la seconde était inconnue, sont donc une conséquence immédiate de l'existence de l'ordre de Dehornoy. Cependant, contrairement aux groupes libres et au groupe des tresses pures (les tresses qui induisent la permutation triviale), le groupe des tresses n'est pas bi-ordonnable. Par exemple, on montre que dans un groupe bi-ordonnable un élément a au plus une racine n -ième ; or $\sigma_1 \sigma_2$ et $\sigma_2 \sigma_1$ sont deux tresses distinctes de même cube.

La définition de l'ensemble \mathcal{P} pour l'ordre de Dehornoy est très simple : \mathcal{P} est formé des tresses b telles que le générateur σ_i de plus petit indice qui apparaît dans une décomposition de b n'y apparaît qu'avec des exposants positifs (on dit que b est σ_i -positive si ce plus petit indice est i). Toute la difficulté est de démontrer que cette définition a un sens (qu'elle ne dépend pas de la décomposition choisie) et a les propriétés requises. La seule chose facile est de voir qu'une tresse σ_1 -positive est non triviale, en remarquant qu'en tant qu'automorphisme du groupe libre, elle envoie x_1 sur un mot librement réduit se terminant par x_1^{-1} . Pour le reste, il faut utiliser les propriétés des LD-systèmes libres, en particulier que l'ordre partiel induit par la divisibilité à gauche (pour l'opération \wedge) est un ordre total sur le système libre à un générateur, d'où un ordre total sur les tresses spéciales. On remarque alors que les tresses spéciales positives pour cet ordre sont les tresses spéciales σ_1 -positives. Ensuite, on utilise l'action des tresses sur le LD-système des tresses spéciales pour étendre l'ordre à toutes les tresses : on montre que pour chaque tresse b il existe au moins une suite \underline{s} de tresses spéciales telle que l'opération de b sur cette suite soit définie avec image \underline{s}' , et on dit que b est positive si \underline{s} est plus petite que \underline{s}' pour l'ordre lexicographique des suites (induit par l'ordre sur les tresses spéciales).

Nous n'avons évoqué ici que quelques pour cent de la simple partie sur les tresses qui contient beaucoup plus, par exemple l'approche de Dynnikov ainsi que celles de

plusieurs autres auteurs de l'ordre de Dehornoy, l'utilisation du « retournement » pour obtenir les formes normales, etc. . . La seconde partie étudie les LD-systèmes libres et la troisième partie d'autres LD-systèmes, en particulier les mystérieuses « tables de Laver » finies. Nous ne pouvons qu'encourager à se plonger dans ce riche livre.

Jean Michel, Équipe des groupes finis, Institut de mathématiques de Jussieu

Invitation aux Mathématiques de Fermat-Wiles

YVES HELLEGOUARCH

Dunod. 2^de édition, 2001. ISBN 2-10-005508-9. 35 €

Autour du nombre π

PIERRE EYMARD, JEAN-PIERRE LAFON

Hermann 1999, 318 p. ISBN 2-7056-1443-5. 148 €

Il y a plusieurs raisons pour justifier pourquoi analyser ensemble ces deux ouvrages. Nous les découvrirons toutes peu à peu, mais la première, la plus importante à mes yeux, est leur caractère *transverse* à l'habituelle présentation des livres destinés aux étudiants en France. C'est Yves Hellegouarch dans sa préface (puis Michèle Audin dans le n° 83 de la *Gazette*), qui a introduit ce terme pour désigner un texte qui, au lieu de suivre pas à pas le programme fixé par l'autorité du Ministère de l'éducation Nationale, cherche au contraire à développer dans l'esprit de l'étudiant-lecteur l'idée qu'il existe une certaine unité dans la mathématique, et que l'on peut choisir pour thème d'un livre autre chose qu'un numéro d'UV. De tels livres sont malheureusement très rares. Saluons donc comme il convient ceux qui rentrent dans cette catégorie, lorsque, parfois, il en paraît. Le titre d'Y. Hellegouarch, comme celui de P. Eymard et J.P. Lafon, annonce sans tromperie le contenu de leurs ouvrages respectifs, et montre donc immédiatement leur caractère *transverse* dès lors que l'on sait qu'ils sont destinés non pas à des spécialistes, mais à des esprits curieux de toutes sortes et surtout aux étudiants de nos universités.

Un deuxième caractère commun aux deux ouvrages est qu'ils s'inscrivent tous deux dans la longue durée, trois siècles et demi pour l'un, et vingt-cinq pour l'autre. *L'Invitation aux mathématiques de Fermat-Wiles*, nous apprend son auteur, est née d'un cours de maîtrise qu'il a donné en 1994. [...] *j'ai pu prendre conscience de l'utilité de transmettre cette foule de résultats épars et précieux que les modernes n'ont cure d'enseigner* [...], écrit-il dans un préambule, *et j'ai pu également constater que nos étudiants semblaient heureux de traverser des siècles de mathématiques en suivant un fil d'Ariane qui leur en donnait une vision synthétique et transversale*. L'histoire des mathématiques baigne donc ces deux livres, mais comme *en passant*, sans jamais prétendre faire œuvres d'historiens : ainsi, quelques exemples parmi de très nombreux autres, lorsque Hellegouarch présente à *la Abel* la démonstration du théorème reliant l'alignement des trois points P, Q, R sur une courbe elliptique, et la relation $P + Q + R = 0$ donnée par la loi de groupe définie par la courbe, ou lorsqu'il reproduit des extraits d'articles anciens (par exemple celui d'Abel, suivi d'un exercice, page 115 qui contient la question suivante : *Dans ce texte d'Abel publié en 1823, l'auteur dit, ligne 4, qu'il considère une fonction φ choisie dans toute sa généralité. D'après les lignes qui suivent pouvez vous préciser la conception qu'il se fait d'une fonction générale ?*); ainsi lorsque Eymard et Lafon font de la dichotomie comme Archimède pour définir π et trouver l'encadrement $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$ ou indiquent la méthode de Giulio Carlo Fagnano (1682-1766) pour diviser à l'aide de la règle et du compas l'arc de lemniscate en deux, trois et cinq arcs égaux. L'idée

des auteurs est simplement, me semble-t-il, d'inscrire leur propos dans la continuité du développement des mathématiques au long des siècles, marqué par les jalons que constituent les travaux des grands mathématiciens du passé. Mais ce faisant, nul doute qu'ils ne développent le goût, chez leurs lecteurs, d'aller au-delà, de s'intéresser de plus près aux mathématiques et aux mathématiciens qu'ils auront rencontré, depuis Archytas ou Diophante jusqu'à Ramanujan ou Wiles, pour ne citer que quelques noms parmi ceux qui émaillent les deux textes qui nous occupent ici.

Autre élément qui rapproche ces deux ouvrages, c'est le caractère *coup de cœur* qui se dégage tout au long de ces pages, où l'on sent le souffle des auteurs emportés par leur sujet, et heureux de nous communiquer leur élan. Par exemple on lit page 43 d'*Autour du nombre π* que *L'admirable formule de Wallis doit susciter des ricanements des chasseurs de décimales*, ce qui n'empêche pas les auteurs de donner plus loin la formule de Plouffe qui permet d'en calculer des milliards, ou les profonds résultats de J.M et P.B Borwein qui eux aussi fournissent de puissants algorithmes du calcul des décimales de π . Le côté sympathique de cette façon d'écrire des mathématiques comporte cependant sa contrepartie négative, lorsque cet élan les conduit, pour aller plus rapidement à l'essentiel, à négliger quelques intermédiaires. Les exemples abondent. Je n'en citerai que trois. Page 20, Hellegouarch, qui vient juste de démontrer un lemme dans l'anneau des entiers de Gauss, affirme que d'après ce résultat, adapté à $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$, on obtient une certaine égalité. *A priori*, c'est dans $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ que doit se faire la démonstration, et c'est seulement après une petite manipulation que l'on se ramène en effet à $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$. Page 194, il écrit qu'il a montré antérieurement que tout automorphisme de $\overline{\mathbf{Q}}$ – la clôture algébrique de \mathbf{Q} – se prolonge en un automorphisme de \mathbf{C} tout entier, mais j'ai vainement cherché cette démonstration dans le livre. Pour introduire π à la manière d'Archimède, Eymard et Lafon doivent donner la formule qui donne par récurrence le côté des polygones réguliers inscrits et exinscrits à $2n$ côtés en fonction de ceux à n côtés. Afin de réduire les calculs, et de montrer facilement que les périmètres de ces polygones convergent vers un même nombre, les auteurs écrivent (page 2) *Nous avons sur Archimède le grand avantage de pouvoir nous servir de lignes trigonométriques [...]*, et plus loin, page 3, *les inégalités (1.4) résultent de (1.6) et des inégalités pour $0 < \theta < \pi/2$ [...]*, alors qu'à ce stade, π n'est encore pas défini. Chaque fois le lecteur averti rétablit sans trop de peine le non-dit des auteurs. Mais les étudiants, habitués à utiliser des ouvrages qui tendent à la rigueur formelle, qui présentent des mathématiques plus robotisées que réellement vivantes, risquent pour le moins d'être parfois décontenancés. Mais peut-être ces quelques négligences sont-elles en fait salutaires et tendent-elles, elles aussi à la formation en profondeur des étudiantes et étudiants du troisième millénaire. . .

Dernière raison de traiter ensemble ces deux livres : on aurait pu penser qu'en présence d'ouvrages sortant de l'ordinaire, en particulier d'ouvrages qui peuvent durer plus longtemps que la durée de vie habituelle d'une UV et qui donc ne risquent pas de se démoder sitôt parus, les éditeurs seraient conduits à faire un effort pour sortir eux aussi de la pauvreté de la présentation des éditions scientifiques françaises pour étudiants : il n'en est rien. Au contraire, ils donnent l'impression d'avoir voulu réduire le coût au minimum. La présentation de l'*Invitation aux Mathématiques de Fermat-Wiles* qu'en donne Masson est hideuse, et celle d'*Autour du nombre π* est tout simplement indigne du grand éditeur que fut autrefois Hermann : ignore-t-il qu'on sait intégrer proprement une figure dans un texte, que l'on écrit $\cos x$, $\exp x$ et non $\cos x$, $exp x$ etc. ? Tout cela est bien dommage pour l'amateur de beaux livres, mais ne diminue en rien leur contenu que je vais maintenant rapidement présenter.

Le livre d'Yves Hellegouarch comprend six chapitres. Chaque chapitre est suivi de très nombreux exercices et problèmes, tous très intéressants, comme par exemple la démonstration de la transcendance de π par Lindemann, mais curieusement attribuée

à Hermite, de nombreux résultats de Rolf Nevanlinna autour de la formule de Poisson-Jensen, ou le théorème de Hardy sur les zéros de la fonction ζ . Il y en a d'autres moins prestigieux, mais tous utiles.

Le premier chapitre présente la descente infinie de Fermat, démontre le Théorème de Fermat pour $n = 3$ ou 4 , caractérise les entiers qui sont somme de deux carrés, dénombre pour ceux-là le nombre de manières de le faire, et se termine par l'étude des « nombres idéaux », d'après Kummer. On y démontre que la clôture intégrale de \mathbf{Z} dans $\mathbf{Q}[\zeta]$ est $\mathbf{Z}[\zeta]$ et l'on esquisse celle du fait que cet anneau est un anneau de Dedekind (ζ désignant une racine p -ième de l'unité, p premier impair). Il donne enfin la démonstration du théorème de Kummer qui affirme que le grand théorème de Fermat est vrai pour les exposants qui sont de nombres premiers réguliers. Le deuxième chapitre est consacré aux fonctions elliptiques, définitions, fonction \wp de Weierstrass, la cubique associée $Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3$ et sa loi de groupe, introduction de la fonction loxodromique S , de la fonction ρ , et démonstration de la formule de Jacobi $\Delta = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24}$. Dans le troisième chapitre, le lecteur découvre les diverses valeurs absolues de \mathbf{Q} et leurs complétions, et la théorie de Galois, à peu près du niveau de la licence. Parmi les exercices proposés, je note (page 169) le problème rarement abordé dans un cours et pourtant bien instructif, de caractériser les équations du troisième degré à coefficients rationnels, ayant trois racines réelles, et dont les racines peuvent s'écrire uniquement avec des radicaux *réels*. Le chapitre suivant nous introduit dans l'univers des courbes elliptiques. Le début du chapitre est le plus réussi de ce livre. Il expose de manière très agréable et parfaitement élémentaire quelques notions comme l'ordre d'un point d'une courbe algébrique, la multiplicité d'intersection de deux courbes algébriques en un point, le théorème de Bézout, le théorème des neuf points, les lois de groupe sur une courbe elliptiques, et les points qui sont d'ordre fini. Mais ensuite, lorsque l'on progresse dans le chapitre, l'on progresse aussi dans la difficulté, ce qui est bien normal, vu le but final à atteindre, dans les chapitres suivants. Alors que jusqu'ici, tout ou presque était démontré, les théorèmes sans démonstration se font plus nombreux, et les notions nouvelles arrivent à un rythme plus soutenu : fonction ζ d'une courbe elliptique, fonction L ... Mais les exercices restent tous instructifs et à la portée des bons étudiants. Le chapitre cinq doit enfin nous conduire jusqu'au théorème de Wiles. Comme le précédent, il débute par quelques résultats « élémentaires » et bien expliqués, dus aux Bernoulli à Euler ou Jacobi. Les fonctions θ apparaissent rapidement, toutes les quatre, $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ et pas seulement θ_3 comme dans la plupart des ouvrages, et sont explicitées et démontrées les très nombreuses formules où elles interviennent, que l'on trouve chez Briot-Bouquet (*Théorie des fonctions doublement périodiques* 1859) et chez Tannery et Molk (*éléments de la théorie des fonctions elliptiques*, tome II, 1896) par exemple, mais rarement dans les ouvrages d'aujourd'hui. Puis viennent les fonctions modulaires. Depuis le remarquable *Cours d'arithmétique* (1970) de J-P Serre, il est devenu facile d'exposer les fondements de cette théorie, et la plupart des auteurs se contentent de reprendre sa présentation en l'adaptant s'il le faut à leurs propres préoccupations. Hellegouarch n'échappe pas à cette (bonne) règle, puis il accélère de nouveau, afin de pouvoir, en quelques pages, à la fois dresser un historique des progrès de la théorie des courbes elliptiques et permettre au lecteur de comprendre l'énoncé du théorème de Wiles. Le dernier chapitre doit faire le lien entre la théorie précédente et le théorème de Fermat. Ce n'est pas facile! surtout en si peu de pages. Ici encore Hellegouarch cherche à nous en donner le parfum, à éclairer la démarche historique, mais non à apporter de réelles preuves dans le cadre restreint de son livre par ailleurs si riche en mathématiques de toutes sortes. Quelques énoncés de nouvelles conjectures et une annexe historique précisant la contribution propre de l'auteur, nous conduisent aux dernières pages de l'ouvrage.

Le livre d'Eymard et Lafon comprend également six chapitres, le sixième ne comprenant que les solutions des nombreux exercices qui émaillent les autres. Les auteurs indiquent dès leur préface qu'en gros le chapitre $n \leq 5$ correspond Bac + n , ce qui est d'autant mieux vérifié que n est grand. Le chapitre un nous introduit dans l'univers mathématique d'Archimède. On y explique, mais souvent en profitant de l'existence d'outils modernes, comment il procédait pour calculer des longueurs, des aires et des volumes liés au cercle, à la sphère ou à la spirale d'Archimède, qui tous font, bien entendu, appel au nombre π . Lorsque le calcul demande de sommer les puissances k -ièmes des n premiers nombres, le texte se permet une digression pour nous expliquer comment Pascal avait trouvé la formule de récurrence qui permet de les calculer de proche en proche. Comme la moyenne arithmétique des n premiers nombres $r(k)$, $k = 1, 2, \dots$, où $r(k)$ désigne le nombre de décompositions de l'entier k en somme de deux carrés, converge vers π lorsque n tend vers l'infini, nous faisons une incursion en arithmétique, et nous suivons les progrès faits dans ce domaine depuis Gauss (1834) jusqu'à Huxley (1993). Nous quittons l'arithmétique avec un problème analogue au précédent posé par Dirichlet avant de rejoindre les probabilités avec l'aiguille de Buffon, et terminons le chapitre avec les courbes de largeur constante. Un regret, peut-être, c'est de ne pas trouver dans ce chapitre où la géométrie joue un si grand rôle, la belle démonstration géométrique, implicite dès les premières éditions des *Éléments de géométrie* de Legendre, mais parfaitement explicite dans celle de 1853, du fait que π est égal à deux fois la moyenne arithmético-géométrique de 0 et 1. Le deuxième chapitre nous conduit de Viète et Wallis jusqu'à maintenant en passant par la formule de Stirling, la formule de Gauss intervenant dans la distribution normale, le développement en série de $\text{Arctg } x$, et les formules qui en dérivent comme celle de Machin, et bien d'autres du même type, diverses formules donnant π sous forme de fraction continue (et donc au préalable un rappel sur les fractions continues), et enfin la formule de Plouffe datant de 1997, et popularisée par un article du *Mathematical Intelligencer* (n° 19, 1997) :

$$\pi = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right)$$

qui permet de calculer des chiffres du développement en base 16 d'ordre très élevé (plusieurs milliards) sans être pour autant contraint de calculer les précédents. Le chapitre 3 commence par comparer les exposés classiques définissant d'abord π , puis e bien plus tard, et, grâce à Euler, rencontrant l'exponentielle à travers la formule $\exp 2i\pi = 1$ et les exposés modernes où la fonction exponentielle est définie par son développement en série, et où $i\pi$ apparaît comme sa demi période. Pour progresser dans l'utilisation de π en analyse, les auteurs font quelques rappels élémentaires sur les séries de Fourier, et en déduisent de nombreuses égalités, comme par exemple $\pi^2/8 = \sum_{n \geq 0} 1/(2n+1)^2$, avant de nous présenter plusieurs démonstrations de la formule $\pi^2/6 = \sum_{n > 0} 1/n^2$, dont la suivante. Les racines de l'équation $0 = 1 - y/3! + y^2/5! - \dots$ étant égales à $\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, \dots$, la somme des inverses des racines est donc égale à l'opposé du coefficient de y dans l'équation, *i.e.* $3! = 6$. C'est du moins ce qui serait le cas si nous avions affaire à un polynôme et non comme ici à une série. Les auteurs ajoutent alors : *Bien entendu Euler a ensuite démontré rigoureusement la formule, mais n'était-il pas plus important de l'avoir trouvée ?* Après une courte incursion dans l'univers de la fonction dilogarithme (car par exemple sa valeur en $(\sqrt{5}-1)/2$ fait apparaître $\pi^2/10$), le texte nous convie à étudier le comportement asymptotique de quelques fonctions arithmétiques dont la fonction $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, la fonction μ de Möbius et la fonction φ d'Euler. Au passage le lecteur rencontre les séries de Dirichlet, et apprend à les utiliser. Restant toujours dans la mouvance d'Euler, nous arrivons

à la formule de la cotangente qui permet *via* les nombres de Bernoulli de calculer les valeurs de $\zeta(2p)$ pour les valeurs entières de p , avant de terminer le chapitre avec les fonctions eulériennes Γ et B . Afin de faire la liaison avec le chapitre suivant, nous trouvons la formule $\int_0^1 dt/\sqrt{1-t^4} = \Gamma(1/4)^2/4\sqrt{2\pi}$ et une formule analogue avec t^3 au lieu de t^4 . Le ton change avec le chapitre 4, où apparaît l'algèbre. Son but est de caractériser algébriquement les nombres réels constructibles, l'unité étant fixée, avec la règle et le compas comme seuls instruments, et de montrer que la quadrature du cercle est impossible. après avoir rappelé l'irrationalité de \sqrt{n} , déjà connue de Théodore de Cyrène, et rapidement démontré celle de e , nous prenons connaissance de la preuve, très simple, de l'irrationalité de π^2 donnée par Niven en 1946. Les auteurs donnent ensuite la démonstration de l'irrationalité de π de Lambert datant de 1766, bien longue et bien compliquée, utilisant les fractions continues, afin *d'apprécier la concision des preuves modernes mais aussi d'admirer l'ingéniosité de l'auteur de la première démonstration!* Sautant de nouveau par dessus les siècles, nous revenons en 1976 avec les belles démonstrations de F. Beukers pour l'irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$. Nous abordons maintenant la notion de transcendance, rencontrons les nombres de Liouville, à leur propos, divers critères d'approchabilité par les rationnels. Un peu de théorie des corps et de théorie de Galois, exposées avec soin, nous permettra caractériser les nombres constructibles. Les auteurs en déduisent l'impossibilité de la duplication du cube et de la trisection de l'angle. Les solutions de la duplication du cube, données par Menechme et Archytas, contemporains de Platon, utilisant des coniques pour le premier et l'intersection de trois surfaces pour le second, sont rappelées pour encore une fois nous convaincre que de tout temps les mathématiciens ont su deployer des trésors d'imagination pour tenter de résoudre des questions qui encore aujourd'hui demandent connaissances et réflexions. Nous trouvons ensuite les démonstrations d'Hermite et Lindemann pour la transcendance de e et π , avant de retrouver Beukers pour la démonstration de l'inégalité $|\pi - p/q| > 1/q^{23,73}$ quel que soit p , et pour tout q assez grand, qui montre en particulier que π n'est pas un nombre de Liouville : le ton se fait plus sévère! Ce chapitre continue sur un ton plus aimable par l'étude des polygones réguliers constructibles : il faut et il suffit que le nombre n de ses côtés soit le produit d'une puissance de 2 et de nombres de Fermat premiers distincts. Compte tenu des résultats déjà obtenus, l'effort pour le démontrer n'est pas trop important. Une construction explicite du côté du polygone régulier à 17 côtés complète cette étude. Le chapitre 5 est, dans ce livre aussi, le plus ambitieux de tous. Son objectif principal est de montrer quels sont les méthodes récentes utilisées pour le calcul approché de π , et notamment quels sont les ingrédients nécessaires pour démontrer la célèbre formule de Ramanujan, d'après les frères Borwein :

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_0^{\infty} \frac{(4n)! (1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

sans toutefois donner la démonstration complète. Il s'ouvre par l'étude de la lemniscate de Bernoulli et des intégrales elliptiques, et la méthode de Fagnano pour découper l'arc de lemniscate en 2,3 ou 5 parties égales. L'analogie entre cercle et lemniscate, quite à remplacer les fonctions circulaires par les fonctions elliptiques, baigne tout le début du chapitre, le demi-périmètre de la lemniscate ϖ étant égal à $2 \int_0^1 dt/\sqrt{1-t^4}$, à comparer avec $\pi = 2 \int_0^1 dt/\sqrt{1-t^2}$. La moyenne arithmético-géométrique de Lagrange et Gauss et son lien avec les intégrales elliptiques qui conduit à la formule de Gauss $\pi/\varpi = M(\sqrt{2}, 1)$ fait l'objet du paragraphe suivant, suivi par une étude des intégrales elliptiques $E(k)$ et $K(k)$ permettant de présenter divers algorithmes récents utilisés pour le calcul des décimales de π . La deuxième partie de ce chapitre

est consacrée au théorème d'Abel sur la division de l'arc de lemniscate, qui curieusement est exactement le même que celui de Gauss pour la division de l'arc de cercle, étudié au chapitre précédent. La démonstration proposée est celle de Rosen (1981), et fait appel aux fonctions φ d'Abel, le sinus lemniscatique, et \wp de Weierstrass, que les auteurs définissent donc, et dont ils démontrent les propriétés qu'ils utiliseront plus loin, notamment les formules d'addition de \wp . Enfin la troisième partie, *de Jacobi à Ramanujan*, voit apparaître les fonctions θ et leurs relations, et les relations entre fonctions θ et les intégrales elliptiques $K(k)$ étudiées dans les paragraphes précédents. Les fonctions modulaires et λ -modulaires, les fonctions hypergéométriques de Gauss viennent compléter l'appareillage technique nécessaire pour atteindre le but fixé : la démonstration par les Borwein de la formule de Ramanujan. Mais comme disent Eymard et Lafon, *au point où nous en sommes, leurs énoncés sont compréhensibles, mais leurs démonstrations exigent encore bien du travail!*

En résumé, voici deux ouvrages qui conduisent leurs lecteurs des origines aux recherches contemporaines, et que l'on devrait recommander à tous les étudiants qui ne sont pas surpris d'apprendre que les diverses branches des mathématiques forment un tout, contrairement à ce que pourrait faire croire le découpage en UV, à ceux que la difficulté n'effraie point, bref à tous ceux aiment les mathématiques, ceux qui veulent comprendre leur profonde unité.

Michel Zisman