

LIVRES

Diffusions, Markov Processes and Martingales. Vol. 1. Foundations; Vol. 2. Itô calculus.

L. ROGERS, D. WILLIAMS

Reprint of the second (1994) edition. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, (2000). Vol. 1 : 386 p. \$ 37.95. ISBN 0-521-77594-9 ; Vol. 2 :480 p. \$ 39.95. ISBN 0-521-77593-0

Ces deux livres sont une réédition par *Cambridge University Press* du traité de Rogers et Williams consacré aux processus stochastiques. Aucune modification n'a été apportée par rapport à la version antérieure parue en 1994 à l'exception du prix de vente qui a sensiblement baissé. Ces deux volumes constituent à la fois une excellente introduction aux processus de Markov, aux martingales et au calcul stochastique, mais aussi une source d'information très riche sur des aspects plus avancés. La rédaction privilégie l'intuition et les heuristiques reléguant au second plan le formalisme abstrait.

Le premier volume, édité pour la première fois en 1979, a été profondément enrichi pour sa seconde publication en 1994. Le livre s'ouvre sur un long chapitre consacré au mouvement Brownien. Soucieux de présenter avant tout des applications et des motivations, les auteurs ont complètement omis les concepts théoriques et le détail des preuves afin de survoler l'éventail le plus large possible de résultats. Le reste de l'ouvrage reprendra ces différents aspects pour leur donner un cadre théorique. La structure du livre permet de pratiquer plusieurs niveaux de lecture et le lecteur peut se contenter de piocher quelques résultats dans chaque sections. Par exemple, le second chapitre est beaucoup plus élémentaire et on y reconnaîtra en particulier des pans entiers du livre de Williams *Probability with martingales*. Finalement, la troisième partie est consacrée aux processus de Markov. On y trouvera à la fois une description des semi-groupes de Feller, mais aussi des concepts plus avancés concernant les processus de Ray.

Le second volume est principalement consacré au calcul stochastique. La rédaction est aussi fluide que dans le premier tome et offre différentes perspectives au lecteur. Une fois encore une lecture linéaire n'est pas nécessaire, en particulier le second volume est complètement indépendant du premier (à condition de connaître la théorie élémentaire des probabilités). Le premier chapitre est consacré à la construction des intégrales stochastiques, à la formule d'Itô, aux changements de mesures, etc. Ensuite les équations différentielles stochastiques sont introduites d'abord dans un cadre classique, puis dans une seconde étape le cas des diffusions sur des variétés est considéré. Comme dans le premier tome, l'accent est mis sur les exemples concrets, les auteurs cherchant avant tout à présenter la structure globale de la théorie et l'enchaînement logique des idées. Le livre se conclue sur des aspects plus théoriques permettant de généraliser les constructions précédentes.

Thierry Bodineau, Équipe Probabilités et modèles aléatoires de Paris VI et VII

Stability and transition in shear flows

P.J. SCHMID, D.S. HENNINGSON

Applied Mathematical Sciences, **142**, Springer-Verlag, New York, 2001. 556 p.
\$ 79.95. ISBN 0-387-98985-4

La question de la stabilité d'écoulements et de leur transition vers la turbulence est un des plus jolis problèmes de la mécanique des fluides. Ce sujet est très étudié depuis plus d'un siècle, par des méthodes de théorie spectrale, par des méthodes d'énergie ou par des méthodes numériques. Hélas la plupart des livres consacrés à ce sujet sont soit dépassés, soit difficilement lisibles (soit les deux!). Le livre de J. Schmid et D.S. Henningson, très agréable à lire est donc particulièrement bienvenu. Après une introduction limpide présentant les différents nombres de Reynolds critiques, les auteurs développent la théorie de la stabilité d'écoulements de cisaillement nonvisqueux, passant en revue aussi bien les critères classiques de stabilité (Rayleigh, Fjortoft, Howard) que le problème de donnée initiale. L'étude spectrale dans le cas visqueux (Orr, Sommerfeld et Squire) est ensuite décrite, sans toutefois entrer dans les détails abominables de l'analyse, mais en s'appuyant en permanence sur des calculs numériques, ce qui la rend particulièrement aisée à lire. Les chapitres suivants sont consacrés à la croissance des modes non normaux, à la stabilité nonlinéaire (développements faiblement nonlinéaires, résonances à trois ondes), à l'étude de flots plus complexes (Falkner-Skan, instabilité secondaire). Pour terminer, les auteurs présentent une description remarquable des divers scénarios de transition vers la turbulence, en s'appuyant à la fois sur des expériences et sur des calculs numériques.

Ce livre me semble donc être une référence extrêmement agréable et précieuse pour toute personne intéressée par la mécanique des fluides, et même par les problèmes de stabilité en général.

Emmanuel Grenier, ENS Lyon

Codes and algebraic curves

OLIVER PRETZEL

Oxford lecture series in mathematics and its applications **8**. The Clarendon Press, Oxford 1998. 192 pp. ISBN : 0-19-850039-4. \$ 65

Ce livre est une introduction à la théorie des codes géométriques de Goppa, une classe de codes correcteurs d'erreurs construits à l'aide de géométrie algébrique sur des corps finis.

Les codes correcteurs d'erreurs sont des techniques pour améliorer la qualité de l'enregistrement ou de la transmission d'informations. Celle-ci consiste à envoyer dans un canal une information sous la forme d'une série de signaux binaires ('0' ou '1'), les bits. Un des moyens utilisés pour rendre plus fiable cette transmission consiste à utiliser la redondance : on ajoute quelques bits bien choisis de manière périodique dans le message. Ces bits supplémentaires permettent de détecter une erreur dans la transmission de l'information ou même de corriger cette erreur. C. Shannon a montré qu'en codant les messages de façon appropriée, on peut obtenir un rendement quasi maximum, en ce qui concerne la correction des erreurs de transmission. Mais sa démonstration n'est pas constructive et on ne connaît l'existence de codes optimaux que dans des cas particuliers.

Pour pallier ces inconvénients, on a introduit, dans les années 80, à la suite du mathématicien russe V. Goppa, de nouvelles familles de codes, construits à l'aide de technique de géométrie algébrique sur les corps finis : les codes géométriques. Ces codes ont des paramètres extrêmement bons.

Pour les construire, on évalue des fonctions algébriques sur des courbes définies sur un corps fini. À partir de certaines conditions algébriques sur ces fonctions, on peut estimer les paramètres des codes obtenus, essentiellement le taux de bits supplémentaires, et le taux d'erreurs que l'on peut corriger. Le théorème de Riemann-Roch est essentiel dans ces estimations.

Il y a deux façons d'introduire les courbes algébriques : par la géométrie, comme c'est fait par exemple dans le livre de W. Fulton (*Algebraic Curves*, W. A. Benjamin, New York, 1969) ou par l'algèbre, en étudiant le corps des fonctions rationnelles d'une courbe algébrique, comme le fait Chevalley (*Introduction to the theory of algebraic function of one variable*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1951). Cette dernière présentation est plus abstraite, mais se révèle plus puissante.

Plutôt que de choisir entre les deux présentations, Pretzel utilise d'abord la théorie géométrique des courbes algébriques pour énoncer le théorème de Riemann-Roch et présenter les codes. Cela donne lieu à une première partie où les énoncés les plus difficiles sont admis. Il se contente d'énoncer juste ce qu'il faut assimiler de géométrie algébrique pour comprendre la théorie des codes de Goppa. L'important ici est le calcul pratique. Il est présenté avec beaucoup d'exemples et l'auteur étudie complètement quelques courbes planes. Cette présentation est agréable à lire : la rédaction est faite pour aider l'intuition géométrique.

Il envisage ensuite le décodage des codes géométriques de Goppa, d'abord en expliquant l'algorithme simplifié de Skorobogatov-Vlăduț puis en traitant l'algorithme plus précis de Duursma, qui utilise les idées de vote à la majorité de Feng et de Rao.

Puis, dans une deuxième partie, à l'aide de la théorie des corps de fonctions, il donne une démonstration rigoureuse des théorèmes de géométrie utilisés, essentiellement le théorème de Riemann-Roch et la formule de Plücker sur le genre des courbes planes lisses. Comme au début, Pretzel fait beaucoup d'efforts pédagogiques. Il motive par exemple la présentation des différentielles de manière historique, en introduisant la notion analytique avant d'introduire la notion algébrique plus abstraite de différentielle de Weil qui lui servira ici.

Enfin il termine ce livre par le théorème de Tsfasman, Vlăduț, et Zink montrant que les codes géométriques de Goppa sont asymptotiquement meilleurs que ceux que l'on savait construire auparavant, et par l'étude des familles asymptotiques de corps de fonctions récemment trouvées par A. Garcia et H. Stichtenoth qui permettent de démontrer le même théorème, à l'aide de courbes plus explicites.

Il y a deux notions de codes de Goppa. Pretzel introduit d'abord la notion de code de fonction, dont la définition ne fait intervenir que la notion de diviseur, puis par dualité la notion de code résiduel, et démontre une estimation des paramètres de ces codes. Cela lui permet de ne pas utiliser à cette étape la notion plus compliquée de forme différentielle et de résidu, avec lesquelles on présente généralement les codes résiduels. Bien sûr ces notions sont cachées dans le théorème de Riemann-Roch, mais celui-ci peut être énoncé sans elles. Il n'introduit ces notions que quand elles sont nécessaires, pour la démonstration du théorème de Riemann-Roch dans la deuxième partie, puis pour prouver que les deux notions de code de fonction et de code résiduel sont en fait deux représentations différentes du même objet.

Ce livre peut être considéré comme une présentation relativement simple des la théorie des codes de Goppa pour quelqu'un qui a peur d'être rebuté par l'accumulation de concepts habituellement employés pour introduire la géométrie algébrique. La deuxième partie satisfera le lecteur qui cherche des démonstrations complètes. C'est aussi une introduction au livre plus complet de H. Stichtenoth (*Algebraic Function Fields and Codes*, Springer-Verlag).

Ce livre nécessite une familiarité avec les fondements de la théorie des codes correcteurs d'erreurs, très brièvement rappelée, et avec la théorie des corps finis. Il comporte

de nombreux exercices à la fin de chaque chapitre.

François Rodier, Université de Marseille I

Model Theory, Algebra, and Geometry

édité par D. Haskell, A. Pillay et C. Steinhorn

Mathematical Sciences Research Institute Publications, **39**. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. 227 pp. ISBN 0-521-78068-3. \$ 49.95.

Issu d'un semestre de théorie des modèles organisé au MSRI en 1998, ce volume présente une bonne part des développements réalisés au cours des quinze dernières années en théorie des modèles des corps, en privilégiant les interactions avec la géométrie et la théorie des nombres. Il a été conçu de manière à former un tout et à être accessible au mathématicien n'ayant qu'une familiarité modeste, voire inexistante, avec la théorie des modèles.

Après un premier article de D. Marker rappelant les rudiments de la théorie des modèles, L. van den Dries fait le point sur la théorie des modèles des corps classique. Les articles suivants sont consacrés aux corps avec structures supplémentaires. Ainsi l'article de D. Marker est-il consacré aux corps différentiels et celui de Z. Chatzidakis aux corps aux différences. Ces deux textes exposent également l'utilisation qui a été faite récemment des théories des modèles de ces théories par E. Hrushovski respectivement dans ses travaux concernant les conjectures de Mordell-Lang et Manin-Mumford. En géométrie réelle une notion importante apparue dans la dernière décennie est celle de o -minimalité. Ce concept unificateur recouvrant la théorie des ensembles semi-algébriques, sous-analytiques, pfaffiens, . . . , est exposé dans l'article de D. Macpherson. Les nombreux développements sur la structure des ensembles définissables sur les corps valués sont exposés dans l'article de J. Denef ainsi que leurs applications, notamment aux théorèmes de rationalité, ainsi que les aspects analytiques et rigides analytiques. En guise de conclusion, B. Mazur fait le point sur les différentes approches de la conjecture de Mordell-Lang en mettant l'accent sur les questions d'effectivité.

Cet ouvrage de référence constituera une source d'information très utile, tant pour le néophyte que le spécialiste.

François Loeser, Université Paris VI

Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces

HIRAKU NAKAJIMA

University Lecture Series **18**. American Math. Society, 1999. 132 p.

ISBN 0-8218-1956-9. \$ 21.

Soit X une surface algébrique complexe, que l'on supposera lisse et quasi-projective. Pour tout entier n , on peut considérer l'espace des modules paramétrisant les sous-schémas ponctuels de longueur n dans X . On le note $X^{[n]}$, c'est le schéma de Hilbert des points de longueur n dans X . La donnée de n points distincts de X définit un tel sous-schéma ponctuel de longueur n dans X , mais on en obtient de plus compliqués en faisant entrer en collision certains de ces points pour créer des points "épais" qui seront comptés avec multiplicité. Plutôt que d'étudier les espaces $X^{[n]}$ un par un, il est commode de les étudier « tous à la fois ». Ainsi, pour les polynômes de Poincaré $P_t(X^{[n]})$ (le polynôme de Poincaré d'un espace Y est défini par $P_t(Y) = \sum_{k \geq 0} t^k \dim H^k(Y)$), un résultat remarquable de Göttsche [1] donne la formule suivante pour la fonction génératrice des polynômes de Poincaré :

$$\sum_{n \geq 0} q^n P_t(X^{[n]}) = \prod_{m \geq 1} \frac{(1 + t^{2m-1} q^m)^{b_1(X)} (1 + t^{2m+1} q^m)^{b_3(X)}}{(1 - t^{2m-2} q^m)^{b_0(X)} (1 - t^{2m} q^m)^{b_2(X)} (1 - t^{2m+2} q^m)^{b_4(X)}}$$

les $b_i(X)$ étant les nombres de Betti de X . De façon a priori surprenante, le terme de droite dans cette formule apparaît également dans un contexte apparemment bien différent, celui des représentations des superalgèbres de Lie de dimension infinie. En effet, ainsi que l'ont observé Vafa et Witten [4], il coïncide avec ce que donne la formule des caractères appliquée à une certaine représentation d'une certaine superalgèbre de Lie L qui est le produit d'une algèbre d'Heisenberg et de Clifford. Cette remarque a été élucidée indépendamment par Grojnowski [2] et Nakajima [3], qui ont construit une action naturelle, induite par des correspondances algébriques, de la superalgèbre de Lie L sur l'espace $H := \bigoplus_n H_*(X^{[n]})$, somme directe des groupes d'homologie des espaces $X^{[n]}$, munissant H d'une structure d'algèbre vertex.

L'ouvrage de Nakajima est consacré à l'exposition de ces développements récents passionnants, mais en outre il présente en passant de plaisantes vues sur des thèmes reliés de façon directe ou indirecte, comme la théorie géométrique des invariants et l'application moment, les quotients hyper-kähleriens, les singularités simples et leurs résolutions, la correspondance de McKay, ainsi que des excursions vers la théorie de Morse, la géométrie symplectique et les fibrés de Higgs. Écrit dans un style plaisant et agréable, il éveillera la curiosité de chacun en lui donnant envie d'en apprendre plus. Chaudement recommandé.

Références

- [1] L. Göttsche, *The Betti numbers of the Hilbert scheme of points on a smooth projective surface*, Math. Ann. **286** (1990), 193–207.
- [2] I. Grojnowski, *Instantons and affine algebras I : the Hilbert scheme and vertex operators*, Math. Res. Letters **3** (1996), 275–291.
- [3] H. Nakajima, *Heisenberg algebra and Hilbert schemes of points on surfaces*, Ann. of Math. **145** (1997), 379–388.
- [4] C. Vafa, E. Witten, *A strong coupling test of S-duality*, Nucl. Phys. **431** (1994), 3–77.

François Loeser, Université Paris VI

Alterations and resolution of singularities. A research textbook in tribute to Oscar Zariski

édité par H. HAUSER, J. LIPMAN, F. OORT et A. QUIRÓS

Progress in Mathematics **181**. Birkhäuser Verlag, Basel, 2000. 598 p. \$ 109.00. ISBN 3-7643-6178-6

The book¹ contains a collection of articles by participants of the Working Week on Resolution of Singularities held at Obergurgl in Tirol, September 7-14, 1997. It is dedicated to Oscar Zariski, the founder of the school of algebraic geometry in the United States. During his long career as a mathematician he obtained groundbreaking results in algebra and algebraic geometry. Many years of his career were dedicated to the desingularization problem. One of his major achievements were the modernization of the classical theory of blow-ups and the proof of the existence of resolutions of singularities in dimension three.

The main focus of the book is on the substantial recent progress in the desingularization problem resulting from a rather powerful shift of the approach to the whole subject pioneered by J. de Jong.

In order to appreciate this change we need to consider the history of the subject. In geometry we are often dealing with objects which are locally similar at most points but exhibit exceptional behavior at a subset of points of smaller dimension. This subset is called the singular locus. More concretely, let us consider a simple topological

¹ Cette recension est aussi parue dans le *Bulletin of the AMS*.

version of the desingularization problem. Let X be a finite connected polyhedron of dimension d . Its smooth (or nonsingular) points are those which have a small neighborhood isomorphic to a ball. If we assume that X is a manifold without boundary and that every point of X lies on a simplex of dimension d then a desingularization of X is a smooth manifold X' (without boundary) together with a surjective map $f : X' \rightarrow X$ such that f is an isomorphism on an open, everywhere dense subset $U \subset X'$. Using the desingularization (X', f) we can distribute the complexity concentrated at a singular point x in X over the subcomplex in X' containing the preimage $f^{-1}(x)$.

Unfortunately, in such a natural geometric setting a resolution does not exist in general! The simplest counterexample is given by a union of two copies of a cone over a real manifold which is not cobordant to zero. For example, an isolated unresolvable singularity would be a real cone over the real (!) fourfold $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Thus already in dimension 5 we can build a polyhedron which is a smooth manifold away from two singular points and which does not admit a resolution of singularities.

Amazingly enough, resolutions do exist for polyhedra associated with solutions of polynomial equations with coefficients in complex numbers. These, very special, subsets of complex affine (resp. projective) spaces are called algebraic varieties over the complex numbers. Easy examples of highly singular varieties are subvarieties of the affine space \mathbb{A}^n given by generic homogeneous polynomials of degree ≥ 2 in n -variables. In spite of the complexity of the singularities which can appear on algebraic varieties, H. Hironaka, a student of Zariski, proved in the early 1960's the existence of a resolution in the strongest possible form. Precisely, for any projective variety X he constructed a smooth projective variety X' with a surjective (algebraic) map $f : X' \rightarrow X$ such that f is an isomorphism over an open dense subset of X . Here X' can be viewed, topologically, as a smooth even-dimensional manifold. Hironaka's construction satisfies several other properties:

- the map f is an isomorphism outside of the singular points of X ;
- the preimage of the singular set is a union of smooth projective subvarieties of (complex) codimension one with transversal intersections (special smooth submanifolds of codimension two);
- X' and f are obtained through a sequence of standard operations (blow-ups of smooth subvarieties contained in the singular locus).

A blow-up, intuitively, replaces its *center* (an algebraic subvariety) by the set of its normal (complex) directions. In particular, one blow-up resolves the affine cone singularities described in the example above.

The initial proof of Hironaka was quite lengthy and complicated. Hironaka followed the classical path of blowing up the subvariety of most complex singular points. The problem which was encountered by Zariski and others was that up to dimension three the complexity of the singularity still has some geometric flavor, but in higher dimensions it lacks a geometrically intuitive characterization. Subsequently, Hironaka's proof and its logic have been substantially clarified (see, for example, the article of S. Encinas and O. Villamayor in this volume, or the papers of E. Bierstone and P. Millman [2], and M. Spivakovski [5]). The general strategy is to introduce an appropriate function φ with values in a finite subset of a (lexicographically ordered) finitely generated semigroup (vectors with entries \mathbf{N}) and semicontinuous on X . The value of φ at each point reflects the complexity of the singularity. The maxima of φ are smooth inside the singular locus. Blowing up such points reduces the global maximum of φ on X .

This ultimate solution, which works for algebraic varieties over *any* field of characteristic zero, had a tremendous impact on the development of algebraic geometry. In

practice, it substantially simplified computations of geometric invariants of algebraic varieties and provided a solid foundation for the subsequent advances in algebraic geometry. Bluntly put, it is one of the few universally useful mathematical results.

However, so far all attempts to extend the method to varieties defined over fields of finite characteristic or discrete valuation rings of mixed characteristic have failed. The original algorithm by Hironaka and its present modifications lead to loops: blow-ups don't diminish the maxima of φ .

For many years the spectacular success of the method of desingularizations by blow-ups developed by Segre, Zariski and Hironaka blinded, in a sense, other researchers in this field. It was so natural and powerful that other alternatives were abandoned or forgotten. This spell was broken by Johan de Jong in 1995.

Before explaining the approach of de Jong let us recall another important development in algebraic geometry. Independently of Hironaka's resolution of singularities, Deligne, Mumford, Knudsen and others were building the theory of stable degenerations of curves and compactifications of their moduli (natural parameter) spaces. Naturally, one wants to relate the invariants of the degeneration to invariants of the generic fiber. It is a standard trick in algebraic geometry to compute something on a maximally degenerated object and then extend the outcome (by continuity) to the smooth case. But there was no clear understanding of what justified such computations, and, not surprisingly, some of the computations were wrong. In the theory of moduli the main difficulty comes from the presence of automorphisms. Algebraic curves of a given genus degenerate into rather complicated one dimensional objects — combinations of singular curves with multiplicities. How to deal with this? The theory of stable curves and stable degenerations, in general, brought clarity to the subject. For every smooth family of curves $\mathcal{C}^* \rightarrow \Delta^*$ over a punctured disc there exists a unique relative compactification $\mathcal{C} \rightarrow \Delta$ (at least after changing the base by a finite cyclic covering of Δ^*). Moreover, the preimage of $0 = \Delta \setminus \Delta^*$ is a union of algebraic curves with normal crossing and very mild (nodal) singularities such that each smooth rational component of the preimage of 0 intersects the other components in at least two points. Such reducible curves (appearing as limits \mathcal{C}_0) are called semi-stable. Semi-stability is sufficient if one is interested in local properties of degenerations (or "coarse" moduli spaces). However, if one is interested in morphisms between degenerating families (or "fine" moduli spaces) one needs to introduce additional data to eliminate possible automorphisms of semi-stable curves. One approach is to fix a finite number of smooth points on curves and to keep track of these points. A second approach involves level structures. The corresponding moduli spaces are much more rigid. In particular, one has two crucial properties:

- for every family \mathcal{C}^* of stable (punctured) curves over a (dense) Zariski open subset $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}$ of a normal variety \mathcal{B} there exists a generically finite surjective proper morphism $f : \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$ such that the pullback of \mathcal{C}^* extends to a stable family over \mathcal{B}' ;
- a complete family of stable curves (over a normal connected base) is uniquely determined by its restriction to a Zariski open subset of the base.

Most importantly, the theory of stable curves exists for fields of any characteristic. Moreover, in the case of finite characteristic p , all morphisms involved are separable (no p -th roots are required).

De Jong's main observation was that this powerful theory provides a tool for desingularization. First of all, every variety can be fibered in curves. Secondly, using induction on dimension and base change we can assume that the base is smooth and that the locus of nonsmooth stable curves is a divisor with normal crossing. The resulting families of stable pointed curves have relatively simple singularities which

can be treated directly. One refers to this resolution of singularities as resolution by “alterations”. Alterations are not birational but only generically finite!

As it happens, Hironaka’s resolution of singularities is, in a sense, too precise. De Jong’s alterations are sufficient for many theoretical applications (see below).

Outline of the book

Roughly speaking, one can divide the articles of the book into the following categories:

- (1) method of alterations and its applications in algebraic geometry;
- (2) applications of desingularization to differential equations;
- (3) valuation theory;
- (4) some aspects of the Zariski-Hironaka desingularization theory of algebraic varieties;
- (5) historical accounts.

The introductory lecture of J. Lipman sketches of the biography of Zariski and his main contributions in mathematics. Zariski was a witness and active participant of the turbulent years of the Russian Revolution and Civil War between 1917 and 1920. In 1920 he escaped to Italy and several years later he emigrated to the United States.

The subsequent articles are devoted to different aspects of the desingularization problem in algebraic geometry and some other areas. The first half of the book corresponds roughly to lectures given at the Working Week (unfortunately, not all of them were included). It provides a vigorous introduction to basic problems, classical techniques, and recent developments in the field.

The lecture of H. Hauser gives a concise historical account of the desingularization problem, a list of principal contributions to its solution, selected references, and, most importantly, a convenient dictionary of basic specific terminology used in this book.

The lectures of D. Abramovich and F. Oort explain in a transparent and rigorous manner the proof of the alteration theorem of J. de Jong. They include a thorough exposition of the theory of moduli of stable pointed curves and some results related to de Jong’s theorem, in particular several different proofs of the weak version of Hironaka’s theorem in characteristic zero.

They are followed by two lectures by J.-M. Aroca devoted to singularities of differential equations and their resolutions by blow-ups. In the first article he gives a detailed proof of the Seidenberg theorem which says that after finitely many blow-ups one can transform a complex foliation of dimension one on a surface to a foliation with simple singularities. Simple means that the first order part is a matrix with at least one nontrivial eigenvalue. This implies that through every point of a foliated surface there passes a locally holomorphic integral curve. Thus, in some cases, blow-ups suffice to reduce these equations, at least locally, to canonical forms. There are examples (Darboux, Jouanolou) of a codimension one foliation in a threefold without (even formal) integral divisors through a singular point.

The lecture notes by S. Encinas and O. Villamayor on constructive desingularization detail recent improvements of Hironaka’s approach, giving algorithms for the desingularization of an embedded variety.

The article by G. Bodnár and J. Schicho provides a computer algorithm for the desingularization of an affine hypersurface.

The article of V. Cossart contains a refined version of the desingularization of surfaces, following Zariski’s program.

The lecture notes of D. Cox give an introduction to toric varieties, their singularities and toric resolutions. Toric varieties are irreducible algebraic varieties equipped with an action of an algebraic torus (product of several copies of \mathbf{C}^*) with a finite number of orbits. Geometric properties of toric varieties (including their singularities)

admit a purely combinatorial description. This class of varieties is an ideal testing ground for conjectures: it is sufficiently rich to capture many interesting geometric phenomena and at the same time sufficiently rigid to allow explicit constructions.

The article of B. van Geemen and F. Oort considers compactification of the moduli scheme of curves with non-trivial level structures. They show that there exist natural (though singular) compactifications which are not moduli spaces.

The article of T. Geisser discusses several applications of de Jong's theorem. The first (due to O. Gabber) is the non-negativity of local intersection multiplicities in the case of mixed characteristic. Their algebraic definition, in an abstract setting, was given by J.-P. Serre as an Euler characteristic of some explicit derived functor. As intersection multiplicities they ought to be non-negative, but this was not at all clear from the definition. The second application is a theorem about singular cohomology of algebraic varieties (defined by A. Suslin and V. Voevodski). De Jong's theorem implies that singular cohomology (with finite coefficients) for any separated scheme over an algebraically closed field (of characteristic prime to the order of the coefficient ring) coincides with étale cohomology. Further, one obtains a description of Chow groups with finite coefficients as étale cohomology. There are several other applications to relations between different cohomologies and monodromy representations.

R. Goldin and B. Tessler describe a simple toric resolution of a plane curve singularity.

The second article of H. Hauser carefully explains the geometric picture of the resolution of an embedded singular surface.

The short paper by de Jong gives an application of his alteration theorem to Dieudonné modules.

The paper by F.-V. Kuhlmann deals with valuation theory and its connections with logic (model theory for fields).

L. D. Tráng considers M. Spivakovski's approach to surface singularities.

The paper by J. Lipman studies the classical question of a simultaneous resolution of equisingular points. The notion of equisingularity was introduced by Zariski in order to express the intuitive idea that the singular locus admits a natural stratification by algebraic subsets of points with similar complexity of their neighborhoods. Lipman discusses several approaches to the proper definition of this notion.

G. Müller describes resolutions of weighted homogeneous singularities.

F. Pop gives a survey of birational abelian geometry and applications of alterations to the problem of reconstruction of function fields from their Galois groups.

The paper of H. Reitberger recalls several failed attempts to prove resolution of singularities before Hironaka.

The concluding article of M. Vaquié contains the classical treatment of the valuation theory.

Comments

Let us make an informal comment on the idea of alterations. Morally, it is the search for *good* covering varieties. Phrased in this way, the theory of alterations hints at the existence of a relatively small class of algebraic varieties which dominate *all* other algebraic varieties. A prototype in arithmetic is a consequence of a theorem by a (recently deceased) Russian mathematician G. Belyĭ, which was noticed by Yu. Manin: for *any* algebraic curve C defined over a number field there exists a modular curve $X_0(N)$ and an unramified covering $X \rightarrow X_0(N)$ such that X dominates C (in fact, there are even smaller families of curves with this property). A part of Belyĭ's argument (and de Jong's lecture at the conference at Santa Cruz) inspired the approach of the first author and T. Pantev to desingularizations. Precisely, any projective algebraic variety is (after blow-ups of some smooth points) a finite covering of a \mathbb{P}^1 -fibration over a projective space, ramified only in sections (!) of this fibration.

In particular, any isolated singularity is a covering of a neighborhood of a smooth point ramified in a family of smooth hypersurfaces. This example indicates that the method of alterations has some hidden potential which remains to be explored.

Conclusion

As one can see from our description, many of the articles of the book are either expositions of classical results or useful variations of well known topics. In our opinion, the core of the book is the papers discussing different aspects of de Jong's alteration theory and its applications, especially the excellent lecture notes of D. Abramovich and F. Oort. Unfortunately, the presentation of applications of alterations is relatively short. We would have welcomed some comments on the central role of certain classes of singularities and their explicit desingularizations in the minimal model program pursued by Sh. Mori, J. Kollár, and many others (see [4]).

A curious reader will certainly enjoy the multifaceted view of the subject — the emerging internal diversity of the field may provide inspiration to a wide range of mathematicians, from graduate students to experts.

Postscriptum

In the autumn of 1981, the first author visited Zariski at his residence with a message from the Harvard Mathematics Department that Zariski was awarded the Wolf prize. "Too late!" exclaimed the 82-year old mathematician.

References

- [1] G. Belyĭ, *On Galois extensions of a maximal cyclotomic field*, Izv. Acad. Nauk SSSR **43**, 269-276, (1979).
- [2] E. Bierstone, P. Millman, *Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant*, Inventiones Math. **128**, 207-302, (1997).
- [3] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II*, Ann. of Math. (2) **79**, 109-203, (1964); *ibid.* **79**, 205-326, (1964).
- [4] J. Kollár, Sh. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics, 134. Cambridge University Press, Cambridge, (1998).
- [5] M. Spivakovsky, *A solution to Hironaka's polyhedra game*, Arithmetic and geometry, Vol. II, 419-432, Progr. Math., **36**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, (1983).
- [6] O. Zariski, *Collected papers, vol. I-IV*, The MIT Press, Cambridge, (1972-79).

Fedor Bogomolov, New York University
Yuri Tschinkel, Princeton University