

# MATHÉMATIQUES

---

## « Théorème d'Archimède-Gromov » pour l'espace hyperbolique

N. Bergeron (Université Paris-Sud, Orsay)

---

### 0. Quelques définitions

Un plongement 1-lipschitzien d'un espace métrique  $(X, d_X)$  dans un autre  $(Y, d_Y)$  est un plongement pour lequel la métrique intrinsèque  $(d_X)$  de l'espace plongé  $(X)$  est minorée par la restriction de la métrique ambiante  $((d_Y)|_X)$ .

C'est le cas lorsque  $X \subset Y$  et  $d_X$  est la métrique par chemin sur  $X$  obtenue à partir de la métrique  $d_Y$ . Les liens entre ces métriques intéressent les géomètres depuis Gauss et son célèbre *Theorema Egregium*. Plus généralement, la régularité lipschitzienne a pris une grande importance en géométrie notamment sous l'influence des travaux de Gromov (quasi-isométries, influence de la dilatation sur l'homotopie, plongements uniformes de groupes de type fini dans un Hilbert...). Plus simplement, les applications 1-lipschitziennes permettent d'apprécier la notion de courbure  $\leq 0$ . Ainsi, Alexandrov définit la notion d'espace métrique  $X$  à courbure négative par la propriété suivante :

$(K \leq 0)$  : Toute fonction 1-lipschitzienne  $f : \{x_1, x_2, x_3\} \rightarrow X$  avec  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subset \mathbb{R}^2$  tel que  $d(x_1, x_2) + d(x_4, x_3) = d(x_2, x_3)$ , s'étend en une application 1-lipschitzienne  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \rightarrow X$ .

Malgré des hypothèses assez faibles, ces objets sont riches et l'on peut travailler avec eux (cf. [BH]). Signalons l'exercice suivant tiré de [Gr2].

**Exercice.** — Soit  $X$  un espace métrique de courbure négative et soient  $x_1, x_2, x_3$  les sommets d'un triangle géodésique  $\Delta$  dans  $X$ . Alors, toute isométrie  $f : \{y_1, y_2, y_3\} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X$  telle que  $f(y_i) = x_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ , se prolonge en une application 1-lipschitzienne de  $T$ , le triangle de  $\mathbb{R}^2$  de sommets  $y_1, y_2, y_3$ , dans  $X$  envoyant  $T$  sur  $\Delta$ .

Un théorème typique et classique d'extension d'applications lipschitziennes est le théorème suivant (cf. [Ki]).

**Théorème de Kirszbraun.** — Si  $S \subset \mathbb{R}^m$  et  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  est 1-lipschitzienne, alors  $f$  admet une extension 1-lipschitzienne  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Dans un court article [Gr1], Gromov réduit la démonstration du théorème de Kirszbraun à la « décroissance du volume de l'intersection des boules ». Rappelons ce que cela signifie. Considérons des points  $x_i \in \mathbb{R}^n$ , pour  $i =$

$1, \dots, k$ . Soient  $B(x_i, r_i) \subset \mathbb{R}^n$  les boules autour de ces points et de rayons fixés  $r_i \geq 0$ . On introduit

$$V(x_i, r_i) = \text{Vol} \left( \bigcap_i B(x_i, r_i) \right).$$

Suivant M. Gromov, on appelle « théorème d'Archimède-Gromov » le théorème suivant [Gr1].

**« Théorème d'Archimède-Gromov »**

**0.Euc Théorème.** — *Si  $k \leq n + 1$  alors la fonction  $V$  est monotone décroissante en  $d_{ij} = \|x_i - x_j\|$ , i.e. si des  $k$ -uplets  $x_i$  et  $x'_i$  vérifient  $d_{ij} \geq d'_{ij}$ , alors*

$$V(x_i, r_i) \leq V(x'_i, r_i).$$

Selon Gromov [Gr1] : « *It is likely that 0.Euc extends to the hyperbolic space with curvature  $\equiv -1$ .* » Le but de cette courte note est d'adapter la démonstration de Gromov de 0.Euc au cas de l'espace hyperbolique et de confirmer ainsi la remarque ci-dessus. Rappelons que l'espace hyperbolique de dimension  $n$  est l'unique (à isométrie près) variété riemannienne complète, orientée, simplement connexe et de courbure sectionnelle constante égale à  $-1$ . Nous le noterons  $\mathbb{H}^n$ . On se placera dans le modèle de l'hyperboloïde : soit  $\mathbb{R}^{1,n}$  l'espace  $\mathbb{R}^{n+1}$  munit du produit Lorentzien

$$x \circ y = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_{n+1} y_{n+1}.$$

L'espace  $\mathbb{H}^n$  s'identifie au sous-espace

$$\{x \in \mathbb{R}^{1,n} \mid x \circ x = -1 \text{ et } x_1 > 0\}$$

de  $\mathbb{R}^{1,n}$  muni de la métrique  $d$  défini par  $\cosh d(x, y) = -x \circ y$ . L'espace  $\mathbb{H}^n$  est naturellement équipé d'un élément de volume (c'est une variété riemannienne cf. [Rat]) qui dans les coordonnées  $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$  de  $\mathbb{R}^{1,n}$  est donné par

$$\frac{dy_2 \cdots dy_{n+1}}{\sqrt{1 + (y_2^2 + \dots + y_{n+1}^2)}}.$$

Considérons maintenant des points  $x_i \in \mathbb{H}^n$ , pour  $i = 1, \dots, k$ . Soit  $B_h(x_i, r_i) \subset \mathbb{H}^n$  les boules (pour la métrique hyperbolique  $d$ ) autour de ces points et de rayons fixés  $r_i \geq 0$ . On introduit

$$V_h(x_i, r_i) = \text{Vol} \left( \bigcap_i B_h(x_i, r_i) \right),$$

où l'on a prit le volume hyperbolique. Dans la suite, on démontre le « théorème d'Archimède-Gromov » pour l'espace hyperbolique, autrement dit on démontre le théorème suivant.

**0.Hyp Théorème.** — *Si  $k \leq n + 1$  alors la fonction  $V_h$  est monotone décroissante en  $d_{ij} = d(x_i, x_j)$ , i.e. si des  $k$ -uplets  $x_i$  et  $x'_i$  vérifient  $d_{ij} \geq d'_{ij}$ , alors*

$$V_h(x_i, r_i) \leq V_h(x'_i, r_i).$$

### 1. Lemmes

Comme dans la démonstration de [Gr1], la preuve de 0.Hyp résultera d'une version sphérique de 0.Hyp. Le fait que l'espace soit hyperbolique et non euclidien n'intervient que dans la preuve du lemme 1.B ci-dessus. On peut donc en première lecture penser au cas euclidien (la preuve est alors celle de [Gr1]). Considérons la sphère  $S_h^{n-1}(r) \subset \mathbb{H}^n$  de rayon  $r$  autour de l'origine  $u = (1, 0, \dots, 0)$  (dans le modèle de l'hyperboloïde). La métrique riemannienne de  $\mathbb{H}^n$  induit sur chacune de ces sphères une métrique riemannienne et donc une forme volume. Pour cette forme volume, on considère :

$$V_{n-1}(x_i, r_i, r) = \text{Vol}\left(S_h^{n-1}(r) \cap_i B_h(x_i, r_i)\right).$$

**1.a Lemme.** — Si  $k \leq n$  et que des  $k$ -uplets de points  $x_i$  et  $x'_i$  dans  $\mathbb{H}^n$  vérifient  $d(u, x_i) = d(u, x'_i)$  pour  $i = 1, \dots, k$  et  $d_{ij} \geq d'_{ij}$ , alors

$$V_{n-1}(x_i, r_i, r) \leq V_{n-1}(x'_i, r_i, r)$$

pour tout  $r \geq 0$  et  $r_i \geq 0$ .

**1.a' Remarque.** — Le cas le plus important de 1.a est celui où  $d(u, x_i) = d(u, x'_i) = r$  qui donne une version sphérique de 0.Hyp. De plus, puisque la géométrie de  $S_h^{n-1}(r)$  converge vers celle de  $\mathbb{H}^{n-1}$ , la version sphérique de 0.Hyp implique 0.Hyp. Autrement dit le lemme 1.a implique le théorème 0.Hyp. Enfin, remarquons que réciproquement, 1.A découle de la version sphérique de 0.Hyp appliquée à la projection radial  $\bar{x}_i$  de  $x_i$  sur  $S_h^{n-1}(r)$  et au rayon  $\bar{r}_i$  tel que

$$B_h(\bar{x}_i, \bar{r}_i) \cap S_h^{n-1}(r) = B_h(x_i, r_i) \cap S_h^{n-1}(r).$$

Pour montrer 1.a, nous aurons besoin du lemme suivant.

**1.b Lemme.** — Si  $k \leq n$  et que des  $k$ -uplets de points  $x_i$  et  $x'_i$  de  $\mathbb{H}^n$  vérifient  $d(u, x_i) = d(u, x'_i)$  pour  $i = 1, \dots, k$  et  $d_{ij} \geq d'_{ij}$ , alors il existe une famille continue de  $k$ -uplets  $x_i^t$  telle que

- (1)  $x_i^0 = x_i$  et  $x_i^1 = x'_i$  ;
- (2) les fonctions  $t \mapsto d(u, x_i^t)$  sont constantes ;
- (3) les applications  $t \mapsto d_{ij}^t$  sont décroissantes.

### 2. Démonstration de 1.a

Supposons, par récurrence, que 1.a est vrai pour un certain  $k$  et  $n - 1$ . On va démontrer 1.a pour les  $(k + 1)$ -uplets dans  $S_h^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Notons  $x_i$  et  $x'_i$  pour  $i = 0, 1, \dots, k$  deux  $(k + 1)$ -uplets vérifiant les hypothèses du lemme 1.a Par hypothèse de récurrence, on peut supposer que les  $x_i$  sont distincts et que  $x_0 = x'_0$ . D'après la remarque 1.a', on peut supposer que  $d(u, x_i) (= d(u, x'_i)) = r$  pour tout  $i = 0, 1, \dots, k$ . Le lemme 1.b affirme alors qu'il existe une famille continue de  $(k + 1)$ -uplets  $x_i^t$  dans  $S_h^n(r)$  allant de  $x_i$  à  $x'_i$  et telle que  $d_{ij}^t$  soit décroissante en  $t$ . Mais  $k + 1 \leq n + 1$  et donc toute homotopie monotone (pour  $d_{ij}^t$ ) peut être approchée par une autre homotopie monotone (au sens large) et qui, sur tout sous-segment de  $[0, 1]$  de la forme  $[\frac{\nu}{N}, \frac{\nu+1}{N}]$  (pour un certain  $N$  dépendant de la précision de l'approximation), a tous les  $d_{ij}^t$  constants en

$t$  sauf un. (On peut remarquer que, dans la démonstration du lemme 1.B, la condition d'être une matrice symétrique positive de rang  $r$  est une condition ouverte dans l'espace des matrices symétriques de rang  $r$ .) Pour montrer le lemme 1.a, il nous suffit de le montrer pour les  $(k+1)$ -uplets  $x_i^t$  et  $x_i^{t'}$  pour  $t = \frac{\nu}{N}$  et  $t' = \frac{\nu+1}{N}$  et pour  $\nu = 1, \dots, N$ . En particulier, quitte à réindexer les  $x_i$  et les  $x_i'$ , on s'est ramené à prouver le lemme 1.a sous l'hypothèse additionnelle :

$$(1) \quad d(x_i, x_0) = d(x_i', x_0) \text{ pour tout } i = 1, \dots, k.$$

L'intersection à considérer est

$$S_h^n(r) \cap B_h(x_0, r_0) \bigcap_{i=1}^k B_h(x_i, r_i) = \bigcup_{t=0}^{r_0} (S_h^n(r) \cap S_h^n(x_0, t)) \bigcap_{i=1}^k B_h(x_i, r_i).$$

Mais l'intersection  $S_h^n(r) \cap S_h^n(x_0, t)$  est une sphère hyperbolique et l'hypothèse de récurrence implique (sous l'hypothèse (1))

$$\begin{aligned} \text{Vol}_{n-1} \left( (S_h^n(r) \cap S_h^n(x_0, t)) \bigcap_{i=1}^k B_h(x_i, r_i) \right) &\leq \\ &\text{Vol}_{n-1} \left( (S_h^n(r) \cap S_h^n(x_0, t)) \bigcap_{i=1}^k B_h(x_i, r_i) \right). \end{aligned}$$

La démonstration du lemme 1.a découle alors d'une simple intégration par rapport à  $t$ .

### 3. Démonstration de 1.b

Soient  $x_i$  et  $x_i'$  deux  $k$ -uplets comme dans l'énoncé du lemme 1.b Notons  $\rho_i = d(u, x_i) = d(u, x_i')$ . À chaque point  $x_i$  (resp.  $x_i'$ ), on associe un vecteur  $v_i \in \mathbb{R}^n = \{0\} \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{1,n}$  ( resp.  $v_i' \in \mathbb{R}^n$ ) de norme (euclidienne) 1 tel que la courbe (géodésique)

$$\alpha_i(t) = \cosh(t)u + \sinh(t)v_i$$

$$\text{(resp. } \alpha_i'(t) = \cosh(t)u + \sinh(t)v_i')$$

dans  $\mathbb{H}^n$  passe par  $u$  et  $x_i$  (resp.  $x_i'$ ). En particulier, on a  $x_i = \alpha_i(\rho_i)$  (resp.  $x_i' = \alpha_i'(\rho_i)$ ). On a donc :

$$\cosh(d_{ij}) = \cosh(\rho_i) \cosh(\rho_j) - \sinh(\rho_i) \sinh(\rho_j) < v_i, v_j >$$

et

$$\cosh(d'_{ij}) = \cosh(\rho_i) \cosh(\rho_j) - \sinh(\rho_i) \sinh(\rho_j) < v_i', v_j' >,$$

où  $<, >$  désigne le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^n$ . On va avoir besoin du fait suivant qui découle trivialement du théorème de Sylvester.

**Fait.** — Soit  $k \leq n$ . Soit  $v_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) un  $k$ -uplet de vecteurs de norme 1 dans  $\mathbb{R}^n$ . Alors, la matrice  $(\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j}$  est une matrice symétrique  $k \times k$ , semi-définie positive et avec que des 1 sur la diagonale. Réciproquement, si  $M$  est une matrice symétrique  $k \times k$ , semi-définie positive et avec que des 1 sur la diagonale, alors il existe  $k$  vecteurs  $v_1, \dots, v_k$  de  $\mathbb{R}^n$  de norme 1 tels que  $M = (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j}$ .

Les matrices  $(1-t)(\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j} + t(\langle v'_i, v'_j \rangle)_{i,j}$  sont symétriques, semi-définies positives et avec que des 1 sur la diagonale. Donc d'après le fait précédent, cette famille représente un chemin  $v_i^t$  dans l'espace des  $k$ -uplets de vecteurs de norme 1 dans  $\mathbb{R}^n$ . On en déduit l'existence d'une famille continue  $x_i^t = \cosh(\rho_i)u + \sinh(\rho_i)v_i^t$  de  $k$ -uplets de points dans  $\mathbb{H}^n$  telle que :

- (1)  $x_i^0 = x_i$  et  $x_i^1 = x'_i$ ;
- (2) l'application  $t \mapsto d(u, x_i^t)$  est constante égale à  $\rho_i$ ;
- (3) l'application  $t \mapsto d(x_i^t, x_j^t)$  est décroissante.

Ce qui achève la démonstration de 1.B.

#### 4. Corollaires

Comme dans [Gr1], on peut tirer les conséquences suivantes du théorème 0.Hyp.

**4.a. Lemme d'intersection de Kirszbraun hyperbolique.** — Si  $x_i$  et  $x'_i$  sont deux  $k$ -uplets de  $\mathbb{H}^n$  (maintenant pour un  $k$  quelconque) qui vérifient  $d_{ij} \geq d'_{ij}$ , alors

$$\bigcap_i B_h(x_i, r_i) \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_i B_h(x'_i, r_i) \neq \emptyset.$$

*Démonstration.* On applique 0.Hyp aux boules autour de  $x_i$  et  $x'_i$  dans l'espace  $\mathbb{H}^m \supset \mathbb{H}^n$ , pour  $m = \max(n, k-1)$ .

**4.b. Théorème de Kirszbraun hyperbolique.** — Si  $S \subset \mathbb{H}^m$  et  $f : S \rightarrow \mathbb{H}^n$  est 1-lipschitzienne, alors  $f$  admet une extension 1-lipschitzienne  $g : \mathbb{H}^m \rightarrow \mathbb{H}^n$ .

*Démonstration.* En appliquant le lemme de Zorn, on obtient une extension maximale 1-lipschitzienne  $g : T \rightarrow \mathbb{H}^n$  de  $f$ . Soit  $\xi \in \mathbb{H}^m - T$ . Puisque  $g$  est maximale, il n'existe pas d'élément  $\eta \in \mathbb{H}^n$  tel que

$$|\eta - g(x)| \leq |\xi - x| \text{ pour tout } x \in T.$$

Autrement dit,

$$\bigcap_{x \in T} B_h(g(x), |x - \xi|) = \emptyset.$$

Comme les boules de l'espace hyperbolique sont compactes, il existe un sous-ensemble fini  $F \subset T$  tel que

$$\bigcap_{x \in F} B_h(g(x), |x - \xi|) = \emptyset.$$

Mais ceci est absurde d'après 4.a. Donc  $T = \mathbb{H}^m$  et le théorème est démontré.

## 5. Commentaires

Selon Gromov [Gr1], l'auteur de 0.Euc pourrait-être Archimède, bien sûr un tel énoncé est absent de ses œuvres. Mais, comme me l'a fait remarqué Thomé, Archimède aurait en tout cas facilement pu obtenir une preuve expérimentale de 0.Euc en jouant avec des balles (un peu tronquées) lors de son célèbre bain. La preuve de 0.Hyp que l'on a proposée est en tout point identique à celle de Gromov de 0.Euc, la seule (et très légère) modification est notre preuve du lemme 1.b qui permet le passage au cas hyperbolique. Les corollaires 4.a et 4.b étaient déjà connus (cf. [Va]). De plus, dans le contexte bien plus général des espaces singuliers, Lang et Schroeder [LS] ont étendus le théorème de Kirszbraum dans le but d'étudier les quasi-plats dans les espaces singuliers.

## Références

- [BH] Bridson, M. and Haefliger, A., *Metric spaces of non-positive curvature*, Springer-Verlag, 1999.
- [Gr1] Gromov, M., Monotonicity of the volume of intersections of balls, *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Math. 1267, Springer, New York, 1987.
- [Gr2] Gromov, M., *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Progress in Mathematics, 152, *Birkhauser*, 1999.
- [Ki] Kirszbraum, M. D., Über die zusammenziehende und lipschitzsche Transformationen, *Fund. Math.* **22** (1934), 77-108.
- [LS] Lang, U. and Schroeder, V., Kirszbraum's theorem and metric spaces of bounded curvature, *Geometric and Functional Analysis*, 7 :3 (1997), 535-560.
- [Rat] Ratcliffe, J. G., *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer-Verlag, 1994.
- [Va] Valentine, F. A., Contractions in non-Euclidean spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* **50** (1944), 710-713.

# L'effet papillon n'existe plus !

Raoul Robert

(CNRS UMR 5582, Institut Fourier, Saint Martin d'Hères)

---

Ce texte correspond à une conférence faite aux journées Rhône-Alpes de L'Académie des Sciences en novembre 2000.

Nous savons tous qu'il est difficile de prévoir le temps. On peut avancer plusieurs explications possibles de ce fait.

(1) C'est parce que notre compréhension des phénomènes météorologiques et nos modèles de circulation atmosphérique sont imparfaits.

(2) Nos modèles sont satisfaisants mais leur mise en oeuvre effective est encore trop rudimentaire : réseau d'observation trop lâche, puissance de calcul insuffisante...

(3) Il y a un obstacle théorique fondamental : le système dynamique qui régit cette évolution est impropre à une prédiction au delà d'un temps court.

Depuis les années soixante c'est l'explication 3) qui l'a emporté sous le nom « d'effet papillon ». Je vais simplement livrer ici les quelques réflexions qui m'ont amené à penser différemment.

## I. Introduction

### *La naissance de l'effet papillon*

En 1962, alors qu'il étudiait un modèle extrêmement simplifié de convection atmosphérique, le météorologiste E.N. Lorenz découvrit, grâce à la simulation numérique, qu'un système très simple de trois équations différentielles avec une non linéarité quadratique peut avoir des solutions surprenantes, présentant de l'instabilité exponentielle par rapport aux conditions initiales et un comportement à long terme non périodique où les trajectoires s'enroulent autour d'un ensemble à géométrie compliquée. Lorenz s'attaqua ensuite au problème de la circulation atmosphérique à grande échelle (i.e. vu de loin ; l'atmosphère apparaît alors comme une mince pellicule de gaz entourant la sphère terrestre). Il considéra qu'il s'agissait en première approximation d'étudier le mouvement d'un fluide parfait incompressible à deux dimensions (parfait signifie sans viscosité ; en effet à grande échelle la viscosité moléculaire du gaz joue un rôle tout à fait négligeable). Ici encore, pour simplifier les calculs, il utilisa une approximation grossière ne comportant qu'un petit nombre de degrés de liberté (quelques dizaines). À nouveau Lorenz retrouva sur ce système le phénomène de sensibilité exponentielle par rapport aux données initiales. Il pensa alors que si l'avenir était aussi difficile à prédire avec un petit nombre de degrés de liberté, la situation ne pourrait qu'empirer avec un modèle plus réaliste de l'atmosphère, dont le nombre de degrés de liberté serait alors véritablement gigantesque. Remarquons ici que le modèle du fluide parfait incompressible est

une idéalisation mathématique qui comporte un nombre infini de degrés de libertés (la réalité physique que ce modèle représente en a elle un nombre très grand mais fini). Lorenz retrouvait sur ces exemples le phénomène de sensibilité exponentielle par rapport à la condition initiale, phénomène déjà constaté par Poincaré sur le problème des trois corps et Hadamard sur les géodésiques des surfaces à courbure négative. Il n'y avait là rien de fondamentalement neuf, son apport original fut la conséquence qu'il en tira quant à l'imprédictibilité des écoulements atmosphériques.

Un contradicteur de Lorenz lui fit remarquer que si le mouvement de l'atmosphère était aussi instable qu'il le prétendait, il suffirait d'un battement d'aile d'une mouette pour changer irrémédiablement son évolution. Lorenz soutint que c'était bien le cas et que de plus ce changement se produirait en deux semaines environ. De cette polémique (la mouette se métamorphosant au passage en papillon) naquit « l'effet papillon » : à savoir qu'un événement impondérable comme le battement des ailes d'un papillon en un point du globe est une perturbation suffisante pour déclencher deux semaines plus tard une tornade en un point éloigné. Evidemment, comme on ne peut connaître l'état de tous les papillons à un instant donné, cela implique que la prédiction de l'état de l'atmosphère au delà de quinze jours est impossible.

Peu de temps après, en 1966, paraissait aux Annales de l'Institut Fourier un article de V.I. Arnold intitulé « Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits ». Dans cet article, Arnold expose une vision géométrique du mouvement du fluide parfait : nonobstant les avatars liés à la dimension infinie du problème, on peut voir le mouvement du fluide parfait comme un flot géodésique sur une variété riemannienne et le fait que l'espace des configurations soit à peu de choses près un groupe de Lie permet à Arnold de calculer la courbure sectionnelle dans des plans, le calcul peut être complètement explicite dans le cas d'écoulements sur le tore de dimension deux, et on s'aperçoit alors qu'il y a « beaucoup » de sections qui donnent une courbure strictement négative. Un lien est donc établi entre le mouvement du fluide parfait et les géodésiques instables étudiées par Hadamard à la fin du siècle dernier. Arnold en déduit que l'écoulement atmosphérique, qui est en première approximation l'écoulement d'un fluide parfait incompressible bidimensionnel, est fondamentalement instable et présente la propriété de sensibilité exponentielle par rapport aux conditions initiales. Les considérations d'Arnold semblent donc conforter l'image suggérée par Lorenz. Et l'effet papillon connaît un beau succès médiatique. . .

### ***Le doute s'installe***

Les décennies suivantes ont été marquées par des efforts considérables pour améliorer la prévision météorologique. Les météorologistes ont notamment étudié comment, dans leurs modèles, se propageait une erreur initiale; ils ont constaté que, passé une courte période de un à deux jours (période pendant laquelle le système a un comportement voisin d'un système linéaire), la croissance des perturbations n'est pas exponentielle comme l'avait prédit Lorenz mais grosso modo proportionnelle au temps [5]. Ceci amène à une réflexion critique sur l'image du papillon employée par Lorenz : à savoir qu'une petite

perturbation locale de l'atmosphère, va de proche en proche, par interaction non linéaire, affecter des échelles spatiales de plus en plus grandes pour finalement provoquer des changements à grande échelle. Cette image a été abondamment reprise, tant par des journalistes que par des scientifiques. Mais ce processus existe-il vraiment ?

### *Le retour de Boltzmann*

Un autre fait s'est progressivement imposé durant ces dernières décennies, à savoir la reconnaissance d'une différence fondamentale entre les écoulements turbulents à deux ou trois dimensions. À deux dimensions les écoulements forment spontanément des structures à grande échelle que l'on nomme structures cohérentes (comme les grands tourbillons cycloniques ou anticycloniques qui parcourent notre atmosphère terrestre). Et ceci bien qu'à petite échelle l'écoulement puisse apparaître comme tout à fait « chaotique ». L'apparition de telles structures et leur persistance au sein d'un environnement pleinement turbulent a longtemps intrigué les géophysiciens. Comme l'a suggéré Onsager en 1949 [8] l'explication de ce phénomène est de nature statistique, pour le comprendre il faut étendre au fluide parfait la mécanique statistique de Boltzmann. Le propre des systèmes dynamiques qui modélisent la circulation atmosphérique est d'avoir un nombre considérable de degrés de liberté (comparable au nombre d'Avogadro). Il semble aller de soi pour Lorenz et ceux qui ont repris l'image du papillon à leur compte que ce qui est valable pour trois degrés de liberté le sera a fortiori pour un grand nombre car la situation n'en sera que plus compliquée et donc plus imprédictible. La mécanique statistique suggère, elle, une vision différente. Les systèmes à un très grand nombre de degrés de liberté sont assez semblables à un gaz formé de beaucoup de molécules et pour de tels systèmes la mécanique statistique distingue deux types de quantités observables : les observables microscopiques (comme par exemple les trajectoires individuelles des molécules) et les observables macroscopiques qui s'expriment par des moyennes statistiques, comme la densité ou la pression. Les observables microscopiques sont imprédictibles alors qu'au contraire les observables macroscopiques sont généralement prédictibles. Dans le cadre de cette analogie, prédire le mouvement à grande échelle des masses d'air est de nature macroscopique alors que la description locale du chaos turbulent est de nature microscopique. Notre papillon qui va sans doute modifier localement le chaos turbulent à petite échelle, peut-il avoir un effet sensible sur l'objet macroscopique qu'est une structure cohérente ?

En fait, une étude détaillée de la formation des structures cohérentes montre que c'est justement le chaos turbulent à petite échelle qui crée le mélange local de la fonction tourbillon. C'est là le mécanisme générateur de ces structures organisées, mécanisme tout à fait analogue à la relaxation rapide imaginée par les astrophysiciens pour expliquer la formation des galaxies [4]. Or ce chaos turbulent à petite échelle est, comme nous essayerons de le montrer, bien décrit par les calculs d'Arnold. Pour résumer, c'est l'imprédictibilité du mouvement à petite échelle qui va assurer la convergence du système vers des structures organisées et donc le rendre éventuellement prédictible à grande échelle sur des temps longs.

Nous donnons dans les pages qui suivent quelques considérations théoriques qui, alliées à des résultats de simulations numériques, nous paraissent de nature à soutenir ce point de vue ainsi qu'à en cerner les limites.

## II. Qu'est-ce que prédire le mouvement d'un fluide ?

La turbulence, mouvement complexe et désordonné d'un fluide, apparaît dans presque tous les écoulements que l'on observe à l'échelle humaine. C'est le cas de tous les écoulements où l'effet non linéaire domine le frottement visqueux (quand le frottement visqueux prédomine l'écoulement prend un aspect plus ordonné, on dit qu'il est laminaire). Nous nous intéressons ici aux écoulements atmosphériques dans lesquels le frottement visqueux est tout à fait négligeable, et qui sont donc turbulents. Nous allons nous intéresser à une classe particulière d'écoulements turbulents, ceux à deux dimensions, c'est-à-dire quand l'écoulement a lieu dans un plan ou sur une surface. Ceci n'est pas une pure vue de l'esprit mais une approximation souvent utilisée en pratique lorsque le fluide est confiné dans une couche de faible épaisseur. Ainsi les mouvements de l'atmosphère ou des océans, lorsque l'épaisseur des couches fluides est négligeable par rapport aux échelles horizontales considérées, peuvent être considérés comme bidimensionnels. Lorsque la vitesse des particules fluides reste faible par rapport à la vitesse de propagation du son, on peut faire de plus l'approximation que l'écoulement est incompressible (c'est le cas pour l'océan ou l'atmosphère). la dynamique de l'écoulement est alors entièrement déterminée par la vorticité, qui est le rotationnel de la vitesse. L'intérêt de la vorticité provient du fait qu'elle est inchang e pour chaque particule de fluide au cours de son mouvement.

Pour la suite nous limiterons donc notre étude au cas d'un fluide parfait incompressible à deux dimensions occupant un domaine plan  $\Omega$ . Sous leur forme la plus usuelle, les équations du mouvement ( quations d'Euler) s'écrivent :

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p, \text{ sur } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

où  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  est le champ de vitesse du fluide,  $p(t, \mathbf{x})$  sa pression.   ces équations, il faut rajouter une condition limite pour la vitesse au bord du domaine  $\partial\Omega : \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  ( $\mathbf{n}$  désigne le vecteur normal unitaire sortant au bord du domaine). Et pour déterminer complètement le mouvement du fluide il nous faudra en outre fixer une condition initiale  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ .

Il est usuel et commode de prendre le rotationnel de l'équation ci-dessus afin d'éliminer la pression qui est une fonction inconnue. En notant  $\omega = \operatorname{rot} \mathbf{u}$  la fonction (scalaire) tourbillon, ou vorticité de l'écoulement, on obtient le nouveau système :

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{u} = \omega, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Il se présente sous la forme d'une équation de transport (sur la première ligne) couplée avec un système elliptique (sur la deuxième ligne). On peut montrer que le mouvement est parfaitement déterminé si l'on se donne comme condition initiale une fonction tourbillon mesurable bornée arbitraire  $\omega_0(\mathbf{x})$  [11].

Décrire ainsi le mouvement d'un fluide au moyen du champ de vitesse  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  constitue ce qu'on appelle une description eulérienne. Mais on peut vouloir aussi décrire le mouvement du fluide en suivant les trajectoires de toutes ses particules. On adopte alors une description lagrangienne. Une telle description correspond à la détermination d'une application  $\varphi$  de  $\mathbb{R} \times \bar{\Omega}$  dans  $\bar{\Omega}$  telle que  $\varphi(t, \mathbf{x})$  représente la position à l'instant  $t$  de la particule qui était en  $\mathbf{x}$  à l'instant initial  $t = 0$ .

Le lien entre ces deux descriptions est évidemment donné par l'équation différentielle :

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \mathbf{u}(t, \varphi(t, \mathbf{x})), \varphi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}. \end{array} \right.$$

Dans le cas où le flot est régulier, on vérifie facilement que, pour tout  $t$  fixé, les applications  $\mathbf{x} \rightarrow \varphi(t, \mathbf{x})$  sont des difféomorphismes de  $\bar{\Omega}$  qui préservent la surface et l'orientation.

Il est clair que si l'on suppose  $\varphi(t, \mathbf{x})$  exactement connu, le champ de vitesse  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  est alors connu, il suffit de dériver  $\varphi$  par rapport au temps. Par contre, si nous supposons  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  connu, pour obtenir  $\varphi$ , il faut intégrer l'équation différentielle (III). Il se peut alors que la tâche s'avère impossible, en pratique, au delà d'un temps court, si le système dynamique (III) est sensible par rapport à la condition initiale. Comme c'est précisément très généralement le cas en mécanique des fluides, on voit qu'il ne revient pas du tout au même de parler de prédiction en terme de  $\varphi$  ou de  $\mathbf{u}$ .

En ce qui concerne la météorologie où l'océanographie, prédire, en pratique, ce n'est pas prédire  $\varphi$  mais  $\mathbf{u}$ . La distinction est cruciale comme on va le voir. En effet le météorologiste veut en premier lieu savoir quelle sera la vitesse et la force du vent, la pression... en un lieu donné à un instant donné, et pas savoir d'où viennent les molécules qui constituent le vent (bien que cette question ne soit pas non plus dénuée d'intérêt).

### III. Le calcul d'Arnold et l'imprédictibilité du flot lagrangien

Commençons par résumer brièvement la contribution d'Arnold, renvoyant à [1, 2] pour un exposé détaillé. Tout comme Arnold, afin d'éviter les sérieuses difficultés d'analyse liées à la dimension infinie du problème, nous procéderons de façon purement formelle.

On a vu que donner une description lagrangienne du mouvement, c'était déterminer la fonction  $\varphi(t, \mathbf{x})$ , chaque fonction  $\varphi_t(\mathbf{x}) = \varphi(t, \mathbf{x})$  étant un difféomorphisme de  $\bar{\Omega}$  préservant la mesure de surface et l'orientation (i.e. un élément de  $SDiff(\bar{\Omega})$ ).

Autrement dit, un mouvement fluide est une courbe  $t \rightarrow \varphi_t$  tracée sur la variété  $M = SDiff(\bar{\Omega})$  (l'espace des configurations du système).

À l'instant  $t$ , la relation  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(t, \varphi(t, \mathbf{x}))$  indique que le champ de vitesse  $\mathbf{u}(t, \varphi_t(\mathbf{x}))$  appartient à l'espace tangent en  $\varphi_t$  à  $M$ . L'espace tangent en  $\varphi$  à  $M$  est constitué des champs de vitesse  $\mathbf{v}(\varphi(\mathbf{x}))$ , où  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  est un champ de vitesse sur  $\bar{\Omega}$  tel que  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  et  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Cet espace est naturellement muni d'une norme associée à l'énergie cinétique  $\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x}$ , et donc  $M$  est munie d'une structure riemannienne. Il est facile de vérifier que les mouvements du fluide parfait correspondent aux courbes  $\varphi_t$  tracées sur  $M$  qui sont des points critiques de l'intégrale d'action :

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x}$$

pour tous  $t_1 < t_2$  (sous les contraintes  $\varphi(t_1, \cdot) = \varphi_1$ ,  $\varphi(t_2, \cdot) = \varphi_2$ ). En d'autres termes, les mouvements du fluide parfait sont les géodésiques de la variété riemannienne  $M$ .

L'intérêt de ce cadre géométrique est de ramener, au moins formellement, les mouvements du fluide parfait à des choses bien connues. En effet, on sait que l'étude de la stabilité des géodésiques de la variété s'exprime en terme de courbure au moyen de l'équation de Jacobi [2]. On établit notamment que si  $\varphi_t$  est une géodésique partant de  $\varphi_0$ , de vecteur vitesse  $\mathbf{v}(t)$  à l'instant  $t$  (supposé de norme égale à 1), et si la courbure sectionnelle de la variété dans tous les plans passant par  $\mathbf{v}(t)$  est inférieure ou égale à  $-c$  ( $c < 0$ ), une perturbation de la condition initiale va croître au moins comme  $\exp(ct)$  :  $d(\varphi_t, \Phi_t) \geq d(\varphi_0, \Phi_0) \exp(ct)$  où  $\Phi_0$  désigne la condition initiale perturbée et  $d$  la distance géodésique sur la variété. De plus si la courbure en tout point et dans toutes les sections est inférieure ou égale à  $-c$ , et si la variété  $M$  est compacte, alors le « flot géodésique », c'est à dire le groupe à un paramètre de transformations  $(\varphi_0, v(0)) \rightarrow (\varphi_t, v(t))$  est mélangeant au sens usuel de la théorie ergodique. Arnold a pu mener à bien le calcul de la courbure sectionnelle dans le cas des écoulements sur le tore à deux dimensions, il a montré que la courbure est négative pour « la plupart » des sections, donnant ainsi une vision géométrique éclairante de l'instabilité des flots lagrangiens. Ajoutons une dernière remarque importante, le calcul d'Arnold fait apparaître que l'instabilité exponentielle est d'autant plus grande que les structures spatiales concernées sont petites.

#### IV. Les structures cohérentes de la turbulence bidimensionnelle

Dans les écoulements turbulents bidimensionnels on observe un phénomène tout à fait remarquable : l'écoulement a tendance à s'organiser en grandes structures tourbillonnaires cependant qu'à petite échelle le mouvement est très chaotique (disons turbulent). Ces structures, qui peuvent être formées d'un seul tourbillon, de deux tourbillons accolés tournant en sens inverse, de trois...sont bien connues et quotidiennement observées dans l'atmosphère terrestre ou elles s'étendent généralement sur plusieurs milliers de kilomètres : on les nomme structures cohérentes. On peut voir ces grandes structures cycloniques ou anti-cycloniques, que les nuages permettent de visualiser, sur les images prises par les satellites. La grande tache rouge de Jupiter, gigantesque tourbillon d'environ

20 000 km de diamètre, formé dans une mince couche fluide à la surface de la planète, est un exemple particulièrement spectaculaire d'une telle structure. La formation de ces structures cohérentes est une caractéristique des écoulements à deux dimensions. Grâce aux simulations numériques, le processus conduisant à l'apparition des structures cohérentes est assez bien décrit. On voit sur les équations (II) que la fonction tourbillon est transportée par le champ de vitesse  $\mathbf{u}$ . La déformation du champ de vitesse va donc étirer puis replier la vorticité en des filaments de plus en plus fins.

Ce processus va produire une cascade (un transfert) de l'enstrophie ( $\int_{\Omega} \omega^2 d\mathbf{x}$ ) vers les petites échelles spatiales, en même temps que l'énergie va se concentrer dans les grandes échelles, donnant naissance aux structures cohérentes. Ce processus est tout  a fait analogue à celui de la relaxation rapide décrit par Hénon, King et Lynden-Bell pour expliquer la formation des galaxies [4]. Il apparaît clairement que la convergence du flot à grande échelle vers une structure organisée est intimement liée aux oscillations « chaotiques » de la vorticité à petite échelle. Comme la vorticité est transportée par le flot lagrangien  $\varphi(t, \mathbf{x})$ , l'émergence des structures cohérentes semble donc liée au caractère « chaotique » de ce flot. Bien qu'en apparence paradoxale, cette affirmation peut se comprendre facilement à l'aide d'un modèle très simple.

### *Un modèle simplifi e*

Supposons donn e un flot lagrangien  $\varphi(t, \mathbf{x})$  sur  $\overline{\Omega}$ , tel que pour tout  $t$ ,  $\varphi_t$  soit un homéomorphisme de  $\overline{\Omega}$  qui conserve la mesure de surface et supposons que  $\varphi_t$  soit mélangeant au sens usuel de la théorie ergodique, *i.e.*, :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi_t^{-1}(A) \cap B| = |A| \cdot |B|,$$

pour tous  $A, B$  sous ensembles mesurables de  $\overline{\Omega}$ ,  $|A|$  désignant la surface de  $A$ .  $\varphi_t$  étant fix e, on définit un système dynamique de la façon suivante. On se donne comme condition initiale une fonction mesurable bornée quelconque  $\omega_0(\mathbf{x})$ , et on définit :  $\omega(t, \mathbf{x}) = \omega(\varphi_t^{-1}(\mathbf{x}))$  (*i.e.*  $\omega$  est simplement transportée par  $\varphi_t$ ).  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  est ensuite défini par :

$$(IV) \quad \text{rot } \mathbf{u} = \omega, \text{ div } \mathbf{u} = 0, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

Notre système est une sorte d'équation d'Euler alt eree, où on a cass e la relation entre  $\varphi$  et  $\mathbf{u}$ , mais qui conserve la propriéte de faire osciller la vorticité dans des échelles spatiales de plus en plus petites.

### *Propriétes du modèle*

Notons  $\overline{\omega}_0 = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \omega_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ , la valeur moyenne de la vorticité initiale. à cause du caractère mélangeant de  $\varphi_t$ , on vérifie facilement que :

$$\omega(t, \mathbf{x}) \xrightarrow{(t \rightarrow \infty)} \overline{\omega}_0, \text{ au sens faible,}$$

i.e.  $\int_{\Omega} \omega(t, \mathbf{x}) \theta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \longrightarrow \int_{\Omega} \bar{\omega}_0 \theta(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  pour toute fonction continue  $\theta$  sur  $\bar{\Omega}$ . Il découle alors de la relation (IV), par un argument standard de compacité, que :

$$\int_{\Omega} |\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) - \bar{\mathbf{u}}_0(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \longrightarrow 0, \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

où  $\bar{\mathbf{u}}_0$  est défini par  $\text{rot } \bar{\mathbf{u}}_0 = \bar{\omega}_0$ ,  $\text{div } \bar{\mathbf{u}}_0 = 0$ ,  $\bar{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\partial\Omega$ .

On voit donc sur ce modèle que le comportement mélangeant de  $\varphi$  implique la convergence forte en énergie de  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  vers  $\bar{\mathbf{u}}_0$ . Si, par exemple,  $\Omega$  est un disque, lorsque  $t \rightarrow \infty$ , le mouvement va s'organiser en un mouvement de rotation solide. Bien que plus complexe, la situation est similaire pour les équations d'Euler. En effet, on obtient les équations d'Euler en rajoutant la relation  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(t, \varphi(t, \mathbf{x}))$  dans le modèle ci-dessus. Bien sûr le flot  $\varphi(t, \mathbf{x})$  ne peut plus alors être mélangeant, à cause de la conservation de l'énergie ; il conserve néanmoins un caractère « chaotique » comme le montrent les calculs d'Arnold et les simulations numériques.

Ainsi l'apparition des structures cohérentes est liée au caractère chaotique du flot lagrangien. On peut dire que, pour les équations d'Euler comme pour le modèle simplifié, c'est l'imprédictibilité du flot lagrangien qui rend le champ de vitesses (éventuellement) prédictible sur des temps longs.

En conclusion, les considérations ci-dessus suggèrent que, pour la turbulence bidimensionnelle, le phénomène de sensibilité par rapport à la condition initiale doit disparaître et la prédiction à long terme devenir possible si l'on s'en tient à une description du mouvement au moyen du champ de vitesse  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ . C'est cette hypothèse que nous examinerons dans le paragraphe suivant.

### **Remarque**

Le mécanisme de la relaxation rapide décrit ci-dessus est typiquement lié à la dimension infinie du problème. En effet, la vorticité oscillé à des échelles spatiales de plus en plus petites, ce qui implique un nombre infini de degrés de liberté. Il faut donc s'attendre, lorsque pour les nécessités de la simulation numérique, on va approximer notre système par un système tronqué à  $D$  degrés de liberté, à observer des comportements différents suivant que  $D$  est petit ou grand. Ce point sera étudié au paragraphe suivant.

## **V. Simulations numériques**

Nous avons choisi de tester les considérations théoriques des paragraphes précédents sur un exemple classique : la formation d'une structure cohérente tripolaire. De telles structures, form es de trois tourbillons accolés, un tourbillon central tournant dans un sens et deux tourbillons latéraux tournant en sens opposé, le tout animé d'un mouvement de rotation uniforme, peuvent être observ es dans l'atmosphère et les océans ou être obtenues en laboratoire ou même encore plus simplement par simulation numérique [3]. Nous avons choisi cet exemple à dessein car c'est à la fois une structure cohérente bien identifiable mais qui peut facilement, en faisant varier la condition initiale, se casser

en deux dipôles, ce qui permet, en partant d'une condition initiale bien choisie, d'obtenir des effets intéressants du point de vue de l'étude de la sensibilité.

### *Description des expériences de simulation*

Comme il est usuel de le faire, on va approximer l'écoulement du fluide parfait dans tout l'espace en considérant une vorticité initiale localis  e dans une petite zone d'un (comparativement) grand domaine périodique.  $\Omega = ]0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[$ . La fonction vorticité initiale est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \omega_0(\mathbf{x}) &= a_1 \text{ dans l'ellipse} && \frac{(x_1 - \pi)^2}{r_0^2} + \frac{(x_2 - \pi)^2}{r_1^2} \leq 1, \\ \omega_0(\mathbf{x}) &= a_2 \text{ dans la couronne} && r_2^2 \leq (x_1 - \pi)^2 + (x_2 - \pi)^2 \leq r_3^2, \\ \omega_0(\mathbf{x}) &= 0 \text{ ailleurs.} \end{aligned}$$

   cause de la périodicité de l'écoulement dans les deux directions, la valeur moyenne de  $\omega_0$  sur  $\Omega$  doit être nulle, de sorte que les paramètres  $a_1, a_2, r_0, r_1, r_2, r_3$  doivent vérifier  $a_1 r_0 r_1 = a_2 (r_2^2 - r_3^2)$ . Dans ce qui suit nous prendrons :  $a_2 = 2\pi, r_0 = 0.5, r_1 = 0.3, r_2 = 0.65, r_3$  *variable*. Ainsi  $\omega_0$  est une tache elliptique de vorticité négative entour  e d'une couronne de vorticité positive.

Pour les besoins du calcul numérique, on introduit une petite viscosité  $\nu_e$ , et on résout numériquement d'une façon classique les équations de Navier-Stokes avec des conditions de périodicité au bord (les d  riv  es spatiales sont   valu  es par une méthode pseudo-spectrale, et la discrétisation en temps utilise un schéma d'Adams-Bashforth d'ordre trois).

### *Première expérience, formation d'une structure tripolaire*

Cette première expérience consiste à observer la formation de la structure tripolaire.

– *Paramètres numériques.*

- (i) Résolution spatiale : la plus grande résolution possible est bien sur souhaitable pour pouvoir atteindre des viscosités faibles et traiter correctement la condition initiale discontinue. On prendra une grille de  $256 \times 256$  points, ce qui nous permettra d'approcher la limite inertielle avec un temps de calcul raisonnable.
- (ii) viscosité : on prendra  $\nu_e = 1/2000$ , ce qui est la plus petite viscosité compatible avec notre choix de résolution.
- (iii) Pas de temps :  $\Delta t = 0.001$ .

– *Le résultat.*

On prend  $r_3 = 1$ . Le flot simulé est décrit sur la *figure 1* : l'évolution du flot est repr  sent  e par les lignes de niveaux de la fonction tourbillon    différents instants. La condition initiale n'étant pas une solution stationnaire des équations, elle évolue immédiatement en un mouvement turbulent qui mélange les niveaux de vorticité  $0, a_1, a_2$ . Après ce processus de mélange le système converge (en quelques dizaines de temps de retournement) vers un état quasi-stationnaire formé d'une structure tripolaire qui n'évolue plus que par une lente diffusion visqueuse. Dans l'état final le système a atteint une configuration stationnaire

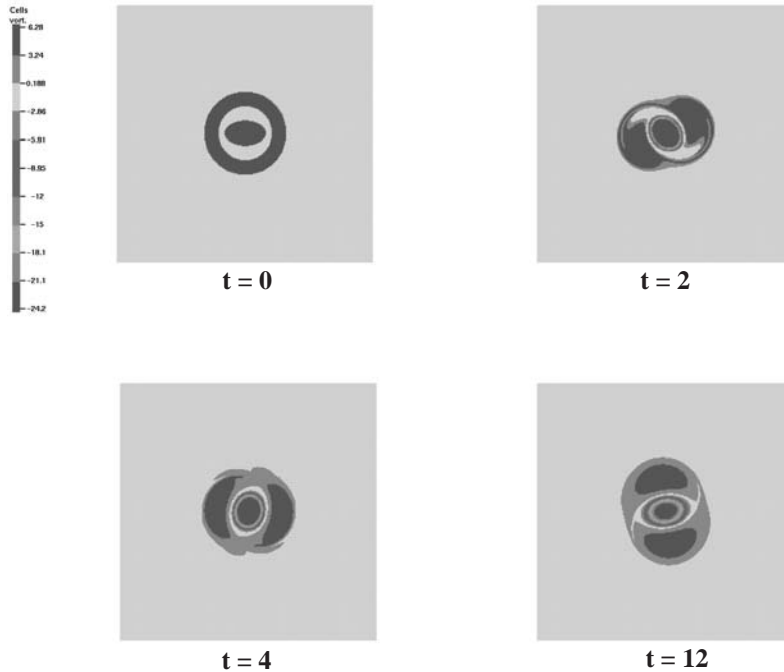


FIG. 1. Formation d'une structure cohérente tripolaire. L'évolution est simulée avec un grand nombre de variables ( $256 \times 256$ ). On représente à différents instants les valeurs de la vorticité en chaque point, les valeurs sont indiquées par différents niveaux de gris. L'état initial est choisi de façon à ce que le système évolue rapidement vers une structure cohérente : il est constitué d'une ellipse où la vorticité est négative entourée d'une couronne où la vorticité est positive. Au début, la couronne se déforme et s'enroule de manière complexe autour de l'ellipse. Progressivement un système formé de trois tourbillons se constitue, puis se stabilise en une structure formée d'un tourbillon central entouré de deux tourbillons accolés tournant en sens inverse, le tout animé d'un mouvement de rotation uniforme. On n'aboutit donc pas à une évolution chaotique mais à une structure cohérente stable.

dans un repère en rotation uniforme. Si on diminue progressivement  $r_3$ , le même scénario se reproduit jusqu'à une valeur critique, approximativement égale à 0.9325, au dessous de laquelle le système ne donne plus un tripôle mais se scinde en deux dipôles (*voir figure 2*).

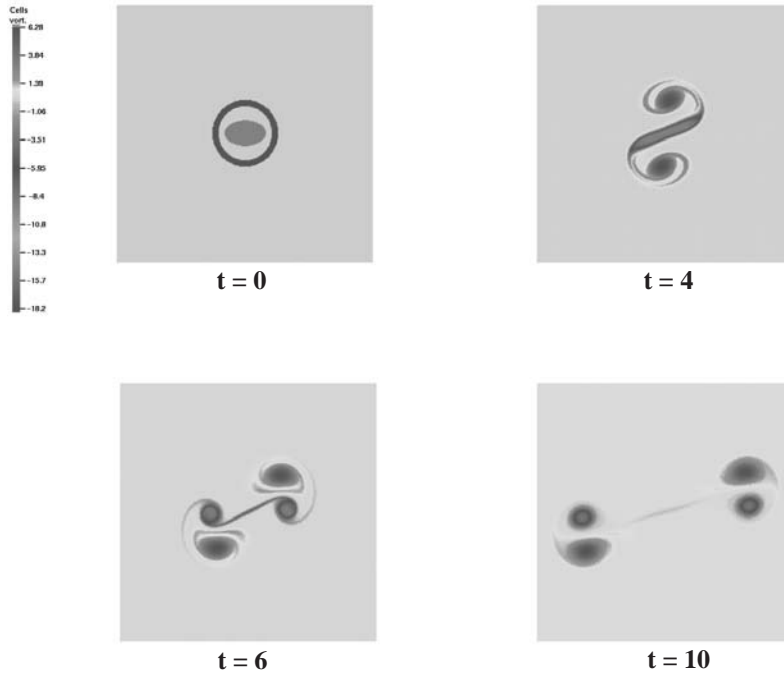


FIG. 2. En changeant l'état initial (couronne plus mince), on observe une organisation différente : le tourbillon central s'étire, puis le système se scinde en deux dipôles qui s'éloignent l'un de l'autre à vitesse constante.

### *Deuxième expérience, effet d'une perturbation de la condition initiale*

La perturbation de la vortacité initiale (cas  $r_3 = 1$ ) est prise suivant le vecteur propre correspondant à la plus grande valeur propre de l'opérateur linéarisé. La norme de l'énergie de la perturbation est prise égale à 1% de la norme de la condition initiale.

– *Le résultat.*

À l'œil nu on ne voit pas de différence notable avec le résultat non perturbé (figure 1) (*nous ne donnons pas les figures*). Si l'on observait le flot à plus petite échelle on verrait des modifications au niveau des petites structures, mais l'écoulement à grande échelle n'apparaît pas affecté par la perturbation. Traçons maintenant la courbe donnant l'évolution de l'erreur relative en norme de l'énergie en fonction du temps (*figure 3*) :

$$e(t) = \left( \frac{\int |\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{u}_p(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}}{\int |\mathbf{u}(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}} \right)^{1/2},$$

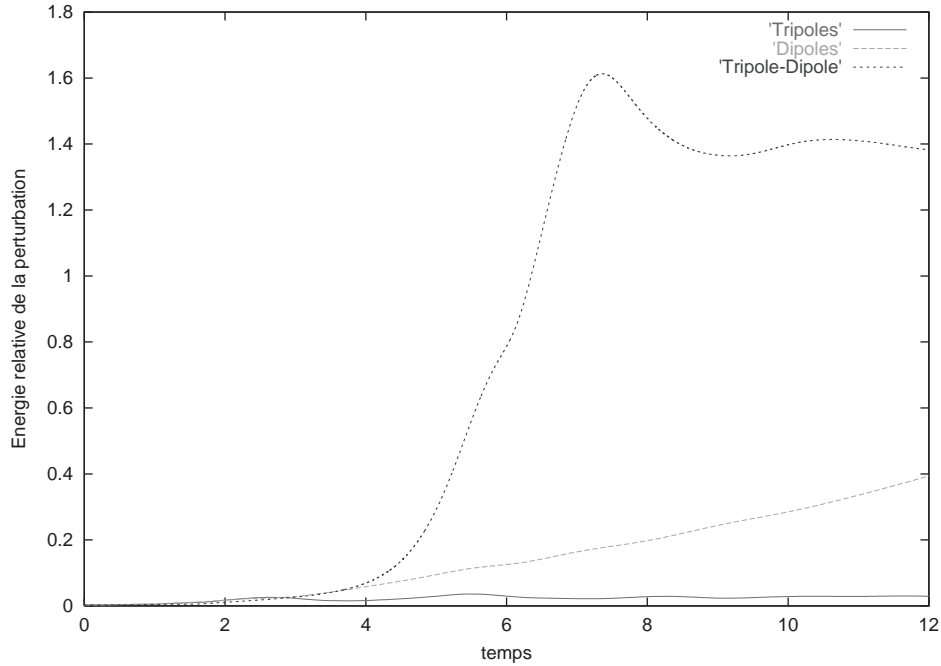


FIG. 3. Trois courbes de sensibilité correspondant à trois situations distinctes : formation d'un tripôle (en rouge), formation de deux dipôles (en vert), voisinage d'une bifurcation (en bleu). On notera la distinction très nette entre ces trois régimes.

où  $\mathbf{u}_p(t, \mathbf{x})$  est la solution perturbée. On constate une phase de croissance exponentielle de  $e(t)$  qui est assez brève (de l'ordre de quelques temps de retournement de la structure), puis de faibles oscillations et  $e(t)$  se stabilise à une valeur proche de 0.04.

– Le cas  $r_3 = 0.8$ . Ici non plus il n'y a aucun effet visible à l'oeil nu, on observe toujours la formation de nos paires de tourbillons. En revanche, passé une courte période où elle se superpose à la précédente, la norme en énergie de la perturbation à une croissance linéaire tout à fait caractéristique (figure 3).

– Le cas du rayon critique  $r_3 = r_c = 0.9325$ .

Dans ce cas le système non perturbé va former une structure tripolaire alors que le système perturbé va donner naissance à deux dipôles. La courbe d'erreur (voir figure 3) montre clairement le phénomène de sensibilité exponentielle au moment de la séparation en deux dipôles.

### *Troisième expérience, on change le nombre de degrés de liberté*

On fait exactement le même calcul que dans la première expérience ( $r_3 = 1$ ), le seul paramètre changé étant le nombre de degrés de liberté  $D$ .

– *Les résultats.*

Cette fois, pour  $D = 16 \times 16$ , on n'observe plus la formation d'une structure et les oscillations « chaotiques » de la vorticité gagnent toute la boîte périodique. On constate maintenant que l'effet de la perturbation initiale gagne progressivement toutes les échelles de l'écoulement. Ceci apparaît très clairement sur la courbe d'erreur (*figure 4*), où l'on voit que, contrairement au cas  $D = 256 \times 256$ , l'erreur ne reste pas bloqu e à une valeur faible.

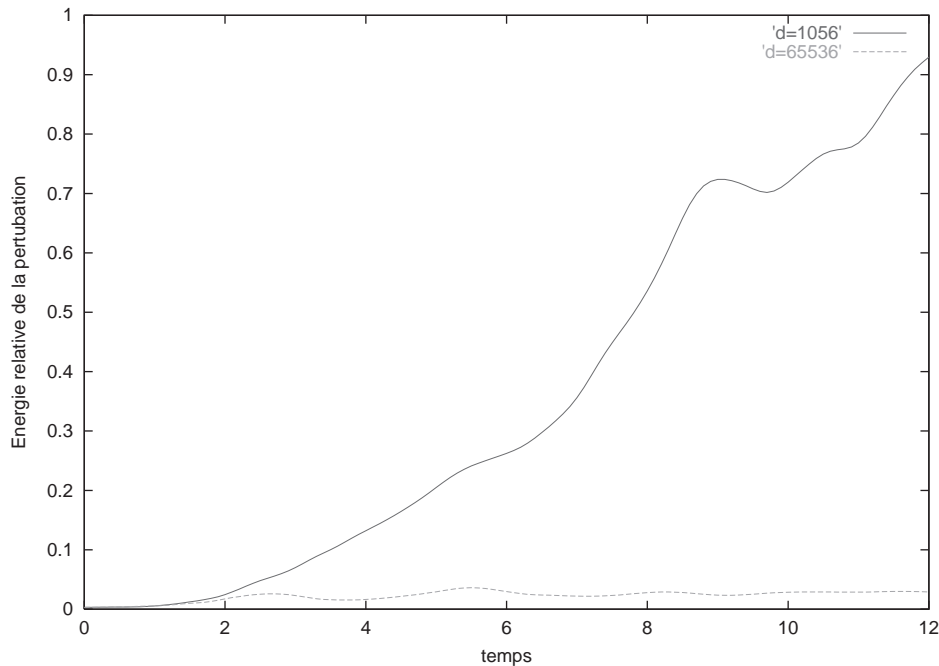


FIG. 4. Variation de la sensibilité suivant le nombre de degrés de liberté. En diminuant le nombre de degrés de liberté, on retrouve les observations de Lorenz.

### **Remarque**

Pour  $D = 16 \times 16$ , l'équation que l'on résout numériquement (où on a gardé  $\nu_e = 1/2000$ ) n'est plus une approximation raisonnable des équations de Navier-Stokes. C'est sans importance puisque nous testons le changement de comportement du système dynamique avec le nombre de degrés de liberté et non son adéquation en tant que modèle du mouvement fluide, adéquation qui n'apparaît que pour  $D$  grand.

### **Commentaires sur ces expériences**

La deuxième expérience montre que lorsque le nombre de degrés de liberté du système est grand le phénomène de sensibilité par rapport à la condition initiale disparaît. Bien que le système soit très instable, la perturbation affecte

essentiellement les petites échelles et n'a que peu d'influence sur le comportement à grande échelle du système. La sensibilité par rapport à la condition initiale peut se manifester cependant lorsqu'on se place au départ sur une « séparatrice » entre deux possibilités d'évolution « macroscopiques » différentes. Le système peut basculer soit vers une structure cohérente, soit vers une autre. Le système va alors changer de comportement à grande échelle parce qu'il est en fait au voisinage d'une transition de phase et qu'une petite perturbation des invariants (énergie, enstrophie...) peut changer son état d'équilibre statistique [10].

## VI. Sur la prédictibilité des écoulements atmosphériques

L'étude de sensibilité aux conditions initiales présentée ci-dessus porte sur un processus d'auto-organisation particulier ; bien qu'il n'épuise pas à lui seul tous les comportements possibles des écoulements bidimensionnels, il est représentatif de ce que l'on observe dans la circulation atmosphérique, formée de structures cohérentes qui se déplacent autour de la planète et interagissent. D'autres simulations numériques font apparaître le même comportement : l'énergie de la perturbation est le plus souvent stationnaire ou à croissance linéaire, très rarement exponentielle.

En conclusion, nous pensons que l'image, suggérée par l'effet papillon, d'une perturbation à petite échelle se propageant et s'amplifiant en gagnant les grandes échelles de l'écoulement est trompeuse. Nous avons montré qu'avec un grand nombre de degrés de liberté la sensibilité exponentielle par rapport à la donnée initiale devient un phénomène exceptionnel, ce qui bien sûr améliore le pronostic en ce qui concerne la prévision.

Si la limite indépassable de deux semaines pour le temps de prédiction météorologique n'a pas de justification solide, on peut s'attendre à ce que les progrès constants de l'efficacité des processeurs, l'affinement du réseau d'observation, le perfectionnement des modèles et des méthodes numériques conduisent à des améliorations importantes de la fiabilité des prévisions dans les années à venir. Cela ne signifie pas pour autant qu'il n'y ait plus d'obstacles à franchir ; l'instabilité exponentielle, bien qu'exceptionnelle, demeure dans des situations critiques lorsque le système n'ayant pas d'état d'équilibre local bien défini peut basculer vers une structure ou vers une autre.

On pourra objecter que nous avons examiné ici le comportement d'un système relativement simple (le fluide parfait à deux dimensions) et que l'atmosphère terrestre est autrement plus complexe. À cela on peut répondre d'une part que c'est en reprenant l'étude du même système que celui que considéra Lorenz qu'on aboutit à une conclusion opposée ; et d'autre part que les principaux traits caractéristiques des modèles complexes qui modélisent de façon plus appropriée l'écoulement atmosphérique sont déjà présents dans l'équation du fluide parfait bidimensionnel, à savoir chaos à petite échelle, imprédictibilité des trajectoires des particules fluides et formation de structures cohérentes et que l'étude de ces modèles, d'un point de vue statistique, peut être entreprise de manière analogue. La principale simplification faite est l'élimination des mécanismes de forçage. En effet, l'atmosphère n'est en perpétuel mouvement que

parce que des forces compensent les effets de dissipation d'énergie par frottement. Ce forçage a lieu sous la forme suivante : des courants de convection locaux avec des montées de colonnes d'air chaud et des descentes d'air froid se produisent ici ou là ; l'action de la force de Coriolis, due à la rotation de la terre, sur ces colonnes montantes ou descendantes force le mouvement fluide. Dans un premier temps il est légitime de négliger ces forces, dans les études de prédictibilité, dans la mesure où le temps caractéristique de ce forçage (temps nécessaire pour que ces forces produisent un effet sensible) est nettement plus grand que le temps de relaxation vers les structures cohérentes : mais il est clair que les modèles effectifs de circulation doivent en tenir compte.

### *Moralité*

Dans de multiples questions on se trouve face à des systèmes complexes qui possèdent un très grand nombre de degrés de liberté, et on se préoccupe généralement de prédire des quantités « macroscopiques » qui sont en fait des moyennes statistiques. Il découle assez clairement de ce qui précède que l'instabilité exponentielle du système « microscopique » n'est en rien synonyme d'imprédictibilité.

### *Remerciements*

Je remercie très chaleureusement Carole Rosier de l'université Lyon I, qui a effectué avec autant de patience que de compétence les simulations numériques présentées ici.

### Références

- [1] V. I. ARNOLD – « Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **16** (1966), p. 319–361.
- [2] V. I. ARNOLD et B. A. KHESIN – *Topological methods in hydrodynamics*, Springer Verlag, 1996.
- [3] X. CARTON et B. LEGRAS – « The life cycle of tripoles in two-dimensional incompressible flows », *J. Fluid Mech.* **267** (1994), p. 53–82.
- [4] P. H. CHAVANIS, J. SOMMERIA et R. ROBERT – « Statistical mechanics of two-dimensional vortices and collisionless stellar systems », *Astrophys. J.* **471** (1996), p. 385–399.
- [5] E. N. LORENZ – « A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model », *Tellus Ser. A* **17** (1965), p. 321–333.
- [6] J. HUNT – « Prévision déterministe et statistique de l'environnement et de la turbulence », *Turbulence et déterminisme* (M. Lesieur, éd.), Presses universitaires de Grenoble, 1998.
- [7] E. N. LORENZ – « Deterministic nonperiodic flow », *J. Atmospheric Sci.* **20** (1963), p. 130–141.
- [8] L. ONSAGER – « Statistical hydrodynamics », *Nuovo Cimento Supp.* **6** (1949), p. 279.
- [9] R. ROBERT et C. ROSIER – « Long range predictability of atmospheric flows », *Nonlinear processes in geophysics* (2001).
- [10] R. ROBERT et J. SOMMERIA – « Statistical equilibrium states for two-dimensional flows », *J. Fluid Mech.* **229** (1991), p. 291–310.
- [11] V. I. YUODOVITCH – « Non-stationary flow of an incompressible liquid », *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.* **3** (1963), p. 1032–1066.