LIVRES

Cohomologie, stabilisation et changement de base.
JEAN-PIERRE LABESSE Avec deux appendices *Changement de base pour les représentations cohomologiques de certains groupes unitaires* par LAURENT CLOZEL et JEAN-PIERRE LABESSE, *Ensembles croisés et algèbre simpliciale* par LAWRENCE BREEN
Astérisque **257** (1999), 167 pages. ISSN : 0303-1179. 200 FF

The title doesn't say so, but this book is about understanding the trace formula — the twisted Arthur-Selberg trace formula, to be more precise. The space $\mathcal{A}_d(G)$ of discrete automorphic forms on a connected reductive algebraic group G over $\mathbb{Q}$ is an enormous object, but its structure can in principle be understood completely in terms of a single, admittedly complicated, invariant: its trace. A smooth compactly supported function f on the adele group $G(\mathbb{A})$ of G (a *test function*) naturally defines an operator $r(f)$ on $\mathcal{A}_d(G)$, and it is known (thanks to work of W. Müller) that $r(f)$ is an operator of trace class. The functional $f \mapsto \operatorname{tr} r(f)$ is a distribution on $G(\mathbb{A})$ invariant (under conjugation by $G(\mathbb{A})$) that determines the representation of $G(\mathbb{A})$ on $\mathcal{A}_d(G)$ up to isomorphism. More precisely, $\mathcal{A}_d(G)$ can be written as an infinite direct sum

$$\mathcal{A}_d(G) = \bigoplus_{\pi} m(\pi)\pi, \tag{1}$$

where π runs over irreducible admissible representations of $G(\mathbb{A})$ (with a few adjustments at the archimedean place) and $m(\pi)$ are non-negative integers. Then we have the equality of distributions

$$\operatorname{tr} r = \sum_{\pi} m(\pi) \operatorname{tr} \pi \tag{2}$$

where $f \mapsto \operatorname{tr} \pi(f)$ is the distribution character of the representation π, the fundamental invariant in harmonic analysis on the locally compact group $G(\mathbb{A})$.

Formula (2) is called the *spectral expansion* of $\operatorname{tr} r$. In the representation theory of a finite group H, the characters of irreducible representations of H form a basis for the space of invariant functions, and a second basis is formed by the characteristic functions of conjugacy classes. In the theory of admissible representations of $G(\mathbb{A})$, the characters are replaced by the distribution characters, which are distributions rather than functions; the characteristic functions of conjugacy classes are replaced by orbital integrals:

$$\Phi_{G(\mathbb{A})}(\gamma, f) = \int_{I_\gamma \backslash G(\mathbb{A})} f(x^{-1}\gamma x) d\dot{x}. \tag{3}$$

Here I_γ is the centralizer in $G(\mathbb{A})$ of γ and $d\dot{x}$ is a quotient measure. (Thus $\Phi_{G(\mathbb{A})}$ depends on choices of measures, but so does the trace.) The *geometric expansion* of $\operatorname{tr} r$ is then an expression of the form

$$\operatorname{tr} r = \sum_{\gamma} \Phi_{G(\mathbb{A})}(\gamma, \bullet) \tag{4}$$

where γ runs over conjugacy classes in $G(\mathbb{Q})$. The trace formula is then the identity of the spectral and geometric expansions of $\operatorname{tr} r$. If G were momentarily replaced by the additive group, the dictionary between characters and conjugacy classes (which are just elements) is provided by Fourier analysis, and the trace formula reduces to the Poisson summation formula. Thus the trace formula is a non-abelian analogue of the Poisson summation formula.

Unfortunately, as anyone with even the slightest familiarity with the trace formula will already have noticed, such a trace formula exists only when G is anisotropic; equivalently, when $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$ is compact. This excludes most of the interesting cases, so we have to try again. The reasoning that yields the identity between the right-hand sides of (2) and (4) runs into serious problems of convergence when $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$ is non-compact. For $SL(2)$ and certain other groups of rank 1 these problems were first addressed, and solved, by Selberg; the general case was successfully resolved by Arthur, in a series of articles spanning nearly 20 years. In the correct formula, both expansions must be supplemented by analytically elaborate terms (weighted characters on the spectral side, weighted orbital integrals on the geometric side). Labesse's book is *not* about these difficulties, and I will say nothing more about them. Rather, Labesse is concerned with a problem that arises once one attempts to apply the trace formula to obtain useful information.

Taken alone, the geometric expansion sheds no light on the spectral expansion, the matter of genuine interest. In most applications, the trace formula is used to compare spectra of two distinct, but related groups G and G'. This is achieved by relating the geometric expansions for the two groups. This may be possible when there is a map (the *norm*, in the cases considered by Labesse) from rational conjugacy classes in G' to rational conjugacy classes in G, and a second map (*transfer*) of test functions on G' to test functions on G. The first classic example is the Jacquet-Langlands correspondence between automorphic forms on $G = GL(2)$ and on an inner form G' (the multiplicative group of a quaternion algebra), proved precisely by comparing geometric expansions on the two groups.

The second classic example is the base change of Labesse's title. Let E/F be a cyclic extension of number fields of prime degree, θ a generator of $Gal(E/F)$, and let $G = GL(n)_E$, $G' = GL(n)_F$, viewed as groups over $\mathbb{Q}$ by restriction of scalars. Base change is a map from automorphic forms (more correctly, automorphic representations) on G' to automorphic forms on G. The map $\gamma \mapsto x^{-1}\gamma\theta(x)$, for $x \in G(\mathbb{A})$, defines an equivalence relation called twisted conjugacy on elements of $G(\mathbb{A})$, that can also be expressed in terms of conjugacy on the *disconnected* group $Gal(E/F) \ltimes G$. In this case there is a norm map from twisted conjugacy classes in G to conjugacy classes in G', as well as a *twisted* transfer from test functions on G to test functions on G', and base change is obtained by comparing the geometric expansions of the trace formula on G' and the twisted trace formula on G.

Attempts to apply these techniques to other groups immediately run into the problem that, in general, norm maps are only defined on conjugacy classes over algebraically closed fields. Let F be either $\mathbb{Q}$ or a local field, and G a connected reductive group over F. The elements $\gamma, \gamma' \in G(F)$ are *stably conjugate* if they become conjugate over the algebraic closure of F. Conjugacy and stable conjugacy coincide for inner forms of $GL(n)$, but are distinct for other groups. In joint work with Langlands in the 1970s, Labesse discovered that the distributions appearing in the geometric and spectral expansions of the trace formula for $SL(2)$ are not stable; i.e., are not invariant under stable conjugacy. This phenomenon is the rule. Stabilization of the trace formula refers to the expectation that the geometric and spectral expansions can be written as sums of stable distributions, not on G alone but on a finite set of related groups called *endoscopic groups*.

The difference between conjugacy and stable conjugacy can be measured in terms of Galois cohomology. This approach, initiated by Langlands, developed systematically by Kottwitz, and extended to twisted conjugacy by Kottwitz and Shelstad, is initially expressed in terms of non-abelian cohomology, but, using basic results of Kneser, they found that the relevant obstructions lie (for the most part) in abelian groups. Generalizing Tate-Nakayama duality for tori, they found expressions for these obstruction groups in terms of the Langlands dual groups. The resulting theory is efficient but difficult to grasp, because (1) there are different kinds of obstruction groups (for local and global fields, and for the comparison between the two), whose definitions increase in complexity as generality is increased, and (2) to apply the theory to the trace formula one has to undo the dualization; the constructions that appear natural in the setting of the Langlands dual are no longer so back on the group.

The principal innovation of Labesse's book is the development of new cohomological methods that apply directly to the group, without passing through dualization. The fundamental notion, introduced on the second page of the first chapter, is what Labesse calls a "crossed set". This consists of a triple (X, A, B), where X is a set, A is a group acting on X, and B is a set fibered in groups over X and admitting an action by A and a map to $A \times X$. The whole satisfies a list of axioms at first sight far from intuitive, and this is hardly surprising: as L. Breen explains in an extended appendix, the categorical structure naturally related to a crossed set is that of a (certain kind of) 2-groupoid.

Nevertheless, Labesse manages to define Galois cohomology with coefficients in a crossed set. Certain kinds of complexes of reductive groups over local and global fields define crossed sets; this is the case, for example, for the inclusion $I = I_\gamma \mapsto G$ considered above, at least when γ is a semisimple element of G. In this way, when (say) F is a local field, Labesse can define Galois cohomology sets and abelianized Galois cohomology groups $H^i(F, I\backslash G)$ (for small i) and $H^i_{ab}(F, I\backslash G)$, respectively, with excellent functorial properties. For instance, there is a long exact sequence (of pointed sets)

$$1 \to I(F) \to G(F) \to H^0(F, I\backslash G) \xrightarrow{\partial} H^1(F, I) \to H^1(F, G) \to \dots.$$

The difference between conjugacy and stable conjugacy is then given by the image of the map ∂. This is the beginning of the local and adelic theory of stabilization. The stable and unstable orbital integrals are defined as integrals over the set $H^0(F, I\backslash G)$, or its adelic counterpart, which naturally can be represented as a disjoint union of sets of the form $I'(F)\backslash G(F)$, where the I' are certain inner twists of I.

The invariants appearing in the global theory of stabilization arise when F is replaced in the above diagrams by $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$, essentially the cone on the global Galois cohomology and the product over completions of the local Galois cohomologies. This provides two sets of long exact sequences for the abelianized cohomology groups: one for the morphism of groups $I \mapsto G$, the other for adelic localization of Galois cohomology. Comparing these exact sequences, Labesse defines the *endoscopic character group* $\mathfrak{K}(I, G; F)_1$ relative to I as the group of characters of the cokernel of the map $H^0_{ab}(\mathbb{A}, G) \to H^0_{ab}(\mathbb{A}/\mathbb{Q}, I\backslash G)$.

The endoscopic character groups, which are finite in the cases of interest, are defined by means of dualization in Kottwitz' (pre)stabilization of the elliptic part of the standard trace formula, and in the Kottwitz-Shelstad (pre)stabilization of the strongly regular elliptic terms in the twisted trace formula. Labesse's formalism, provides a natural (pre)stabilization of all elliptic terms in the twisted trace formula, at least in the cases relevant to cyclic base change. More precisely, via a natural sequence of maps

$$H^0(\mathbb{A}, I\backslash G) \to H^0(\mathbb{A}/\mathbb{Q}, I\backslash G) \to H^0_{ab}(\mathbb{A}/\mathbb{Q}, I\backslash G)$$

an endoscopic character defines a function on $H^0(\mathbb{A}, I\backslash G)$ that can be inserted into the orbital integral. In this way, Labesse obtains a natural expression for the sum of elliptic terms as a sum of κ-orbital integrals, where κ runs through the group of endoscopic characters; this is what is meant by prestabilization.

The elliptic part of the trace formula corresponds to the terms in the geometric expansion that have the naive form indicated in formula (4). For certain test functions f one actually obtains equalities between the naive spectral and geometric expansions:

$$\sum_{\pi} m(\pi)\,\mathrm{tr}\,\pi(f) = \sum_{\gamma} \Phi_{G(\mathbb{A})}(\gamma, f), \tag{5}$$

where now γ runs over elliptic conjugacy classes. Such a formula holds in general for anisotropic G, of course, but also when f satisfies local hypotheses at two places; one then obtains the *simple* trace formula, twisted or not. Under an additional local hypothesis, all κ-orbital integrals of f vanish for $\kappa \neq 1$, and only the stable term remains. Without further ado, the geometric expansion is thus in a state to be compared with the trace formula of another group.

The local hypotheses are somewhat restrictive, but they suffice for a variety of applications, notably to local questions. More immediately, they allow Labesse to prove the existence of cyclic base change, and transfer between inner forms, in a variety of situations in which they were not previously known. As an application of his methods, Labesse proves the existence of cyclic base change of cuspidal automorphic representations locally Steinberg at an appropriate set of finite places (any two finite places will do if the group is semisimple and simply connected). In a final application, this theorem is applied to prove the non-triviality of cuspidal cohomology of S-arithmetic groups, generalizing a theorem of Borel, Labessse, and Schwermer.

The book concludes with two appendices. Breen's appendix was already mentioned; it reinterprets Labesse's cohomological formalism in terms of simplicial sets. The other appendix, due to Clozel and Labesse, completes and corrects some errors in Clozel's proof of the existence of base change and descent of cohomological automorphic representations of unitary groups of division algebras over CM fields. This is the principal ingredient in Clozel's theorem associating compatible systems of ℓ-adic representations to (certain) cohomological automorphic representations of $GL(n)$. Clozel's theorem, in turn, is used in an essential way in recent work on the local Langlands conjecture.

Arthur has recently obtained the full stabilization of both sides of the (untwisted) trace formula, assuming a series of conjectures in local harmonic analysis. These conjectures, generally known as the "fundamental lemma," have thus become the central question for everyone concerned with the trace formula. Indeed, Waldspurger has already reduced the problem of (endoscopic) transfer to the fundamental lemma. Much of Labesse's book is taken up with questions of local harmonic analysis, deriving the cases of transfer necessary for base change from Waldspurger's result (the relevant fundamental lemma was already known for cyclic base change, though the published proofs are incomplete; Labesse's book also includes a complete proof). It is clear to the reviewer that Labesse's formalism will be the language of choice in extending

Arthur's results to the twisted trace formula. For this reason alone[1], Labesse's book is required reading for anyone with an interest in the future of automorphic forms.

Michael Harris, Université Denis Diderot (Paris 7)

Leçons de mathématiques d'aujourd'hui
Éditées par ÉRIC CHARPENTIER et NICOLAS NIKOLSKI
Cassini, 1998. 384 p. ISBN 2-84225-007-9. 98 F

Les « leçons de mathématiques d'aujourd'hui », publiées par les Éditions Cassini, rassemblent en un ouvrage douze « Leçons » données à Bordeaux entre 1993 et 1997. L'École doctorale de mathématiques de l'Université de Bordeaux a en effet pris l'excellente initiative d'inviter des conférenciers à présenter un thème de recherche d'une manière accessible aux étudiants, et de faire rédiger ces conférences par l'un des auditeurs, en suivant au plus près le discours parlé. Le fruit de ces efforts orchestrés par Éric Charpentier et Nicolas Nikolski est un livre original, où les travaux contemporains dévoilent toute leur variété. Il est exceptionnel de rencontrer un ouvrage qui bouscule ces barrières qui trop souvent cloisonnent la recherche, tout en dépassant de bien loin le niveau des conférences de salon. Parcourons donc ensemble les thèmes abordés dans ces douze leçons.

La conférence de Jean Pierre Kahane commence par le théorème de Pythagore, replacé dans son contexte historique, et diverses façons de l'établir, dont le plus simple consiste à remarquer qu'on crée trois triangles semblables en abaissant la hauteur issue de l'angle droit d'un triangle rectangle. L'itération de cette opération conduit alors à la courbe de Polya, qui remplit tout un triangle rectangle, et à l'analyse multifractale. La courbe de Polya fournit une solution du « problème du voyageur de commerce » pour la variation quadratique, ce qui nous conduit naturellement au mouvement brownien. Enfin, la dynamique des mesures harmoniques, encore mal comprise, est reliée aux dendrites de la minéralogie, formées par exemple par le dépot du sulfate de cuivre sur la cathode. Une discussion très instructive conclut la conférence.

Pierre Cartier développe dans sa conférence un cadre rigoureux pour l'intégrale de Feynman. Il expose tout d'abord les difficultés liées à l'absence de mesures invariantes en dimension infinie (rappelons nous que la compacité locale est une condition nécessaire à l'existence de la mesure de Haar), puis examine les solutions apportées par Wiener pour formaliser le mouvement brownien, puis par Feynman pour formaliser la mécanique quantique. Les chaînes de Markov, présentées ici comme des graphes orientés, sont l'outil probabiliste « élémentaire » qui joue le rôle majeur. Le délicat problème de normalisation, proposé aux mathématiciens par Feynman, est analysé.

Le calcul des serpents, c'est-à-dire du nombre de types topologiques des fonctions réelles ayant un nombre fini de points critiques avec des valeurs critiques toutes différentes, sert de point de départ à Vladimir Arnold. L'une des figures de sa conférence sert également de couverture au livre. Il montre que ce calcul d'apparence élémentaire, qui fournit une suite de nombres (K_n) commençant par 1, 1, 1, 2, 5, 16, 61... est lié *via* les fonctions génératrices aux développements non triviaux des fonctions classiques (comme la fonction tangente) en série, et d'autre part *via* les discriminants à la théorie de Morse et à la théorie des catastrophes. Cette suite est ensuite reliée à la combinatoire des groupes de Coxeter, c'est-à-dire des groupes finis engendrés par des réflexions dans un espace euclidien.

La conférence de Don Zagier concerne la cohomologie de $SL_2(\mathbf{Z})$. Il s'agit là d'un sujet très ardu pour un non-spécialiste (comme par exemple l'auteur de ces lignes).

[1] Attention: "*For this reason alone*" veut dire : cette raison est suffisante; je ne veux pas dire "c'est la seule raison..." !

Cependant D. Zagier sait communiquer des idées simples, comme de voir la fonction *sinh* comme un cas limite des fonctions θ de Jacobi, ou de faire le lien entre les formules d'addition des cotangentes et les relations des périodes dans la théorie des formes modulaires. Des applications arithmétiques sont esquissées ; on devine derrière ces applications de vertigineux calculs. L'un des résultats les plus surprenants relie le nombre de solutions d'une équation fonctionnelle avec le spectre du Laplacien agissant sur le quotient du demi-plan de Poincaré par $SL_2(\mathbf{Z})$.

Haïm Brézis commence par étudier les fonctions à valeurs dans le cercle unité qui minimisent la fonctionnelle d'énergie de Dirichlet dans le disque, et remarque que le degré topologique de telles fonctions est nécessairement nul. Il s'intéresse ensuite aux fonctions de degré strictement positif, pour lesquelles cette fonctionnelle est infinie, et ajoute à la fonctionelle de Dirichlet une intégrale dépendant d'un paramètre ε qui permet de définir l'énergie de Ginzburg-Landau, laquelle provient de la théorie de la supraconductivité. Il explique alors comment s'inspirer d'un problème tridimensionnel rencontré dans un problème des cristaux liquides pour minimiser l'énergie de Ginzburg-Landau, puis fait tendre ε vers 0 pour obtenir des solutions « de superfluidité » de degré positif à valeurs dans le disque du problème de minimisation de la fonctionnelle de Dirichlet. On a donc obtenu ces fonctions par une méthode de pénalisation et renormalisation. Les singularités de ces fonctions sont l'expression mathématique des lignes de vortex de l'hélium liquide superfluide en rotation.

Dans sa conférence, Bernard Malgrange définit d'abord le polynôme de Bernstein-Sato d'une fonction f de n variables holomorphe au voisinage de 0 telle que $f(0) = 0$. Ce polynôme est issu d'une identité différentielle reliant f^s et f^{s+1}. Ses zéros interviennent dans le prolongement analytique de l'intégrale de f^s quand celui-ci est obtenu d'une façon similaire à celui de la fonction Γ, et ils font apparaître des pôles de ce prolongement. Ils apparaissent similairement dans le développement asymptotique des intégrales oscillantes du type « Fresnel » lorsque la phase (« stationnaire ») a des points critiques, en exposants des termes du développement. La partie la plus profonde de la conférence consiste à relier les zéros du polynôme de Bernstein-Sato de f à des invariants topologiques liés à f. Il y est établi que les valeurs propres de la monodromie de f en 0 sont au facteur $(-2i\pi)$ près les exponentielles des zéros du polynôme de Bernstein-Sato de f ; pour expliquer cela, il faut d'abord introduire l'homologie singulière, et la fibration localement (mais non globalement) triviale de Milnor. Le théorème de monodromie apparaît alors comme une conséquence de la rationalité des zéros des pôlynomes de Berstein-Sato.

Le point de départ de John Coates est le problème des nombres congruents : quels sont les nombres entiers qui sont l'aire d'un triangle rectangle à côtés rationnels ? Ce problème très ancien n'est pas encore pleinement résolu ; on conjecture que tout entier sans facteur carré congru à 5, 6 ou 7 modulo 8 est congruent. Fermat a montré que 1 n'est pas congruent, en se ramenant à l'équation $x^4 - y^4 = z^2$, et en établissant par sa méthode de descente infinie que celle-ci n'a pas de solution non triviale. En fait, 5 est le plus petit des nombres congruents. Un calcul simple montre ensuite que D est congruent si et seulement s'il existe un point rationnel d'ordonnée non nulle sur la cubique non singulière d'équation $y^2 = x^3 - D^2x$. Le lien est ainsi fait avec le groupe des points rationnels de la cubique, qui est abélien de type fini, et donc avec les fonctions elliptiques, puis avec les coefficients des formes modulaires. Notons que la loi de groupe suffit à montrer que si D est congruent, il existe une infinité de triangles solutions. John Coates introduit ensuite les points de p^n- divisions (qui généralisent les « points d'inflexion »), la cohomologie de la courbe elliptique et les « fonctions L » elliptiques. La conférence se termine par la difficulté qui arrétait A. Wiles dans la démonstration, alors incomplète, du « dernier théorème » de Fermat. Cet obstacle a depuis été contourné par A. Wiles qui a établi ce théorème, mais à ma connaissance l'obstruction initiale n'a toujours pas été surmontée.

Nous revenons à l'analyse avec la conférence d'Yves Meyer, qui remarque d'abord qu'en remplaçant les polynômes de degré n par des rapports de tels polynômes, on obtient des approximations beaucoup plus précises de la fonction $|x|$ en doublant seulement le nombre des coefficients à déterminer. Cependant, l'ensemble des approximants est alors une variété et l'approximation n'est plus linéaire. Le théorème de Peller explique ce résultat en montrant que les fonctions « bien approximables » par les fractions rationelles sont exactement celles qui appartiennent à une intersection d'espaces de Besov, ce qui autorise la présence de « pointes » bien que l'approximation soit bonne. Les ondelettes fournissent le bon point de vue sur ce théorème ; en effet les fonctions de Peller sont exactement celles dont la suite des coefficients sur une base d'ondelettes, réordonnée de façon décroissante, est à décroissance rapide. Cette méthode d'approximation non linéaire, qui consiste à ordonner par les amplitudes et non par les fréquences, est de fait beaucoup mieux adaptée aux ondelettes qu'aux séries de Fourier ; un résultat récent de T. Körner montre par exemple que le « théorème de Carleson » devient faux quand on réordonne la série de Fourier par coefficients décroissants. Le point de vue « ondelettes » conduit à une extension du théorème de Peller à la dimension n. De nombreuses applications industrielles de l'approximation non linéaire sont évoquées (traitement du signal, *monitoring* des centrales nucléaires...), et la conférence est émaillée de remarques lumineuses sur les problèmes posés par la reconnaissance de la parole ou des formes, et le rôle important joué par l'analyse fonctionnelle dans leurs solutions.

Henry Helson présente un panorama essentiellement historique de l'analyse harmonique de 1945 à 1965. Cette période où suivant ses termes, les séries de Fourier devinrent analyse harmonique, a été mathématiquement si riche que ce panorama historique nous fait rencontrer de nombreux théorèmes importants. Parmi ceux-ci figure le théorème de Szegö, suivi du théorème de Helson-Szegö, qui détermine pour quelles mesures μ sur le cercle l'opérateur de conjugaison est borné dans $L^2(\mu)$. Ce résultat classique a été utilisé récemment par N. Kalton et C. Le Merdy pour montrer l'existence d'un opérateur à puisances bornées sur l'espace de Hilbert qui n'est pas semblable à un opérateur de petite norme.

Les réseaux électriques étudiés dans la conférence d'Yves Colin de Verdière sont des graphes finis, où l'on distingue les sommets terminaux, ou bornes, et où les arêtes ont une certaine conductance. L'application L qui fait correspondre aux potentiels aux N bornes l'intensité du courant qui en sort apparaît alors comme un opérateur symétrique d'un espace de dimension $(N-1)$ dans son dual. Cette application décrit donc la *réponse* du réseau aux stimuli électriques. Un premier théorème énonce la caractérisation des applications L qui sont la réponse d'un réseau plan dont les fils ne se coupent pas, donc d'un réseau planaire. L'application qui à un réseau associe sa réponse n'est pas injective, et un second théorème affirme que deux réseaux planaires qui ont même réponse peuvent être déduits l'un de l'autre par des transformations électriques simples, ce qui permet de montrer que l'équivalence électrique des réseaux planaires est un problème algorithmiquement décidable. La démonstration du second théorème repose sur des arguments simples mais subtils de géométrie plane.

La conférence de Frédéric Pham commence avec des éléments d'optique géométrique et quelques photographies de caustiques, qui le conduisent naturellement à parler d'enveloppes. Il nous montre comment les « enveloppes au but » observées peuvent être relevées en « enveloppes à la source » lisses dont elles sont les projections, ce qui ouvre la voie vers la théorie des catastrophes de Thom. Il revient ensuite à l'optique avec le principe de Huygens et les intégrales de Fresnel, dont la partie principale pour les grandes fréquences est donnée par le théorème de la phase stationnaire (un grand classique de l'oral de l'Agrégation...). Pour connaître la « vraie » fonction d'onde et non son développement asymptotique aux grandes fréquences, il faut alors utiliser la variété lagrangienne, l'analyse complexe et les feuillets de Riemann, ce qui conduit jusqu'à la *résurgence* au sens défini par Écalle.

Pierre-Louis Lions commence par établir les équations d'Euler et de Navier-Stokes pour les fluides compressibles « barotropes », c'est-à-dire tels qu'il existe une relation simple entre la pression et la densité. Cette relation est non linéaire, ainsi que les équations qu'il démontre en utilisant la conservation de la masse et de la quantité de mouvement ; dans celle d'Euler, on suppose que le fluide est non visqueux. Les problèmes analytiques considérables (« légère difficulté », dans l'article original d'Euler) que posent la résolution de ces équations sont largement ouverts. Pierre-Louis Lions présente les obstructions (explosion des solutions en temps fini, oscillations persistantes dans le cas de Navier-Stokes, perte d'unicité), et les méthodes parfois inattendues qui donnent des éléments de solution, du moins dans le cas plus simple de la dimension 1 : critères entropiques, compacité faible, analyse harmonique et espaces de Hardy, phénomène de compensation « à la Stein-Fefferman ». Il expose également les liens entre ces questions théoriques et des problèmes très concrets comme celui du décollage d'Ariane V, et insiste sur l'aide que les mathématiciens peuvent et doivent apporter aux ingénieurs, bien avant d'avoir « tout compris » aux équations d'Euler.

Ce livre atteint parfaitement son but : faire apprécier à un public aussi large que possible, sans trop de technique mais sans complaisance, les « mathématiques d'aujourd'hui ». Les Éditions Cassini ont efficacement contribué au succès du projet : la présentation du livre est attrayante, et son format en rend le transport et la lecture facile. Je recommande très vivement aux collègues qui souhaitent élargir et approfondir leur point de vue de lire ces « Leçons ». Pourvu qu'ils soient d'humeur un peu studieuse, ils y trouveront le plus enrichissant et le plus agréable des devoirs de vacances.

— *Gilles Godefroy*