

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Images et preuves

Bill Casselman¹ (*University of British Columbia*)

A cognitive life in which all truth can be simply « seen » would be the life of . . . an angel. — C. S. Lewis, in *The Discarded Image*.

百聞は一見にしかず — Proverbe japonais.

« Un regard est meilleur que cent écoutes », c'est traduit de manière quelque peu littérale ce qu'exprime ce proverbe. Plus communément, en français, un bon dessin vaut mieux que de longs discours. Bien des cultures défendent cette idée. Le rôle important que jouent la visualisation et les illustrations, en particulier en mathématiques, est largement reconnu et ce, apparemment, depuis les débuts de la discipline. Il est en même temps mal compris, même dans ses aspects les plus simples.

Il y a évidemment plusieurs facettes à la relation entre illustration et compréhension. Probablement, l'aspect le plus fascinant et le plus insaisissable est le rôle de la visualisation interne dans les étapes heuristiques du développement mathématique, mais c'est un sujet presque inépuisable que je n'aborderai pas ici. Je ne vais pas non plus chercher, comme l'a récemment fait Richard Palais dans un article paru dans les *Notices of the American Mathematical Society*, dans quelle mesure les ordinateurs rendent possible des prouesses jamais imaginés auparavant dans le domaine de la visualisation. À la place, je veux traiter d'un sujet plus terre-à-terre, la façon dont les images sont utilisées et devraient être utilisées dans les présentations mathématiques. Plusieurs arguments peuvent être avancés :

- ★ L'importance de bonnes illustrations est sous-estimée.
- ★ L'application de quelques idées très simples améliorerait grandement la qualité globale des illustrations mathématiques.
- ★ Les ordinateurs peuvent y contribuer de façon discrète, quoique significative.
- ★ Les techniques utilisées pour créer de bonnes illustrations peuvent présenter en elles-mêmes un intérêt du point de vue calculatoire et mathématique.

¹ Ce texte est la traduction, réalisée en partie par Valérie Dion, d'un article de Bill Casselman intitulé « Pictures and proofs » et paru dans *the Notices of the American Mathematical Society*, volume 47, Number 10, November 2000.

Un des principaux problèmes vient, bien sûr, de ce que, si un bon dessin vaut mieux qu'un long discours, la production d'une image risque de soulever de plus grandes difficultés que celle d'un texte. Les technologies ont un impact sur ce coût, en terme d'efforts, comme elles l'ont eu depuis les premiers temps. Il reste pourtant rare, de nos jours où les ordinateurs nous ont rendu tant de choses tellement facile, de produire facilement une bonne illustration mathématique. On peut néanmoins penser que le manque de qualité des illustrations couramment utilisées en mathématiques est largement un problème d'habitudes et de conventions plutôt que d'obstacles intrinsèques.

Pourquoi de bonnes illustrations mathématiques sont-elles importantes ?

Dans un monde idéal, les figures nous payeraient avec intérêt ce qu'on y investit. Mais quel genre d'intérêt ? Clarté, et même transparence. Lorsqu'on lit et écrit des mathématiques, il est important, comme l'a mentionné Yuri Manin dans sa conférence présentée à l'ICM en 1990, « Mathematics as Metaphor » de distinguer la connaissance de la vérité mathématique de la compréhension des mathématiques. Qu'est-ce que ceci a à voir avec les graphiques mathématiques ? En dépit des démentis et pour le meilleur ou le pire, les images — même celles qui ne sont qu'intériorisées — jouent souvent un rôle crucial dans les démonstrations logiques. Comme outils pour la compréhension, elles sont indispensables.

Je trouve fascinant que les philosophes médiévaux de Boethius à Thomas d'Aquin, ainsi que Manin, se soient préoccupés de distinguer entre *ratio*, qui désignait une chaîne de raisonnements assemblés soigneusement, et *intelligentia*, qui correspondait à quelque chose compris tout d'un coup. Il est fort probable que les exemples les plus clairs qu'ils avaient à l'esprit étaient tirés de leur fréquentation limitée d'Euclide. L'*intelligentia* la plus haute était la manière avec laquelle Dieu était capable de comprendre le monde entier, passé et futur, d'un coup d'œil. Ce degré de compréhension n'est pas quelque chose que l'on peut espérer atteindre, mais c'est probablement à travers des illustrations que l'on peut le plus s'en approcher.

Un exemple simple est la formule

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{1}{1 - r}$$

pour une série géométrique convergente avec $|r| < 1$. L'argument rigoureux habituel est satisfaisant, répondant à toutes les questions qui pourraient être soulevées à propos de la convergence. Mais, c'est encore un exemple de *ratio*. Peut-on visualiser cette formule ? Grâce au paradoxe de Zénon, beaucoup de gens sont familiers de l'image simple qui représente le cas $r = 1/2$ (voir Figure 1).

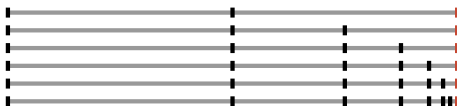


FIG. 1. Paradoxe de Zénon : somme d'une série géométrique convergente.

Il y a quelques années, dans un de mes cours de premier cycle, un étudiant a trouvé une façon d'illustrer le cas général. La Figure 2 montre un bref extrait de ce qui était un genre d'animation : cette illustration est vraiment bonne et accueillie favorablement par la plupart de ceux qui la voient.

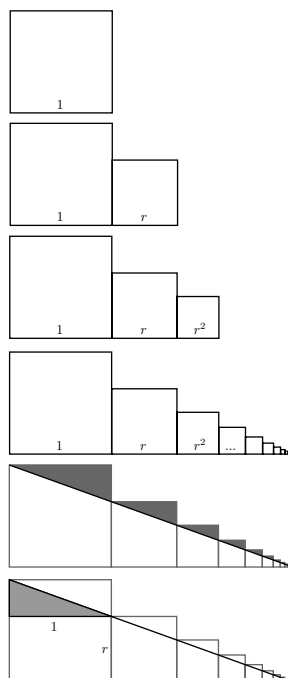


FIG. 2. Animation pour sommer une série géométrique convergente.

Mais ces images sont encore un peu abstraites, en ce sens que l'œil doit assimiler simultanément plusieurs éléments d'information algébrique. Je trouve que des images supplémentaires pour quelques cas explicites comme $r = 1/3$, $r = 1/4$, etc., améliorent les réactions de façon notable. Si par exemple, on choisit $r = 2/3$, on obtient la Figure 3. Le triangle ombragé et le grand triangle, ayant la somme comme base, sont semblables, et, en mettant la grille en place, il est évident à l'œil que l'un est trois fois plus grand que l'autre, donc la base du grand triangle est 3.

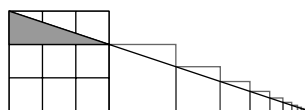


FIG. 3. Argument graphique pour la somme d'une série géométrique convergente

Qu'est ce qui fait une bonne illustration mathématique ?

Dans la mesure où je ne comprends pas exactement comment les illustrations contribuent à la compréhension mathématique, je ne peux qu'émettre quelques timides suggestions. J'en ai tiré quelques-unes des livres d'Edward Tufte :

- ★ Réduire l'encombrement visuel et — ce qui n'est pas tout à fait la même chose — éliminer ce qui peut distraire. N'inclure que ce qui est vraiment nécessaire pour que le point essentiel du diagramme soit compris. Atténuer les composantes du diagramme qui ne font qu'ajouter du contexte.

- ★ Mettre en relief les éléments importants pour la discussion en cours. Si nécessaire, répéter un diagramme plusieurs fois en mettant l'accent chaque fois sur différentes composantes. C'est une variante de ce que Tufte appelle « small multiples ».

- ★ Les figures devraient être parlantes. La coordination entre le texte et les illustrations est très délicate et idéalement, les deux devraient être aussi indépendants que possible. Le cinéma résout ce problème avec le son, mais les mathématiciens ne disposent pas encore de cette option et il n'est d'ailleurs pas facile d'imaginer comment ils l'utiliseraient. La plupart d'entre nous sommes encore astreints à faire des films muets.

- ★ Il est rare qu'il y ait trop d'illustrations dans un article de mathématiques. Rappelons nous que les illustrations peuvent servir à plusieurs fins — par exemple, il m'est souvent plus facile de connaître l'objet d'un article bien illustré en parcourant les diagrammes qu'il contient, plutôt qu'en lisant le texte. Les figures peuvent souvent être lues rapidement et il faudrait toujours envisager d'en ajouter.

- ★ En traçant des figures, imaginer comment le matériau serait présenté au cours d'un exposé oral. Dessiner des images qui suivent la narration, même si cela implique beaucoup de répétitions. Les ordinateurs peuvent aider à traiter ce genre de répétitions.

- ★ Constamment se demander si les figures traduisent le point essentiel pour lequel elles ont été conçues. Les refaire si nécessaire. Les figures devraient être redessinées, comme le texte est récrit, jusqu'à ce qu'elles soient justes.

- ★ Avoir recours à l'imagination. De légères et pertinentes modifications dans une figure peuvent quelquefois avoir un impact considérable. Il est utile de multiplier les expériences.

- ★ Ne dépendez pas trop souvent des images pour faire comprendre un point essentiel. L'interprétation des figures varie de façon imprévisible d'une personne à l'autre, comme le démontrent des milliers d'expériences psychologiques. Toujours tester les figures sur quelques personnes, juste pour voir ce qu'il en est.

Je vais essayer, à l'aide d'un exemple élémentaire, d'expliquer quelques-uns de ces points. On pourrait m'objecter qu'il est tellement élémentaire qu'il n'est d'aucune utilité, mais je le trouve suffisamment peu commun pour provoquer des discussions animées, même entre des mathématiciens distingués.

La Figure 4 est la représentation traditionnelle de la démonstration par Euclide du théorème de Pythagore. Elle coïncide parfaitement avec le texte d'Euclide et elle est encore à quelques variantes près fréquemment utilisée pour expliquer sa démonstration du théorème de Pythagore. Elle est moins souvent l'objet d'admiration. Je pense qu'il est juste de dire que la présentation

traditionnelle de la preuve donnée par Euclide et la figure qui l'accompagne, masquent ses charmes.

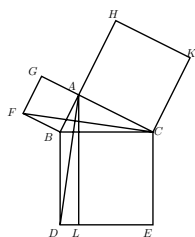


FIG. 4. Représentation traditionnelle de la preuve du théorème de Pythagore.

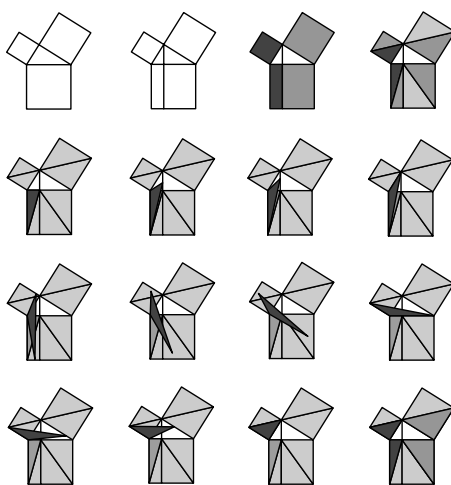


FIG. 5. Animation pour prouver le théorème de Pythagore.

Comme mes remarques précédentes sur la coordination des images et du texte l'ont suggéré, le plan que suit Euclide est rarement la meilleure façon d'exposer ses preuves, à moins d'avoir des motifs d'ordre historique. Dans un cours combinant graphiques sur ordinateur et géométrie que j'enseigne fréquemment à des étudiants de troisième année à l'université, je commence habituellement par une discussion sur les affinités, en particulier sur la façon dont elles préservent l'aire. Aussi simple que puisse paraître ce sujet, il peut mener à plusieurs représentations graphiques et à des aspects très subtils du concept d'aire chez Euclide, ainsi qu'aux améliorations qu'Hilbert a apporté à la structure logique d'Euclide. Vient alors une suite de figures suggérant encore une animation (voir Figure 5). On peut mesurer à quel point cela vaut mieux que de suivre Euclide au fait que, à ma connaissance, une fois expliquée, aucun étudiant ne l'a jamais oubliée. Voici certainement un cas où l'ordinateur a rendu l'exécution de calculs triviaux et redondants très simple et où la difficulté de faire des répétitions à la main aurait été un facteur inhibiteur.

Le premier à avoir eu l'idée de récrire les *Éléments* d'Euclide en s'attachant aux images semble être le mathématicien anglais Olivier Byrne, au dix-neuvième siècle. Sa version des six premiers Livres a été publiée en 1847 dans un livre bien connue des bibliophiles, sinon des mathématiciens, pour son usage remarquable de couleurs. Ce livre n'est pas un succès sans mélange, mais même ses défauts sont intéressants, et il s'avère une source fertile de projets pour des étudiants. « There is some merit in speaking of the red triangle instead of the triangle ABC, but not enough to give the method any standing. », comme l'a écrit le grincheux David Eugene Smith dans une note de bas de page². Ce jugement n'est vraiment pas juste. La technique de Byrne n'est pas irréprochable, et sa compréhension, en particulier du difficile Livre V, est très faible, mais il fait bien plus que simplement se référer à des couleurs plutôt qu'à des légendes. Il utilise les diagrammes au fil du texte avec efficacité et plusieurs de ses figures réussissent à transmettre des données, parfois même une preuve complète, par l'usage méticuleux et imaginatif de couleurs. En tout cas, cela contre-balance de façon intéressante les méthodes de présentation traditionnelles et je suppose que l'idée de base pourrait bien être utilisée dans les cours de mathématiques de tous niveaux.

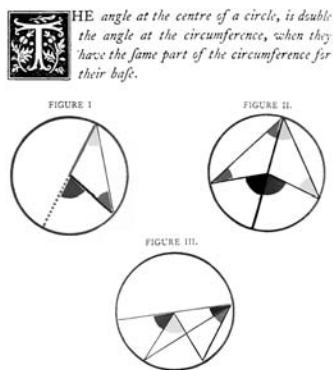


FIG. 6. Preuve graphique de Byrne du théorème de l'angle inscrit.

On peut avoir une idée du livre de Byrne en regardant l'extrait de sa preuve de III.20 reproduit à la Figure 6. Dans le livre, il y a un texte qui accompagne cette image, mais III.20 est un bon exemple d'endroit où le texte n'est presque pas nécessaire. Presque, mais pas entièrement. Peut-être quelques figures de plus auraient-elles rendu la compréhension plus facile, en montrant les données initiales plus clairement. Ces données sont un point sur un cercle et un arc de ce cercle ne contenant pas le point. On étudie ensuite un genre de triangle ayant le point pour un sommet et l'arc comme coté opposé. Les trois figures de Byrne correspondent aux trois différentes positions relatives du centre du cercle et du triangle. Je préfère, personnellement, une légère modification de la figure I de Byrne, qui semble être plus explicite (représentée à la Figure 7).

L'extrait de texte de la Figure 6 illustre bien le style de la presse, celui de Charles Whittingham, bien connu au dix-neuvième siècle pour ses tentatives

² cf. page 329 de son édition de *Budget of Paradoxes.*, Volume I, d'Augustus De Morgan

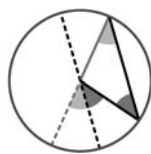


FIG. 7. Modification de la Figure 6.

pour faire revivre une presse de haute qualité. On dit que le coût du livre de Byrne était si élevé et la demande si faible que cela provoqua en 1853 la faillite de Whittingham. Quel éditeur, de nos jours, risquerait son entreprise familiale pour une édition d'Euclide ?

Il semble ne pas y avoir de doute quant à l'extrême excentricité de Byrne, dans un pays et une époque connus pour ne pas en manquer. Il était certainement un de ces « habitants de l'arrière cour des mathématiques » et, peut-être à juste titre, considéré par ses contemporains, comme un illuminé, comme le dit De Morgan de façon convaincante dans *A Budget of Paradoxes*. Il serait intéressant de connaître l'opinion de De Morgan sur la version d'Euclide de Byrne, mais malheureusement, je ne sais pas s'il en existe une trace dans ses écrits.

Un musée de bourdes

Une des raisons pour lesquelles les mathématiciens semblent avoir du mal avec les illustrations est qu'ils ont tendance à voir ce que l'illustration essaie de dire plutôt que ce qu'elle dit vraiment. Cette distinction est généralement considérée comme une vertu. Si, par exemple, la précision d'une illustration est critiquée, on dira souvent, pour sa défense, qu'en mathématiques une image est destinée seulement à donner une idée générale et n'a pas besoin d'être exacte. Les images sont trompeuses, dit-on, et on peut parfois être conduit à confondre image attrayante et raisonnement logique. Ce que Littlewood a dit à ce sujet est une de mes citations préférées : « A heavy warning used to be given that pictures are not rigorous ; this has never had its bluff called and has permanently frightened its victims³. » Il poursuit en disant « pictorial arguments, while not so purely conventional, can be quite legitimate ». Il en cite ensuite quelques exemples fascinants.

Des mathématiciens vont même jusqu'à dire que de mauvais graphiques ont de la valeur puisque les mathématiques sont sensées enseigner à raisonner, à ne pas faire confiance à son intuition. Cette assertion frôle le non-sens et sert souvent d'excuse à la paresse ou à l'incompétence. Les images peu soignées jouent peut-être un rôle en montrant comment se défendre de fausses intuitions, mais il s'agit là d'un sujet trop subtil pour conclure au premier abord. Mon expérience me conduit à affirmer exactement le contraire : de bons graphiques séduisent un grand nombre de gens, y compris ceux qui, autrement auraient une perception négative de l'intérêt et de l'importance des mathématiques en général.

Il pourrait sembler que ce que j'ai exposé jusqu'à présent est si évident qu'il n'est pas nécessaire d'insister. Ce n'est pas le cas si j'en juge par ce que

³ in *Littlewood's Miscellany*, 1986, p. 54.

je vois dans la littérature. Les bourdes dans les images sont omniprésentes et l'utilisation maladroite d'illustrations est encore plus fréquente. Les erreurs peuvent être très gênantes, et au pire mener à une grave confusion. Pour une raison quelconque, que je ne comprends pas, les erreurs dans les illustrations semblent être plus acceptables que les erreurs dans le texte. On est ici face à un paradoxe implicite — les erreurs dans les illustrations sont en même temps plus et moins visibles. Cela s'explique en partie par la diversité des sources d'erreurs graphiques ou du moins de leurs causes.

Tromperie volontaire

Il y a certainement une part de vérité dans l'affirmation qu'il faut être prudent avec l'interprétation des images. En fait, dans certaines circonstances, une image inexacte et trompeuse peut avoir de l'intérêt. Récemment, dans un document émanant du Gouvernement Provincial qui tentait d'expliquer aux enseignants du Secondaire un certain nombre de choses sur le curriculum de géométrie, on trouvait le problème suivant : « A circle, which has as its diameter side AB of the equilateral triangle ABC, intersects the other two sides of the triangle at D and E. If the diameter of the circle is 16 cm, find the area of the quadrilateral ABDE. » Il était accompagné de la Figure 8.

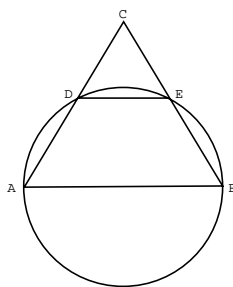


FIG. 8. Dessin intentionnellement trompeur.

Les données impliquent que la longueur de AD est égale à celle de DC. Donc, le grand triangle ABC est fait de quatre copies du petit triangle CDE, et la réponse est simple à calculer. Cependant, l'image n'est pas dessinée avec précision. Bien qu'on affirme que AB est un diamètre, le dessin ne suggère pas tout à fait ça, donc il n'est pas clair à l'œil que AD et DC ont même longueur. Il semblerait même le contraire! Je présume que pour la plupart des étudiants, seule une réflexion sérieuse et peut-être une légère tendance au scepticisme les mèneront à une réponse juste, en utilisant leur raisonnement pour contrebalancer ce qu'ils voient. Ce n'est pas nécessairement une mauvaise chose. L'illusion repose sur le fait que déterminer à l'œil la longueur d'un diamètre horizontal n'est pas un problème bien posé et c'est un bon truc à utiliser de temps en temps pour forcer les étudiants à réfléchir plutôt qu'à deviner. Il y a aussi quelques autres manipulations subtiles qui permettent la supercherie.

Inattention

Voici un bel exemple de ce que les mathématiciens sont souvent aveuglés par leurs attentes. Il y a plusieurs années, Branko Grünbaum mentionna à la Mathematical Association of America (MAA) que l'image qu'ils utilisaient comme logo (Figure 9), sensée représenter un icosaèdre régulier, était en réalité une impossibilité mathématique. Les lignes indiquées dans la figure sont parallèles en trois dimensions. Si l'objet tridimensionnel est représenté en deux dimensions par une projection orthogonale, elles demeureront parallèles, et si il est représentée en perspective elles vont se croiser en un seul point, le point « à l'infini ». Les mathématiques ne furent pas utilisées pour dessiner cette figure.



FIG. 9. logo de la MAA : icosaèdre régulier avant correction.

La MAA réagit plutôt bien à cette découverte embarrassante. Grünbaum publia à ce propos un article dans un des journaux de la MAA (*Mathematics Magazine*, janvier 1985), mentionnant d'autres illustrations mathématiques encore plus fausses trouvées dans la littérature. La plupart de ces erreurs peuvent être expliquées par la difficulté de dessiner des figures en trois dimensions. L'éditrice du journal de l'époque, Doris Schattsneider écrivit un appendice pour cet article, dans lequel elle retrace une partie de l'histoire de ce logo et de ces erreurs, et elle ajoute que la nouvelle image « would become the master for all new renderings of the MAA logo ». Sans l'ombre d'un doute, elle pensait ce qu'elle disait, mais le diable est ressorti de sa boîte, comme le montrent les deux logos de la Figure 10, extraits de la couverture du *Monthly*. Le vieux logo revint à la charge ! Apparemment, ce n'est qu'en 1998 que l'on remarqua l'erreur, qui ne fut corrigée que très récemment, comme le montre la Figure 11.



FIG. 10. Réintroduction d'une erreur dans le logo de la MAA en couverture de l'*American Mathematical Monthly* en 1996, avant et après.

J'étais désolé de voir que, cette fois-ci, le logo fut corrigé sans tambour ni trompette. On peut supposer que la modification de 1996 a été faite pour des raisons esthétiques tout à fait légitimes, puisque l'icosaèdre du début de 1996 est en noir et que son remplaçant — qui est exactement celui qui avait motivé les plaintes de Grünbaum — est en bleu, qui semble être la couleur emblématique de la MAA. On peut dire également que l'image antérieure avait les ombres trop sombres et bien que correcte mathématiquement, était bien autrement

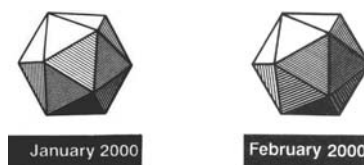


FIG. 11. Correction de l'erreur du logo de la MAA en couverture du Monthly en 2000, avant et après.

mal conçue. Mais n'aurait-il pas été aisé pour un mathématicien de réaliser une figure correcte en remplacement ? La bonne nouvelle est qu'à présent, il ne semble y avoir aucune raison de revenir en arrière.

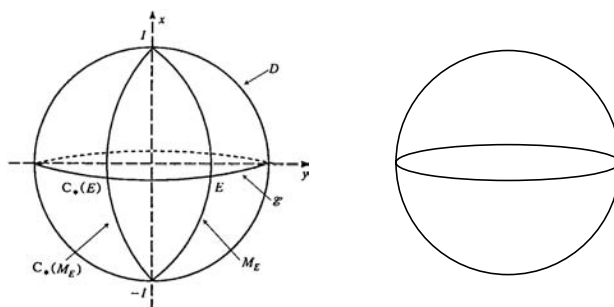


FIG. 12. Sections elliptiques d'une sphère, représentées incorrectement, puis correctement.

L'ironie ne s'arrête pas là. Quiconque feuillette le journal, de la couverture de mars 1996 à celle d'avril, apercevra en passant le diagramme de gauche de la Figure 12, montrant une sphère et plusieurs sections « elliptiques ». À fin de comparaison, le dessin de droite illustre une section elliptique correcte. Il est vrai que la maladresse de ces courbes non elliptiques n'invalident pas la figure de gauche, mais nombreux sont ceux qu'elle gênera. Quoi qu'il en soit, les « vraies » sections sont certainement plus... disons, plaisantes.

Vu que cette bourde entre dans une des catégories que Grünbaum mentionne dans son article, Doris Schattschneider a visé parfaitement juste en citant à la fin de l'appendice de cet article : « Plus ça change, plus c'est la même chose. »

Paresse

Dans un de ses livres sur l'information graphique, Edward Tufte reproduit une figure provenant des *Principes philosophiques* de Descartes, qui arrive à suggérer finement le sens de « to fly off on a tangent » (voir la Figure 13).

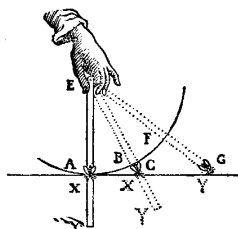


FIG. 13. Dessin de « flying off on a tangent », provenant des *Principes de Philosophie* de Descartes.

Ceci pourrait nous inciter à penser que Descartes était exceptionnellement méticuleux dans son usage des images, et en effet, on en a plusieurs exemples dans les *Principes* ainsi que dans les exposés techniques qui accompagnent le *Discours de la Méthode*. Le troisième de ces essais est *La Géométrie* où ont été publiés pour la première fois une description d'un système de coordonnées et les équations de courbes de degré supérieur à deux. Certaines des illustrations, en particulier dans le premier essai, *La Dioptrique*, sont à juste titre reconnues pour leur habile combinaison d'art et de mathématiques. Il se trouve que nous en savons un peu, bien peu, sur la création de ces illustrations.

La première mention de ces figures se trouve dans une lettre adressée à Mersenne dans laquelle Descartes discute de la possibilité de publier le *Discours de la Méthode* à Paris, avec son aide. Une des difficultés, dit-il, est que les figures sont dessinées de sa main et sont donc très mauvaises. Mersenne devra « tirer l'intelligence du texte » pour pouvoir en être l'interprète auprès du graveur, parce qu'autrement, elles seraient impossibles à comprendre. Il ne semble pas qu'il y ait de dessins autographes intéressants réalisés par Descartes lui-même ; on ne peut ainsi vérifier si de l'autodénigrement dicte ses paroles. Ceci contraste avec la situation d'autres mathématiciens du dix-septième siècle, comme Harriot ou Newton, qui étaient des dessinateurs à la fois minutieux et talentueux et dont un grand nombre de croquis ont survécu jusqu'à aujourd'hui.

À la fin, le livre fut publié à Leiden par l'imprimerie de Jan Maire, d'une taille relativement petite, avec l'aide de Huygens l'Aîné. Vers la fin de 1635, Huygens proposa à Descartes que les figures du livre utilisent la gravure sur bois plutôt que des gravures imprimées afin qu'il soit possible de les insérer au côté du texte où elles étaient discutées plutôt que regroupées dans quelques pages séparées insérées à la fin du livre, comme il était coutume de le faire à l'époque. Cette remarque, profonde en réflexion, suggère que c'est à Huygens que l'on doit ce que Tufte trouva admirable dans les diagrammes de Descartes. Lorsqu'il se réfère à une figure qui a déjà été exposée, elle est répétée. C'est une technique simple qui pourrait être utilisée bien plus souvent, car il est très agaçant d'avoir à tourner d'une page à l'autre pour pouvoir suivre une argumentation.

Les planches d'impression furent finalement fondées sur des dessins réalisés par le jeune Frans van Schooten, qui, par la suite joua un rôle important dans la vie de Descartes. Furent-ils réalisés par van Schooten lui-même, artiste et mathématicien ? Van Schooten dessina également les figures pour l'ouvrage ultérieur *Principia Philosophiae*, et Descartes nota, au moins une fois, sa satisfaction pour le travail qu'il accomplit. Mais en dépit de cela, il semble qu'il ait fait preuve envers van Schooten d'une gratitude quelque peu réticente.

On peut en déduire, à juste titre, que les figures avaient une réelle importance pour Descartes. Et pourtant, quelques erreurs lui ont échappé. La plus intéressante est celle reproduite à la Figure 14, qui accompagne un texte tentant d'expliquer la réfraction en terme simple — on parle ici de la trajectoire d'une balle de tennis avec une hypothèse quelque peu artificielle sur les changements de vitesse. D'après le texte, il est clair que la distance HF est supposée être le double de la distance AH, et, le fait que ce n'est pas le cas, a un effet déroutant sur le diagramme. On peut aisément imaginer l'embarras de Descartes lorsque Mersenne lui envoya une lettre du philosophe anglais Hobbes, bien connu à l'époque pour son intérêt bienveillant mais souvent maladroit en mathématiques, qui indiquait que le diagramme contredisait le texte. Dans sa réponse, Descartes rejeta l'erreur sur l'imprimeur, mais cette excuse ne semble pas valable à la lumière de ce que l'on connaît de ses relations avec van Schooten.

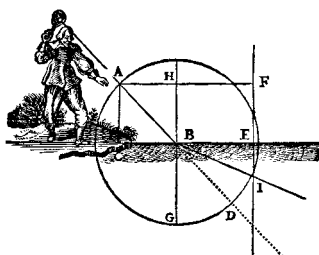


FIG. 14. Diagramme de Descartes en contradiction avec le texte.

La présentation de Descartes dans ses essais techniques qui accompagnaient le *Discours* était connue à l'époque pour son manque de discernement. C'était particulièrement vrai pour *La Géométrie*, le plus innovateur des trois, qui a joué un rôle extrêmement important dans le développement des mathématiques vers la fin du siècle. Cependant, son importance vient probablement en grande partie de la seconde édition en latin, traduite par le même Frans van Schooten, dans laquelle ce dernier ajouta beaucoup de son propre matériau et corrigea quelques erreurs graphiques. C'est cette édition qui devint un manuel populaire et qui, en particulier, semble avoir été la principale introduction de Newton à la géométrie. C'est dommage que nous n'en sachions pas autant que nous le désirerions au sujet de ce talentueux van Schooten.

Fausse économie

Alors qu'il avait seulement dix ans, Pascal découvrit à propos des coniques plusieurs faits nouveaux et remarquables. Il annonça ses découvertes dans ce qui semble être une sorte d'affiche intitulée *Essai pour les coniques*, une grande feuille sur laquelle ses résultats étaient résumés. Cette affiche est un des documents mathématiques parmi les plus rares ; il en existe aujourd'hui exactement deux copies. L'espace sur cette feuille, bien qu'elle fut assez grande, était sévèrement limité, et par conséquent, Pascal réussit ce que je crois être un record — sur l'illustration de la Figure 15, les diagrammes relatifs à cinq propositions distinctes sont superposés ! Dans l'édition la plus récente des travaux de Pascal, celle de la Pléiade, les éditeurs ont manifestement choisi de décomposer cette figure en ses différentes parties.

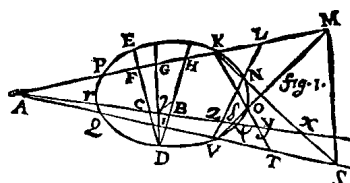


FIG. 15. Fausse économie : diagrammes superposés de Pascal.

J'ai en partie mentionné des erreurs graphiques de Descartes et Pascal pour leur intérêt historique intrinsèque. On pourrait soulever l'objection que, de nos jours, ces erreurs n'ont plus d'intérêt, mais en réalité, j'aurais facilement pu trouver les mêmes erreurs dans des publications plus récentes. Une de mes raisons pour prendre Descartes et Pascal en exemple était d'éviter d'offusquer des mathématiciens vivants. Et aussi, j'imagine, afin de rassurer ceux qui font des erreurs similaires en leur montrant qu'ils sont en la meilleure compagnie.

Remarques finales

Il y a aussi d'autres obstacles à de bonnes figures, comme, par exemple, la tentation de simplement suivre les traditions ou la difficulté à surmonter les obstacles techniques. Dans cet article, je ne discuterai pas réellement du second problème, mais nous allons voir plus tard un exemple du premier, d'un intérêt historique certain, relatif à une ancienne impression d'Euclide.

Plus sur l'histoire des illustrations mathématiques

Il n'est pas sans intérêt d'enquêter sur les origines de beaucoup de nos pratiques en matière d'illustration mathématique. Plusieurs sont très anciennes.

La plus vieille figure

Les toutes premières images mathématiques connues sont sur des tablettes d'argile babyloniennes. Malheureusement pour nous, au temps d'Euclide, les mathématiques étaient rédigées sur du papyrus, qui ne vieillit pas aussi bien que l'argile. Un des tout premiers fragments d'Euclide qui ait été retrouvé, et donc une des premières images mathématiques liées à un raisonnement mathématique, est une petite pièce de papyrus de la fameuse décharge d'Oxyrhynchus, datant approximativement de l'an 300 de notre ère. Il contient à la fois la proposition et la figure II.5 des *Éléments* et est intéressant pour plusieurs raisons. J'ai reproduit à la Figure 16 une copie de la photo publiée dans l'article d'Arthur Hunt, paru en 1914.

Je n'énoncerai pas ici exactement la Proposition II.5. Je dirai seulement qu'il s'agit essentiellement de l'équivalent géométrique de l'identité algébrique $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

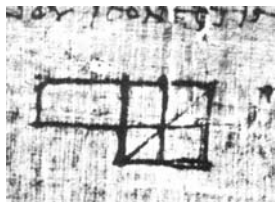


FIG. 16. Photographie d'un dessin pour II.5 des *Éléments* d'Euclide datant d'environ 300 apr. J.C.

Cette figure se distingue de toutes les autres illustrations d'Euclide que j'ai vues parce qu'elle n'est pas annotée. Ceci peut à peine servir pour prouver qu'il s'agissait d'une pratique courante de l'époque, encore moins d'Euclide. Mais, je crois que la convention de lier ensemble texte et figures à l'aide de notations est souvent inopportune, et il serait intéressant de savoir comment elle s'est développée. Par exemple, cette convention est rarement utilisée de nos jours dans un exposé oral, à moins qu'il s'agisse d'une exposition excessivement formelle. La chose qu'il est naturelle de faire à l'oral est de tirer avantage de la dimension supplémentaire qu'est le temps pour construire une figure, effaçant ou ajoutant des éléments au fur et mesure que le discours avance. C'était certainement comme cela que les Grecs s'expliquaient l'un l'autre les mathématiques.

La tradition grecque, que nous suivons généralement, n'est pas la seule que nous connaissons. Ce que je sais de la plus ancienne tradition chinoise me pousse à croire qu'elle est sérieusement différente. J'ai vu des reproductions qui montrent probablement de très anciennes illustrations faites pour accompagner le théorème de Pythagore, et dans lesquelles le texte le plus important indique comment colorier la planche de la figure, qui est, elle, en noir et blanc. Il y a par exemple, le mot signifiant « rouge » sur la partie du diagramme qui est sensée être coloriée en rouge. J'ai été incapable d'en apprendre beaucoup sur cette technique.

— Le premier livre imprimé de mathématiques :

La première édition (imprimée) des *Éléments de Géométrie* d'Euclide (en latin, évidemment) a été publiée en 1482 à Venise qui, à l'époque, était l'endroit où la technique d'imprimerie était la plus évoluée. Il est sorti de la presse d'un imprimeur allemand Erhard Ratdolt, qui avait quitté Augsbourg. Ratdolt s'était spécialisé dans les publications techniques et pensait apparemment depuis longtemps à sortir une édition d'Euclide, comme il l'indique dans sa préface. Cette édition présente un intérêt technique pour l'histoire de l'impression dans la mesure où elle contient beaucoup plus d'illustrations que n'importe quel autre livre de son époque. Ratdolt révèle qu'il a retardé sa tentative de publier Euclide parce qu'il avait peur de bâcler les figures. Il nous dit aussi qu'il a travaillé longtemps pour inventer un moyen de reproduire les composantes des figures géométriques aussi facilement que du texte, mais on ne sait pas exactement ce qu'il a voulu dire. La meilleure conjecture est qu'il a construit ses figures en utilisant une petite quantité de composants simples et en les insérant dans une matrice comme celle utilisée pour composer le texte. Sans cette technique, la haute qualité des images serait revenue extrêmement chère.

Les copies de cette édition ne sont pas rares. Il resterait aujourd'hui encore deux cents copies de l'édition Ratdolt, sur un tirage original estimé à environ cinq cents. Ce n'est pas un titre de gloire pour les mathématiciens puisqu'il est souvent mentionné dans la vaste littérature sur les livres anciens, que les livres du quinzième siècle qui nous sont parvenus ont certainement été préservés précisément parce qu'ils n'ont pas été lus !

En général, les figures que j'ai vues dans cette édition ne sont pas trop différentes de celles auxquelles nous sommes maintenant habitués. Il y a toutefois quelques exceptions curieuses. La figure qui est techniquement la plus difficile est celle qui accompagne la Proposition XXII.17. C'est un lemme pour XII.18, qui affirme que si le diamètre d'une sphère est multiplié par un scalaire c , son volume est multiplié par c^3 . Le résultat analogue pour les polyèdres est connu à ce point, et la preuve de XII.18 (qui est, ainsi que plusieurs preuves d'Euclide, équivalente à une sorte d'intégration) exige qu'entre deux sphères concentriques, on puisse toujours trouver un tel polyèdre. C'est l'objet de XII.17. C'est le seul endroit dans Euclide où une surface courbe à trois dimensions doit être dessinée, et dans un contexte compliqué. La Figure 17 reproduit la figure de l'édition de Ratdolt.

La première impression à la vue de la figure de Ratdolt est certainement de la confusion. En tentant de m'expliquer son étrange qualité, j'ai pensé qu'il était simplement handicapée par des limitations d'ordre technique — qu'il était simplement incapable de dessiner une image plus réaliste en raison de la minceur de son nécessaire à dessin. Mais récemment, j'ai eu l'occasion de prendre connaissance d'un manuscrit de 1398, fort probablement de la même famille que celui utilisé par Ratdolt, et la figure est presque exactement la même que la sienne. Ainsi son excuse est-elle certainement qu'il suivait simplement la tradition et ne voyait pas de motif de faire quoi que se soit d'autre. Il serait intéressant de savoir s'il a consulté un mathématicien au cours de la production de son édition, mais ma conjecture est qu'il ne l'a pas fait.

Il a pu connaître d'autres traditions, du moins en principe. Dans l'édition grecque définitive de J. Heiberg (1883), où la plupart des figures relèvent d'une

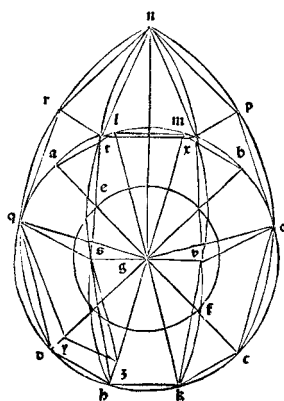


FIG. 17. Diagramme « en trois dimensions » de l'édition d'Euclide par Ratdolt.

tradition manuscrite, la figure accompagnant XII.17 est la Figure 18. C'est une figure bien meilleure que celle de Ratdolt, quoiqu'en fait pas beaucoup plus difficile à produire. Par exemple les arches semblent être faites de deux arcs circulaires attachés ensemble, que Ratdolt aurait aussi pu faire facilement.

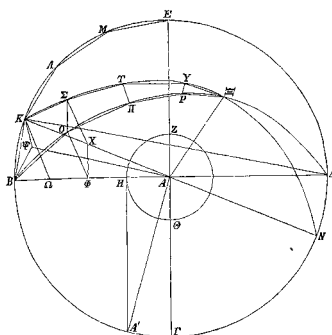


FIG. 18. Même diagramme qu'à la Figure 17, mais dans l'édition de Heiberg.

Il était inévitable que l'édition pionnière de Ratdolt des œuvres d'Euclide ait de sérieuses faiblesses, sur lesquelles une génération à peine postérieure se jeta joyeusement. La plupart de ses faiblesses viennent de ses sources médiévales et non d'erreurs qui lui seraient dues. Néanmoins, c'était vraiment une époque incroyable : combien d'imprimeurs parlant couramment le latin et capables de publier des livres de mathématiques sans les conseils de professionnels peut-on trouver au vingt-et-unième siècle ? Combien d'entre eux resteraient éveillés la nuit réfléchissant au moyen de faire de meilleures figures afin que (pour traduire Ratdolt) les livres mathématiques puissent dès lors affluer.

C'est probablement à la lumière de la distinction médiévale entre *ratio* et *intelligentia* que l'on devrait interpréter l'utilisation que fait Ratdolt dans sa préface du mot *intelligi*, quand il dit que, sans images, les mathématiques ne peuvent être comprises.

— Critique fondamentale :

Aux yeux de certains, la majorité de mes critiques ne sont rien d'autre que du pinaillage. Mais, je prétends que de légères inexactitudes ont plus d'importance qu'on pourrait le croire au premier coup d'œil. La frustration provoquée par l'interprétation d'un diagramme imprécis ou mal dessiné peut très bien dissuader un fort pourcentage d'étudiants, entre autres, de poursuivre leur lecture, alors qu'elle fera simplement hésiter un mathématicien. Même de petites erreurs dans un dessin peuvent être déroutantes, frustrantes, agaçantes et gênantes — si elles s'accumulent, elles peuvent devenir fatales. Je ne comprends pas tout à fait pourquoi les exigences pour les graphiques sont à ce point moindres que celles pour le texte. Combien connaît-on de cas où un éditeur a demandé qu'une image soit, au moins, bien dessinée ? Ou a menacé de différer une publication jusqu'à ce que d'importantes améliorations soient faites au niveau graphique ? Je peux penser à plusieurs articles très récents pour lesquels de telles critiques graphiques seraient légitimes.

Évidemment, j'ai évité une question importante. Il n'est pas facile de produire de bonnes illustrations pour un exposé mathématique. Le faire déplace une partie du travail nécessaire à la compréhension du lecteur vers l'auteur, ce qui n'est pas du goût de tous les auteurs. Mais, cela aurait souvent l'avantage d'augmenter le nombre des lecteurs, parfois de beaucoup.

Ce que j'ai présenté ici n'est pas nouveau, mais je suis certain que beaucoup plus d'efforts sont consacrés à vanter les vertus de l'entendement mathématique plutôt qu'à faire comprendre les mathématiques. Il est plus simple, et certainement plus objectif, de vérifier pas à pas une chaîne de raisonnements, que de placer cette chaîne dans un contexte plus général dans lequel une compréhension globale peut être atteinte. La plupart du temps, probablement, les mathématiciens prétendent simplement qu'une accumulation d'exemples, ainsi que quelques habiletés initiales à assembler une chaîne de raisonnement, vont mener à une perspective globale. Et c'est peut-être vrai, mais seulement pour un pourcentage notoirement petit d'êtres humains. Pour les autres, les illustrations sont leur meilleur espoir.

À propos des images

La référence de Tufte à Byrne et la figure chinoise se retrouvent dans *Envisioning Information*, dans une rubrique concernant l'utilisation des couleurs pour la transmission d'information. Les figures de Byrne (Figures 6 et 7) sont tirées de son édition de 1847 d'Euclide. Grâce à un effort collectif à l'Université de Colombie-Britannique, l'édition complète a été photographiée et placée sur internet à l'adresse <http://www.math.ubc.ca/people/faculty/cass/Euclid/>.

J'ai redessiné l'image géométrique de la Figure 8 à partir de celle parue en septembre 1999 dans *Geometry Resource Package*.

Toutes les images de la MAA (Figures 9 à 12) sont tirées de l'*American Mathematical Monthly* : mars 1996, avril 1996, janvier 2000 et février 2000.

La première image de Descartes (Figure 13) provient de l'édition de Charles Adam et Paul Tannery datant de 1902 des *Œuvres de Descartes*. La *Thomas Fischer Rare Book Library* à l'Université de Toronto m'a aidé à reproduire

l'autre (Figure 14) à partir de la première édition de *La Géométrie*, actuellement en sa possession.

Le dessin de Pascal représenté à la Figure 15 a été scanné à partir d'une reproduction de son affiche contenu dans l'édition de 1906 de l'intégralité de ses travaux. L'original est à la Bibliothèque National de Paris.

Le papyrus de la Figure 16 est la plaque X de l'article d'Arthur S. Hunt du *Journal of Egyptian Archeology*, volume I, 1914. Le texte est translittéré d'une image du volume I (papyrus 29) de *The Oxyrhynchus Papyri*, une collection commencée par Grenfell et Hunt en 1898 et qui existe toujours. Le fragment de papyrus se trouve actuellement à l'University of Pennsylvania.

La Figure 17, l'édition d'Euclide de Ratdolt de 1482, provient aussi de la Thomas Fisher Library.

La Figure 18, version grecque définitive d'Euclide de Heiberg est tirée d'un exemplaire de l'édition originale de 1883.

Le proverbe japonais a été réalisé par mon épouse, Yuko Shibata.

J'ai réalisé toutes les autres images directement en PostScript. La suite d'images PostScript pour le théorème de Pythagore est tirée d'une version réellement animée construite en langage de programmation Java par Jim Morey, qui était à cette époque étudiant de cycle supérieur à l'Université de la Colombie-Britannique. Elle peut, ainsi que d'autres animations Java du théorème de Pythagore, être vue sur le site internet mentionné plus haut.