

Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands (d'après Laurent Lafforgue)

Gérard Laumon (CNRS et Université de Paris-Sud, UMR 862)

Soient F un corps de nombres (une extension finie de \mathbb{Q}) ou de fonctions (une extension finie de $\mathbb{F}_p(t)$ pour un nombre premier p), \overline{F} une clôture séparable de F et \mathbb{A} l'anneau des ad eles de F . Un problème fondamental de la théorie des nombres est de classifier les représentations du groupe de Galois $\text{Gal}(\overline{F}/F)$. Un problème fondamental de la théorie des groupes est de déterminer la décomposition spectrale de l'espace $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ des formes automorphes pour tout groupe réductif G sur F .

La théorie du corps de classes abélien d'Artin-Tate, que l'on peut voir comme un procédé explicite de construction du plus grand quotient abélien de $\text{Gal}(\overline{F}/F)$ à partir du groupe des classes d'id eles $F^\times \backslash \mathbb{A}^\times$, établit un premier lien entre ces deux problèmes. Le principe de functorialit e de Langlands est un vaste ensemble d' enonc es, la plupart conjecturaux, qui renforcent considérablement ce lien et assure que les deux problèmes ci-dessus sont en fait deux facettes d'un même problème.

Sur les corps de fonctions, la base du principe de functorialit e est la correspondance de Langlands pour GL_r sur un corps de fonctions. Pour $r = 1$, cette correspondance n'est autre que la théorie du corps de classes abélien. Pour $r = 2$, elle a été établie par V. Drinfeld il y a plus de 25 ans. Le cas général vient d'être d emontr e par L. Lafforgue ; sa preuve suit la stratégie introduite par Drinfeld pour traiter le cas $r = 2$.

Nous nous proposons ici de formuler le théorème de Lafforgue et de présenter les objets géométriques qui interviennent dans la preuve : les champs de chtoucas de Drinfeld et leurs compactifications.

Pour alléger l'expos e, nous nous restreindrons aux formes automorphes et représentations de Galois partout non ramifiées et aux chtoucas sans niveau.

1. Formes automorphes, représentations de Galois et  enonc e de la correspondance de Langlands

On fixe une fois pour toutes une courbe X projective, lisse et géométriquement connexe sur un corps fini \mathbb{F}_q  a q élements. On note $|X|$ l'ensemble des points fermés de X et F le corps des fonctions rationnelles sur X .

Chaque $x \in |X|$ définit une valuation non archimédienne $F^\times \rightarrow \mathbb{Z}$, notée aussi x , qui envoie une fonction rationnelle non identiquement nulle sur son ordre d'annulation en x . On note F_x le compl et e de F pour la valuation x et

on note encore $x : F_x^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ le prolongement naturel de x . Muni de cette valuation discrète, F_x est un corps local non archimédien d'égales caractéristiques, d'anneau des entiers $\mathcal{O}_x = \{0\} \cup \{a \in F_x^\times \mid x(a) \geq 0\}$. On note $\kappa(x)$ le corps résiduel de \mathcal{O}_x ; c'est une extension de \mathbb{F}_q , de degré fini noté $\deg(x)$, et c'est donc un corps fini à $q^{\deg(x)}$ éléments. Le choix d'une uniformisante ϖ_x de \mathcal{O}_x identifie $\mathcal{O}_x \subset F_x$ à $\kappa(x)[[\varpi_x]] \subset \kappa(x)((\varpi_x))$.

L'anneau des adèles de F est le produit restreint

$$\mathbb{A} = \{a = (a_x)_{x \in |X|} \mid a_x \in \mathcal{O}_x \text{ pour presque tout } x\} \subset \prod_{x \in |X|} F_x$$

où l'expression « pour presque tout x » signifie « pour tous les x sauf un nombre fini ». L'anneau produit $\mathcal{O} := \prod_{x \in |X|} \mathcal{O}_x$ est bien sûr un sous-anneau de \mathbb{A} et l'image du plongement diagonal $F \hookrightarrow \prod_{x \in |X|} F_x$ est contenue dans \mathbb{A} .

On munit \mathcal{O} de la topologie produit des topologies x -adiques des \mathcal{O}_x ; on obtient ainsi un anneau topologique compact. L'anneau \mathbb{A} admet une unique structure d'anneau topologique qui prolonge celle de $\mathcal{O} \subset \mathbb{A}$ et pour laquelle \mathcal{O} est ouvert dans \mathbb{A} . L'image de F par le plongement diagonal est un sous-anneau discret de \mathbb{A} (l'intersection $F \cap \mathcal{O} = \mathbb{F}_q$ est finie).

Pour tout schéma en groupes linéaires G sur \mathbb{F}_q , le groupe des points adéliques $G(\mathbb{A})$ est naturellement muni d'une structure de groupe topologique localement compact pour laquelle $G(\mathcal{O}) \subset G(\mathbb{A})$ est un sous-groupe compact ouvert et $G(F) \subset G(\mathbb{A})$ est un sous-groupe discret.

On dispose d'un homomorphisme de groupes $\deg : \mathbb{A}^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ défini par

$$\deg(a) = - \sum_{x \in |X|} \deg(x)x(a_x).$$

Cet homomorphisme est surjectif et est identiquement nul sur F^\times et sur \mathcal{O}^\times . Son noyau est compact modulo F^\times ; en d'autres termes, pour tout $a \in \mathbb{A}^\times$ de degré non nul, le groupe quotient $F^\times \backslash \mathbb{A}^\times / \mathcal{O}^\times a^\mathbb{Z}$ est fini.

1.1. Formes automorphes cuspidales (partout non ramifiées)

Soit r un entier ≥ 1 . On considère le groupe adélique $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, son sous-groupe discret $\mathrm{GL}_r(F)$ et son sous-groupe compact ouvert

$$K = \prod_{x \in |X|} K_x = \prod_{x \in |X|} \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_x) = \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}).$$

Pour tout $x \in |X|$, on note dg_x la mesure de Haar sur $\mathrm{GL}_r(F_x)$ normalisée par $\mathrm{vol}(K_x, dg_x) = 1$. La mesure produit $\prod_{x \in |X|} dg_x$ induit la mesure de Haar dg sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ qui est normalisée par $\mathrm{vol}(K, dg) = 1$.

Un *sous-groupe parabolique standard* de GL_r est un sous-groupe algébrique fermé contenant le sous-groupe algébrique des matrices triangulaires supérieures. Chaque sous-groupe parabolique standard P admet la décomposition de Levi standard $P = M_P U_P$ où U_P est le radical unipotent de P et M_P est l'unique sous-groupe de Levi de P contenant le tore maximal des matrices diagonales. Les sous-groupes paraboliques standards de GL_r sont en bijection avec les suites d'entiers $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_s = r$, c'est-à-dire les décompositions

$r = (r_1 - r_0) + \dots + (r_s - r_{s-1})$ de r en entiers strictement positifs. Si P correspond à $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_s = r$ et si on écrit l'élément courant de GL_r comme une matrice

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{s1} & \cdots & g_{ss} \end{pmatrix}$$

par blocs g_{ij} de taille $(r_i - r_{i-1}) \times (r_j - r_{j-1})$, P est le sous-groupe des matrices « triangulaires supérieures » ($g_{ij} = 0$ pour tous $i > j$), U_P est formé des matrices telles que $g_{ij} = 0$ pour tous $i > j$ et que g_{ii} est la matrice identité pour tout i , et M_P est le sous-groupe des matrices « diagonales » ($g_{ij} = 0$ pour tous $i \neq j$). En particulier, M_P est canoniquement isomorphe à $\mathrm{GL}_{r_1 - r_0} \times \dots \times \mathrm{GL}_{r_s - r_{s-1}}$.

Une *forme automorphe cuspidale* (partout non ramifiée pour GL_r sur F) est une fonction $\varphi : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ ayant les propriétés suivantes :

- 1) $\varphi(\gamma g k) = \varphi(g)$, $\forall \gamma \in \mathrm{GL}_r(F)$, $\forall g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ et $\forall k \in K$;
- 2) il existe un élément $a \in \mathbb{A}^\times$ de degré non nul, tel que $\varphi(ga) = \varphi(g)$, $\forall g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$;
- 3) pour tout sous-groupe parabolique standard propre $P \subsetneq \mathrm{GL}_r$, le *terme constant*

$$\varphi_P : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad g \mapsto \int_{U_P(F) \backslash U_P(\mathbb{A})} \varphi(ug) du,$$

est identiquement nul (ici du est n'importe quelle mesure de Haar sur l'espace homogène compact $U_P(F) \backslash U_P(\mathbb{A})$).

On note L_{cusp} l'espace de ces formes et, pour tout élément $a \in \mathbb{A}^\times$ de degré non nul, on note $L_{\mathrm{cusp}}(a)$ le sous-espace de L_{cusp} formé des φ telles que $\varphi(ga) = \varphi(g)$, $\forall g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$. La finitude du quotient $F^\times \backslash \mathbb{A}^\times / \mathcal{O}^\times a^{\mathbb{Z}}$ assure que

$$L_{\mathrm{cusp}} = \bigcup_{n>0} L_{\mathrm{cusp}}(a^n).$$

Proposition 1. *Il existe un sous-ensemble fini $\Omega(a) \subset \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ tel que le support de toute fonction $\varphi \in L_{\mathrm{cusp}}(a)$ soit contenu dans $\mathrm{GL}_r(F) \Omega(a) K a^{\mathbb{Z}} \subset \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$.*

En particulier, l'espace $L_{\mathrm{cusp}}(a)$ est de dimension finie et peut être muni du produit scalaire hermitien défini positif

$$(\varphi_1, \varphi_2) := \int_{\mathrm{GL}_r(F) \backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) / a^{\mathbb{Z}}} \overline{\varphi_1(g)} \varphi_2(g) dg. \quad \square$$

Soit

$$\mathcal{C}_c(K \backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) / K)$$

l'espace vectoriel sur \mathbb{C} des fonctions complexes à support compact sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ qui sont invariantes par translations à gauche et à droite par les éléments de

K . L'algèbre de Hecke \mathcal{H} est par définition cet espace vectoriel muni du produit de convolution défini par

$$(f_1 * f_2)(g') = \int_{\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})} f_1(g'g^{-1})f_2(g)dg, \quad \forall g' \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}).$$

Elle admet pour unité la fonction caractéristique e_K de K .

On munit L_{cusp} d'une structure de \mathcal{H} -module à droite en posant

$$(\varphi \cdot f)(g') = \int_{\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})} \varphi(g'g^{-1})f(g)dg, \quad \forall g' \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}),$$

pour tout $\varphi \in L_{\mathrm{cusp}}$ et tout $f \in \mathcal{H}$.

Pour chaque $a \in \mathbb{A}^\times$ de degré non nul, le sous-espace $L_{\mathrm{cusp}}(a)$ est un sous- \mathcal{H} -module de L_{cusp} et, en tant que \mathcal{H} -module, il est *unitaire* pour le produit scalaire défini ci-dessus. Il s'ensuit que le \mathcal{H} -module L_{cusp} est semi-simple.

Définition 1. Une représentation automorphe cuspidale (*partout non ramifiée pour GL_r sur F*) est un \mathcal{H} -module irréductible qui est isomorphe à un facteur direct de L_{cusp} .

On notera \mathcal{A}_r un système de représentants des classes d'isomorphie de ces représentations automorphes cuspidales. On a une décomposition isotypique

$$L_{\mathrm{cusp}} \cong \bigoplus_{\pi \in \mathcal{A}_r} \pi^{\oplus m(\pi)}$$

où les multiplicités $m(\pi)$ sont des entiers ≥ 1 .

Pour tout $x \in |X|$, on définit aussi l'*algèbre de Hecke locale* (non ramifiée) comme l'espace vectoriel

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{C}_c(K_x \backslash \mathrm{GL}_r(F_x) / K_x)$$

des fonctions complexes sur $\mathrm{GL}_r(F_x)$ à support compact et invariante à gauche et à droite par $K_x = \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_x)$, muni du produit de convolution pour la mesure de Haar dg_x sur $\mathrm{GL}_r(F_x)$. Cette algèbre de Hecke locale admet pour unité la fonction caractéristique e_{K_x} de K_x .

Théorème (Satake). — L'algèbre de Hecke \mathcal{H}_x est commutative et canoniquement isomorphe à la \mathbb{C} -algèbre de polynômes symétriques

$$\mathcal{H}_x \cong \mathbb{C}[z_1, z_1^{-1}, \dots, z_r, z_r^{-1}]^{\mathfrak{S}_r}$$

où le groupe symétrique \mathfrak{S}_r agit par permutation des indéterminées z_1, \dots, z_r . \square

En particulier, tout \mathcal{H}_x -module irréductible π_x est de dimension 1 et est (à isomorphisme près) uniquement déterminé par la donnée d'un r -uplet non ordonné

$$(z_1(\pi_x), \dots, z_r(\pi_x))$$

de nombres complexes non nuls, appelés les *valeurs propres de Hecke* de π_x .

L'algèbre de Hecke globale \mathcal{H} est le produit tensoriel *restreint*

$$\mathcal{H} = \bigotimes'_{x \in |X|} \mathcal{H}_x$$

des algèbres de Hecke locales, c'est-à-dire la limite inductive sur les parties finies S de $|X|$ du système formé des \mathbb{C} -algèbres

$$\mathcal{H}_S = \bigotimes_{x \in S} \mathcal{H}_x$$

et des homomorphismes de transition

$$\mathcal{H}_S \rightarrow \mathcal{H}_T, f_S \mapsto f_S \otimes \bigotimes_{x \in T-S} e_{K_x},$$

quels que soient $S \subset T \subset |X|$. L'algèbre de Hecke globale est donc aussi commutative et tout \mathcal{H} -module irréductible π , qui est nécessairement de dimension 1, admet pour chaque $x \in |X|$ une composante locale π_x qui est un \mathcal{H}_x -module de dimension 1.

On définit la *fonction* L de $\pi \in \mathcal{A}_r$ comme le produit eulérien formel

$$\begin{aligned} L(\pi, T) &= \prod_{x \in |X|} L(\pi_x, T) \\ &= \prod_{x \in |X|} \frac{1}{\prod_{i=1}^r (1 - z_i(\pi_x) T^{\deg(x)})} \in \mathbb{C}[[T]]. \end{aligned}$$

Godement et Jacquet ont démontré que le produit eulérien $L(\pi, q^{-s})$ converge absolument dans un demi-plan $\text{Re}(s) > \sigma$ pour un nombre réel σ assez grand, et que la série formelle en T définie par $L(\pi, T)$ est en fait le développement d'une fraction rationnelle dans $\mathbb{C}(T)$, et même d'un polynôme dans $\mathbb{C}[T]$ si $r \geq 2$.

On a enfin le *théorème de multiplicité un* :

Théorème (Shalika). — *Pour tout $\pi \in \mathcal{A}_r$, la multiplicité $m(\pi)$ de π dans L_{cusp} est égale à 1, de sorte que*

$$L_{\text{cusp}} \cong \bigoplus_{\pi \in \mathcal{A}_r} \pi. \quad \square$$

1.2. Représentations de Galois (partout non ramifiées)

On fixe une clôture séparable \overline{F} de F et donc un point géométrique $\overline{\eta} = \text{Spec}(\overline{F})$ au-dessus du point générique η de X . Grothendieck a défini le groupe fondamental arithmétique $\pi_1(X, \overline{\eta})$ et son dévissage canonique

$$1 \rightarrow \pi_1(\overline{\mathbb{F}}_q \otimes_{\mathbb{F}_q} X, \overline{\eta}) \rightarrow \pi_1(X, \overline{\eta}) \rightarrow \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q) \rightarrow 1$$

où $\overline{\mathbb{F}}_q$ est la clôture algébrique de \mathbb{F}_q dans \overline{F} .

Muni de la topologie de Krull, $\pi_1(X, \overline{\eta})$ est un groupe topologique pro-fini, dont les représentations complexes continues et de dimension finie se factorisent nécessairement par un quotient fini. Suivant Serre et Grothendieck, on obtient une catégorie plus vaste de représentations de $\pi_1(X, \overline{\eta})$ en remplaçant le corps des coefficients \mathbb{C} par un corps ℓ -adique.

Fixons donc un nombre premier auxiliaire ℓ , distinct de la caractéristique de \mathbb{F}_q , et fixons une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ de \mathbb{Q}_ℓ . Une *représentation ℓ -adique* σ de $\pi_1(X, \overline{\eta})$ de rang $r \in \mathbb{N}$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espace vectoriel V de dimension r , muni d'un

homomorphisme de groupes $\sigma : \pi_1(X, \bar{\eta}) \rightarrow \text{Aut}_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(V)$, ayant les propriétés suivantes :

- 1) il existe une base de V identifiant $\text{Aut}_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(V)$ à $\text{GL}_r(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ et une extension finie E_λ de \mathbb{Q}_ℓ contenue dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ telles que $\sigma(\pi_1(X, \bar{\eta})) \subset \text{GL}_r(E_\lambda) \subset \text{GL}_r(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$,
- 2) l'homomorphisme $\sigma : \pi_1(X, \bar{\eta}) \rightarrow \text{GL}_r(E_\lambda)$ est continu pour la topologie de Krull sur $\pi_1(X, \bar{\eta})$ et la topologie ℓ -adique sur $\text{GL}_r(E_\lambda)$,
- 3) le *déterminant* $\det(\sigma)$ de σ , c'est-à-dire le caractère de l'action de $\pi_1(X, \bar{\eta})$ sur la puissance extérieure maximale $\bigwedge^r V$, est d'ordre fini.

Les représentations ℓ -adiques de $\pi_1(X, \bar{\eta})$ forment une catégorie abélienne dont tous les objets sont de longueur finie. Pour tout entier $r \geq 1$, on fixe un système de représentants \mathcal{G}_r des classes d'isomorphie de représentations ℓ -adiques irréductibles de $\pi_1(X, \bar{\eta})$ de rang r .

Pour chaque $x \in |X|$, on fixe un plongement de $\kappa(x)$ dans $\bar{\mathbb{F}}_q$ au-dessus de \mathbb{F}_q . Le groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\kappa(x))$ est égal à $\text{Frob}_x^{\mathbb{Z}}$ où Frob_x est l'élément de *Frobenius géométrique*, c'est-à-dire l'inverse de l'élévation à la puissance $|\kappa(x)| = q^{\deg(x)}$. On fixe aussi un « chemin » reliant le point géométrique $\bar{x} : \text{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_q) \rightarrow \text{Spec}(\kappa(x)) = \{x\} \subset X$ au point géométrique $\bar{\eta}$ de X ; ce chemin détermine un homomorphisme de groupes

$$\text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\kappa(x)) = \pi_1(x, \bar{x}) \rightarrow \pi_1(X, \bar{\eta}).$$

Par abus, on note encore Frob_x l'image de Frob_x par cet homomorphisme. Tout autre chemin détermine un homomorphisme conjugué au précédent par un élément de $\pi_1(X, \bar{\eta})$. Par conséquent l'élément Frob_x de $\pi_1(X, \bar{\eta})$ est bien défini à conjugaison près.

Soient $r \geq 1$ et $\sigma \in \mathcal{G}_r$. Pour chaque $x \in |X|$, on appelle *valeurs propres de Frobenius de σ en x* les valeurs propres de l'automorphisme $\sigma(\text{Frob}_x)$; elles forment un r -uplet non ordonné

$$(z_1(\sigma_x), \dots, z_r(\sigma_x))$$

d'éléments non nuls de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$. La *fonction L* de σ est par définition le produit eulérien formel

$$\begin{aligned} L(\sigma, T) &= \prod_{x \in |X|} L(\sigma_x, T) \\ &= \prod_{x \in |X|} \frac{1}{\prod_{i=1}^r (1 - z_i(\sigma_x) T^{\deg(x)})} \in \bar{\mathbb{Q}}_\ell[[T]]. \end{aligned}$$

Il résulte de la formule des points fixes de Grothendieck-Lefschetz que cette série formelle est le développement d'une fraction rationnelle dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell(T)$, et même d'un polynôme dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[T]$ si $r \geq 2$.

1.3. La correspondance de Langlands et ses conséquences

On fixe un isomorphisme de corps $\iota : \bar{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ (il en existe d'après l'axiome du choix). On note encore ι les isomorphismes de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell(T) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}(T)$ et $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[[T]] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[[T]]$ induits par ι .

Théorème principal. — Soit r un entier ≥ 1 .

(i) (Correspondance de Langlands) Il existe une unique bijection

$$\mathcal{A}_r \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_r, \pi \mapsto \sigma(\pi),$$

telle que, pour tout $\pi \in \mathcal{A}_r$ on ait l'égalité de facteurs L locaux

$$(*) \quad \iota(L(\sigma(\pi)_x, T)) = L(\pi_x, T), \forall x \in |X|.$$

(ii) (Conjecture de Ramanujan-Petersson) Pour tout $\pi \in \mathcal{A}_r$ et tout $x \in |X|$ on a

$$|z_i(\pi_x)| = 1, \forall i = 1, \dots, r. \quad \square$$

Le cas $r = 1$ de ce théorème est une reformulation de la théorie du corps de classes abélien pour les corps de fonctions. Le cas $r = 2$ a été démontré par Drinfeld. Le cas général est dû à Lafforgue.

Les résultats suivants étaient connus bien avant la démonstration complète du théorème principal :

– (Théorème de Čebotarev) Il existe au plus une application $\mathcal{A}_r \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_r, \pi \mapsto \sigma(\pi)$, telle que, pour tout $\pi \in \mathcal{A}_r$ on ait l'égalité de facteurs L locaux

$$(**) \quad \iota(L(\sigma(\pi)_x, T)) = L(\pi_x, T) \text{ pour presque tout } x \in |X|.$$

– (Théorème de multiplicité un fort de Piatetski-Shapiro) Toute telle application est nécessairement injective et vérifie la propriété (*).

– (Principe de récurrence de Deligne, fondé sur le théorème inverse de Piatetski-Shapiro et l'équation fonctionnelle de Grothendieck) Si, pour tout entier $1 \leq r' < r$, on sait associer une représentation ℓ -adique $\sigma'(\pi')$ de $\text{Gal}(\overline{F}/F)$ à chaque représentation automorphe cuspidale π' (éventuellement ramifiée) pour $\text{GL}_{r'}$ sur F de telle sorte que les facteurs L locaux de π' et $\sigma'(\pi')$ coïncident presque partout, alors l'application $\mathcal{A}_r \rightarrow \mathcal{G}_r, \pi \mapsto \sigma(\pi)$ de la conjecture de Langlands ci-dessus est nécessairement surjective si elle existe.

Les conséquences du théorème principal qui sont formulées ci-dessous étaient attendues.

Pour tout nombre premier ℓ' distinct de la caractéristique de \mathbb{F}_q , fixons une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell'}$ de $\mathbb{Q}_{\ell'}$ et notons $\mathcal{G}_{r, \ell'}$ l'ensemble \mathcal{G}_r correspondant.

Théorème (conjecturé par Deligne). — Soit $\sigma \in \mathcal{G}_r$. Notons $E(\sigma) \subset \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$ le sous-corps engendré sur \mathbb{Q} par les coefficients des polynômes $\prod_{i=1}^r (1 - z_i(\sigma_x)T)$ pour tous les $x \in |X|$ et $\overline{E(\sigma)}$ la clôture algébrique de $E(\sigma)$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$.

(i) Le corps $E(\sigma)$ est un corps de nombres, c'est-à-dire une extension finie de \mathbb{Q} .

(ii) Pour tout plongement complexe $\iota : \overline{E(\sigma)} \hookrightarrow \mathbb{C}$, on a $|\iota(z_i(\sigma_x))| = 1$ quels que soient $x \in |X|$ et $i = 1, \dots, r$.

(iii) Il existe une unique famille de représentations $\sigma_{\ell', \lambda'} \in \mathcal{G}_{r, \ell'}$, indexée par les couples (ℓ', λ') formés d'un nombre premier ℓ' distinct de la caractéristique de \mathbb{F}_q et d'un plongement $\lambda' : \overline{E(\sigma)} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_{\ell'}$, et ayant les propriétés suivantes :

– $\sigma = \sigma_{\ell, \lambda}$ où λ est l'inclusion de $\overline{E(\sigma)}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$,

– pour tout $x \in |X|$ on a l'égalité

$$\prod_{i=1}^r (1 - z_i(\sigma_{\ell', \lambda', x})T) = \lambda' \left(\prod_{i=1}^r (1 - z_i(\sigma_x)T) \right) \in \overline{\mathbb{Q}_{\ell'}}[T]. \quad \square$$

1.4. La stratégie

La stratégie utilisée par Drinfeld et Lafforgue pour définir l'application $\pi \rightarrow \sigma(\pi)$ de \mathcal{A}_r dans \mathcal{G}_r est inspirée des travaux de Shimura, Ihara, Deligne, Langlands, ... Sous sa forme la plus naïve elle peut se décrire comme suit.

Soit $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}} \subset \mathcal{H}$ la sous- \mathbb{Q} -algèbre formée des fonctions à valeurs dans \mathbb{Q} ($\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}$). On construit un champ algébrique propre et lisse C sur X , muni d'une action par correspondances algébriques de l'algèbre $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}$, de telle sorte que la cohomologie ℓ -adique de la fibre de $C \rightarrow X$ au point géométrique $\overline{\eta}$,

$$H^*(C_{\overline{\eta}}, \overline{\mathbb{Q}_{\ell}})$$

soit une représentation du produit de $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}$ et du groupe fondamental $\pi_1(X, \overline{\eta})$.

Puis on calcule la trace de cette représentation par la formule des points fixes de Grothendieck-Lefschetz.

Enfin on compare cette formule des points fixes avec la formule des traces d'Arthur-Selberg pour prouver que la représentation

$$\bigoplus_{\pi \in \mathcal{A}_r} \pi \otimes \sigma(\pi)$$

de $\mathcal{H} \times \pi_1(X, \overline{\eta})$ que l'on cherche est exactement la partie « cuspidale » de $H^*(C_{\overline{\eta}}, \overline{\mathbb{Q}_{\ell}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}_{\ell}, \iota} \mathbb{C}}$.

En fait, comme la cohomologie ℓ -adique ci-dessus est automatiquement définie sur \mathbb{Q}_{ℓ} , il y a une obstruction de rationalité à mener à bien un tel programme et la stratégie doit être légèrement modifiée. Comme l'a proposé Drinfeld, c'est plutôt la représentation

$$\bigoplus_{\pi \in \mathcal{A}_r} \pi \otimes \sigma(\pi)^{\vee} \otimes \sigma(\pi)$$

du produit $\mathcal{H} \times \pi_1(X, \overline{\eta}) \times \pi_1(X, \overline{\eta})$, où $\sigma(\pi)^{\vee}$ est la représentation contragrédiente de $\sigma(\pi)$, que l'on peut espérer obtenir comme la partie cuspidale de la cohomologie ℓ -adique de la fibre générique d'un champ algébrique propre et lisse sur $X \times_{\mathbb{F}_q} X$.

1.5. Le corps de classe abélien

Nous allons illustrer la stratégie ci-dessus en traitant le cas particulier $r = 1$. Comme nous l'avons déjà dit, la correspondance de Langlands dans ce cas n'est autre que la théorie du corps de classes abélien.

Soit Pic^0 la composante neutre du schéma de Picard relatif de X sur \mathbb{F}_q , c'est-à-dire la « jacobienne » de X . C'est la variété abélienne sur \mathbb{F}_q , de dimension le genre géométrique de X , qui paramètre les \mathcal{O}_X -Modules inversibles (ou, ce qui revient au même, les fibrés en droites sur X) de degré 0. On dispose du morphisme d'Abel-Jacobi

$$\text{AJ} : X \times_{\mathbb{F}_q} X \rightarrow \text{Pic}^0$$

et de l'isogénie de Lang

$$L : \text{Pic}^0 \mapsto \text{Pic}^0 .$$

On rappelle que, pour tout corps $k \supset \mathbb{F}_q$, AJ envoie le point $(\infty, o) \in X(k) \times X(k)$ sur le Module inversible $\mathcal{O}_{k \otimes_{\mathbb{F}_q} X}(\infty - o)$ et L envoie le $\mathcal{O}_{k \otimes_{\mathbb{F}_q} X}$ -Module inversible \mathcal{L} sur le Module inversible $\mathcal{L}^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_{k \otimes_{\mathbb{F}_q} X}} (\text{Frob}_k \times \text{Id}_X)^* \mathcal{L}$ où le morphisme de Frobenius $\text{Frob}_k : \text{Spec}(k) \rightarrow \text{Spec}(k)$ est induit par l'élévation à la puissance q -ième dans k .

On forme le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} (X \times_{\mathbb{F}_q} X)^\sim & \longrightarrow & \text{Pic}^0 \\ \downarrow & \square & \downarrow L \\ X \times_{\mathbb{F}_q} X & \xrightarrow{\text{AJ}} & \text{Pic}^0 . \end{array}$$

Par construction, $(X \times_{\mathbb{F}_q} X)^\sim$ est un revêtement fini étale galoisien de $X \times_{\mathbb{F}_q} X$ de groupe de Galois $\text{Pic}^0(\mathbb{F}_q)$ et définit un quotient $\pi_1^{\text{ab}}(X \times_{\mathbb{F}_q} X) \rightarrow \text{Pic}^0(\mathbb{F}_q)$ du groupe fondamental de $X \times_{\mathbb{F}_q} X$ rendu abélien. (Ici, il n'est pas nécessaire de choisir un point base puisque le plus grand quotient abélien du groupe fondamental ne dépend pas d'un tel choix.) Tout caractère χ de $\text{Pic}^0(\mathbb{F}_q)$ induit donc un caractère noté encore χ de $\pi_1^{\text{ab}}(X \times_{\mathbb{F}_q} X)$.

On a une suite exacte canonique

$$\pi_1^{\text{ab}}(X \times_{\mathbb{F}_q} X) \rightarrow \pi_1^{\text{ab}}(X) \times \pi_1^{\text{ab}}(X) \rightarrow \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q) \rightarrow 1$$

et, en établissant la « loi de réciprocité » du revêtement fini étale galoisien $(X \times_{\mathbb{F}_q} X)^\sim \rightarrow X \times_{\mathbb{F}_q} X$, on montre qu'il existe $\sigma(\chi) \in \mathcal{G}_1$ tel que χ soit la restriction du caractère de la représentation $\sigma(\chi)^\vee \otimes \sigma(\chi)$ de $\pi_1^{\text{ab}}(X) \times \pi_1^{\text{ab}}(X)$.

D'après Weil, pour tout entier $r \geq 1$, les classes d'isomorphie de fibrés vectoriels de rang r sur X sont en bijection naturelle avec les doubles classes dans

$$\text{GL}_r(F) \backslash \text{GL}_r(\mathbb{A}) / K .$$

En particulier, on a un isomorphisme de groupes canonique

$$\text{Pic}^0(\mathbb{F}_q) \xrightarrow{\sim} F^\times \backslash \text{Ker}(\mathbb{A}^\times \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{Z}) / \mathcal{O}^\times$$

et on peut voir les caractères χ comme des éléments π de \mathcal{A}_1 . On a donc construit une application $\pi \mapsto \sigma(\pi)$ de \mathcal{A}_1 dans \mathcal{G}_1 dont on montre facilement qu'elle satisfait aux propriétés annoncées dans le théorème principal.

2. Champ des chtoucas de Drinfeld, troncatures de Harder-Narasimhan et correspondances de Hecke

2.1. Le champ des chtoucas

Tous les schémas considérés dans la suite sont sur \mathbb{F}_q ; on dira donc schéma au lieu de \mathbb{F}_q -schéma et on notera simplement $U \times T$ le produit fibré sur \mathbb{F}_q de deux tels schémas. Pour tout schéma U , on note $\text{Frob}_U : U \rightarrow U$ son endomorphisme de Frobenius relativement à \mathbb{F}_q : Frob_U est donc l'identité sur l'espace topologique sous-jacent à U et l'élévation à la puissance q -ième sur le faisceau structural \mathcal{O}_U . Si \mathcal{M} est un $\mathcal{O}_{U \times X}$ -Module, on note ${}^{\tau}\mathcal{M}$ le $\mathcal{O}_{U \times X}$ -Module $(\text{Frob}_U \times \text{Id}_X)^*\mathcal{M}$.

Définition (Drinfeld). — *Un chtouca à droite (resp. à gauche) $\tilde{\mathcal{E}}$ de rang $r \geq 1$ sur un schéma U est un diagramme dans la catégorie abélienne des $\mathcal{O}_{U \times X}$ -Modules*

$$\mathcal{E} \xleftarrow{j} \mathcal{E}' \xleftarrow{t} {}^{\tau}\mathcal{E} \quad (\text{resp. } \mathcal{E} \xleftarrow{t} \mathcal{E}' \xleftarrow{j} {}^{\tau}\mathcal{E})$$

où :

- \mathcal{E} et \mathcal{E}' sont localement libres de rang r ,
- j et t sont injectifs,
- les conoyaux de j et t sont supportés par les graphes $\Gamma_{\infty} \subset U \times X$ et $\Gamma_o \subset U \times X$ de deux morphismes $\infty : U \rightarrow X$ et $o : U \rightarrow X$, et sont localement libres de rang 1 sur leurs supports.

Le morphismes ∞ et o sont appelés respectivement le pôle et le zéro du chtouca.

En d'autres termes, un chtouca à droite de rang r est la donnée d'un fibré vectoriel \mathcal{E} de rang r , d'une modification élémentaire supérieure $j : \mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}'$ de \mathcal{E} , d'une modification élémentaire inférieure $j' : \mathcal{E}'' \hookrightarrow \mathcal{E}'$ de \mathcal{E}' et d'un isomorphisme $u : {}^{\tau}\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}''$. On a bien sûr une description similaire pour les chtoucas à gauche.

En faisant varier U , on définit de manière évidente le champ Cht^r des chtoucas à droite de rang r , un morphisme $(\infty, o) : \text{Cht}^r \rightarrow X \times X$ et un chtouca à droite de rang r universel sur Cht^r de pôle et de zéro les deux composantes de ce morphisme. De même, on a le champ ${}^r\text{Cht}$ des chtoucas à gauche de rang r ...

Dans la suite et sauf mention explicite du contraire, les chtoucas seront tous à droite, et on dira simplement « chtouca » pour « chtouca à droite ». Les résultats énoncés pour les chtoucas à droite ont bien entendu des analogues pour les chtoucas à gauche.

Proposition (Drinfeld). — *Le champ Cht^r est algébrique au sens de Deligne-Mumford. Le morphisme $(\infty, o) : \text{Cht}^r \rightarrow X \times X$ est lisse, purement de dimension relative $2r - 2$. \square*

Le champ Cht^r s'écrit comme réunion disjointe

$$\text{Cht}^r = \coprod_{d \in \mathbb{Z}} \text{Cht}^{r,d}$$

où $\text{Cht}^{r,d}$ paramètre les chtoucas de degré

$$d = \deg \mathcal{E} = \deg \mathcal{E}' - 1.$$

Exemple : Le champ $\text{Cht}^{1,0}$ est par définition le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \text{Cht}^{1,0} & \longrightarrow & \text{Fib}^{1,0} \\ \downarrow & \square & \downarrow \text{L} \\ X \times X & \xrightarrow{\text{AJ}} & \text{Fib}^{1,0} \end{array}$$

où $\text{Fib}^{1,0}$ est le champ algébrique des fibrés en droites de degré 0 sur X , le morphisme AJ envoie $(\infty, o) \in X(U) \times X(U)$ sur le fibré en droites $\mathcal{O}_{U \times X}(\infty - o)$ et le morphisme L envoie un fibré en droites \mathcal{L} sur $U \times X$ sur le fibré en droites $\mathcal{L}^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_{U \times X}} {}^\tau \mathcal{L}$.

C'est un champ de Deligne-Mumford connexe, propre et lisse de dimension 2 sur \mathbb{F}_q . Le morphisme $(\infty, o) : \text{Cht}^{1,0} \rightarrow X \times X$ est fini et étale et le schéma $(X \times X)^\sim$ construit précédemment est l'espace grossier de $\text{Cht}^{1,0}$. \square

Mis à part le cas $r = 1$, aucun des champs $\text{Cht}^{r,d}$ n'est de type fini.

2.2. Troncatures

Soient k un corps algébriquement clos contenant \mathbb{F}_q et $\tilde{\mathcal{E}}$ un chtouca sur (le spectre de) k . On appelle *sous-objet* de $\tilde{\mathcal{E}}$ la donnée $\tilde{\mathcal{F}} \subset \tilde{\mathcal{E}}$ de deux sous- $\mathcal{O}_{k \otimes X}$ -Modules $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ et $\mathcal{F}' \subset \mathcal{E}'$ tels que \mathcal{E}/\mathcal{F} et $\mathcal{E}'/\mathcal{F}'$ soient localement libres de même rang et que $j(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}'$ et $t({}^\tau \mathcal{F}) \subset \mathcal{F}'$; à un tel sous-objet on peut associer son *rang*

$$\text{rg } \tilde{\mathcal{F}} = \text{rg } \mathcal{F} = \text{rg } \mathcal{F}'$$

et son degré

$$\text{deg } \tilde{\mathcal{F}} = \text{deg } \mathcal{F}.$$

Si $0 = \tilde{\mathcal{F}}_0 \subsetneq \tilde{\mathcal{F}}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \tilde{\mathcal{F}}_s = \tilde{\mathcal{E}}$ est une filtration de $\tilde{\mathcal{E}}$ par des sous-objets comme ci-dessus, on peut lui associer son *polygone* qui est la fonction affine par morceaux

$$p : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$$

qui s'annule en 0 et r , dont les seules ruptures de pentes interviennent en les entiers $\text{rg } \tilde{\mathcal{F}}_\sigma \in]0, r[$, $\sigma = 1, \dots, s - 1$, et qui prend en ces entiers-là la valeur

$$p(\text{rg } \tilde{\mathcal{F}}_\sigma) = \text{deg } \tilde{\mathcal{F}}_\sigma - \frac{\text{rg } \tilde{\mathcal{F}}_\sigma}{r} \text{deg } \tilde{\mathcal{E}}.$$

Proposition 2. *Parmi les polygones attachés aux filtrations de $\tilde{\mathcal{E}}$ comme ci-dessus, il en existe un plus grand que tous les autres, et parmi les filtrations qui définissent ce polygone maximal il en existe une moins fine que tous les autres.*

\square

Le polygone et la filtration dont la proposition ci-dessus assurent l'existence sont appelés respectivement le *polygone de Harder-Narasimhan* et la *filtration de Harder-Narasimhan* du chtouca $\tilde{\mathcal{E}}$.

Appelons *paramètre de troncature* toute fonction continue, convexe, affine par morceaux $p : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ qui s'annule en 0 et r et dont tous les points de ruptures de pente ont des abscisses entières.

Proposition 3. *Soit p un paramètre de troncature.*

(i) Il existe un unique ouvert $\text{Cht}^{r;\leq p}$ du champ Cht^r tel qu'un chtouca sur un corps algébriquement clos est dans cet ouvert si et seulement si son polygone de Harder-Narasimhan est majoré par p .

(ii) Pour chaque entier d , l'ouvert

$$\text{Cht}^{r,d;\leq p} := \text{Cht}^{r;\leq p} \cap \text{Cht}^{r,d}$$

du champ $\text{Cht}^{r,d}$ est de type fini. \square

On voit donc que, pour chaque entier d , le champ algébrique $\text{Cht}^{r,d}$ est réunion filtrante des ouverts de type fini $\text{Cht}^{r,d;\leq p}$.

2.3. Correspondances de Hecke et endomorphismes de Frobenius partiels

Tout élément $g \in \text{GL}_r(\mathbb{A})$ définit une correspondance, dite de Hecke,

$$c = (c_1, c_2) : \text{Cht}^r(g) \rightarrow \text{Cht}^r \times_{X^2} \text{Cht}^r$$

où $\text{Cht}^r(g)$ est un champ de Deligne-Mumford et c_1, c_2 sont des morphismes représentables étales. Cette correspondance ne dépend que de la double classe KgK . (On rappelle que $K = \text{GL}_r(\mathcal{O})$.) Si S_g est l'ensemble fini des $x \in |X|$ tels que $g_x \notin F_x^\times K_x \subset \text{GL}_r(F_x)$, les morphismes c_1 et c_2 sont finis au-dessus de l'ouvert $(X - S_g)^2$ de X^2 .

Par exemple, considérons l'élément $g \in \text{GL}_r(\mathbb{A})$ défini par

$$g_{x_0} = \begin{pmatrix} \varpi_{x_0} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \text{ et } g_x = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \text{ si } x \neq x_0$$

où x_0 est un point fermé de X et ϖ_{x_0} est une uniformisante en x_0 . Le champ $\text{Cht}^r(g)$ correspondant paramètre les couples

$$(\mathcal{E} \xrightarrow{j} \mathcal{E}' \xleftarrow{t} \tau \mathcal{E}, \mathcal{F} \subset \mathcal{E})$$

formés d'un chtouca de rang r dont le pôle et le zéro ne rencontrent pas x_0 et d'une modification élémentaire inférieure en x_0 qui satisfait à la relation

$$\tau \mathcal{F} = t^{-1}(\mathcal{F}') \subset \tau \mathcal{E}$$

où $\mathcal{F}' \subset \mathcal{E}'$ est l'unique modification élémentaire inférieure en x_0 qui contient $j(\mathcal{F})$; le morphisme c_1 est la projection sur la première composante alors que le morphisme c_2 envoie le couple ci-dessus sur le chtouca $(\mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{F}' \xleftarrow{t} \tau \mathcal{F})$.

Si $a \in \mathbb{A}^\times$, la double classe $F^\times a \mathcal{O}^\times$ est la classe d'isomorphie d'un \mathcal{O}_X -Module inversible \mathcal{L} de degré égal à $\deg(a)$ et, si $g \in aK \subset \text{GL}_r(\mathbb{A})$, on a $\text{Cht}^r(g) = \text{Cht}^r$, c_1 est l'identité et c_2 est l'automorphisme de Cht^r qui envoie un chtouca $\tilde{\mathcal{E}}$ sur le produit tensoriel $\mathcal{L} \otimes \tilde{\mathcal{E}}$. Dans la suite, on notera simplement a cet automorphisme.

On a des morphismes de Frobenius partiels

$$\text{Frob}_\infty : \text{Cht}^r \rightarrow {}^r\text{Cht}, \tilde{\mathcal{E}} \mapsto (\mathcal{E}' \xleftarrow{t} \tau \mathcal{E} \xrightarrow{\tau j} \tau \mathcal{E}'),$$

et

$$\text{Frob}_o : {}^r\text{Cht} \rightarrow \text{Cht}^r, \tilde{\mathcal{E}} \mapsto (\mathcal{E}' \xrightarrow{j} \tau \mathcal{E} \xleftarrow{\tau t} \tau \mathcal{E}'),$$

au dessus de $(\infty, o) \mapsto (\text{Frob}_X(\infty), o)$ et $(\infty, o) \mapsto (\infty, \text{Frob}_X(o))$ respectivement, dont les composés

$$\text{Frob}_o \circ \text{Frob}_\infty : \text{Cht}^r \rightarrow \text{Cht}^r \text{ et } \text{Frob}_\infty \circ \text{Frob}_o : {}^r\text{Cht} \rightarrow {}^r\text{Cht}$$

sont les endomorphismes de Frobenius.

Soit Λ_X le schéma intersection de tous les ouverts de $X \times X$ complémentaires des images réciproques de la diagonale par les endomorphismes $\text{Frob}_X^n \times \text{Id}_X$ et $\text{Id}_X \times \text{Frob}_X^n$ de $X \times X$ pour tous les entiers $n \geq 0$. Au-dessus de Λ_X , il n'y a plus de différence entre chtoucas à gauche et chtoucas à droite : un chtouca à droite

$$\tilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \xrightarrow{j} \mathcal{E}' \xleftarrow{t} \tau \mathcal{E})$$

dont le couple pôle-zéro (∞, o) se factorise par $\Lambda_X \subset X \times X$ définit un chtouca à gauche

$$\tilde{\mathcal{E}}' = (\mathcal{E} \xleftarrow{t'} \mathcal{E}'' \xrightarrow{j'} \tau \mathcal{E})$$

de pôle $\infty' = \infty$ et de zéro $o' = o$, où $\mathcal{E}'' = \mathcal{E} \times_{j, \mathcal{E}', t} \tau \mathcal{E}$ et t', j' sont les deux projections, et vice versa. Au-dessus de Λ_X , les morphismes de Frobenius partiels peuvent donc être vus comme des endomorphismes, dits encore de Frobenius partiels,

$$\text{Frob}_\infty \text{ et } \text{Frob}_o : \Lambda_X \times_{X^2} \text{Cht}^r \rightarrow \Lambda_X \times_{X^2} \text{Cht}^r$$

qui relèvent les endomorphismes $\text{Frob}_X \times \text{Id}_X$ et $\text{Id}_X \times \text{Frob}_X$ respectivement.

On fixe un élément $a \in \mathbb{A}^\times$ de degré $\text{deg}(a) > 0$ et on considère le quotient

$$\text{Cht}^r / a^{\mathbb{Z}} \cong \prod_{d=1}^{r \text{ deg}(a)} \text{Cht}^{r,d}.$$

Les correspondances de Hecke et les endomorphismes de Frobenius partiels que nous venons d'introduire passent au quotient par $a^{\mathbb{Z}}$.

Pour tout paramètre de troncature $p : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$, $a^{\mathbb{Z}}$ stabilise l'ouvert $\text{Cht}^{r; \leq p}$ de Cht^r et l'ouvert quotient

$$\text{Cht}^{r; \leq p} / a^{\mathbb{Z}} \subset \text{Cht}^r / a^{\mathbb{Z}}$$

est de type fini. *Par contre, cet ouvert n'est stabilisé ni par les endomorphismes de Frobenius partiels $\text{Frob}_\infty, \text{Frob}_o$, ni par les correspondances de Hecke (sauf celles qui sont associées à des $g \in \mathbb{A}^\times K$). C'est la difficulté majeure que Lafforgue a dû surmonter.*

3. Homomorphismes complets et chtoucas itérés

Pour surmonter cette difficulté, Lafforgue compactifie les champs de chtoucas tronqués $\text{Cht}^{r; \leq p} / a^{\mathbb{Z}}$ et prolonge par adhérence schématique les correspondances de Hecke et les endomorphismes de Frobenius partiels à ces compactifications.

3.1. Homomorphismes complets

Soit k un corps. Pour tout couple (V, W) de k -espaces vectoriels de même dimension finie > 0 , on note $\text{Hom}(V, W)$ le k -schéma affine des applications linéaires de V dans W et $\text{Isom}(V, W)$ l'ouvert de $\text{Hom}(V, W)$ formé des isomorphismes de V sur W . On a bien entendu

$$\text{Isom}(V, W) \subset \text{Hom}(V, W) - \{0\}$$

avec égalité si et seulement si V et W sont de dimension 1.

On fixe maintenant un tel couple (V, W) de dimension $\dim(V) = \dim(W) = r$ et on considère le sous- k -schéma fermé

$$\Omega'(V, W) \subset \prod_{\rho=1}^r \left(\text{Hom} \left(\bigwedge^{\rho} V, \bigwedge^{\rho} W \right) - \{0\} \right) \times_k \mathbb{A}_k^{r-1}$$

formé des uplets

$$(u_1, \dots, u_r, (\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}))$$

tels que

$$\wedge^{\rho} u_1 = \lambda_1^{\rho-1} \lambda_2^{\rho-2} \dots \lambda_{\rho-1} u_{\rho}$$

quel que soit $\rho = 2, \dots, r$.

Les conditions équivalentes

$$(u_1 \text{ est un isomorphisme}) \Leftrightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1} \text{ sont inversibles})$$

définissent un ouvert $\Omega^{\circ}(V, W)$ de ce schéma affine et la projection

$$(u_1, \dots, u_r, (\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1})) \mapsto (u_1, (\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}))$$

identifie $\Omega^{\circ}(V, W)$ à l'ouvert $\text{Isom}(V, W) \times_k \mathbb{G}_{m,k}^{r-1}$ de $(\text{Hom}(V, W) - \{0\}) \times_k \mathbb{A}_k^{r-1}$.

Le k -schéma $\Omega'(V, W)$ n'est pas irréductible en général. Aussi nous le remplacerons dans la suite par l'adhérence schématique

$$\Omega(V, W) \subset \Omega'(V, W)$$

de $\Omega^{\circ}(V, W)$ dans $\Omega'(V, W)$.

L'espace affine standard \mathbb{A}_k^{r-1} est naturellement muni d'un diviseur à croisements normaux, réunion de $r-1$ diviseurs lisses, à savoir les diviseurs $\{\lambda_{\rho} = 0\}$ pour $\rho = 1, \dots, r-1$. Ce diviseur à croisements normaux définit de la manière habituelle une stratification en sous- k -schémas localement fermés de \mathbb{A}_k^{r-1} , indexée par les parties R de $[r-1] = \{1, \dots, r-1\}$ et de R -ième strate

$$\mathbb{A}_{k,R}^{r-1} = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}) \mid \lambda_{\rho} = 0 \Leftrightarrow \rho \in R\} \cong \mathbb{G}_{m,k}^{[r-1]-R}.$$

Par construction, on dispose d'un morphisme

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}) : \Omega(V, W) \rightarrow \mathbb{A}_k^{r-1}$$

et on peut relever à $\Omega(V, W)$ le diviseur et la stratification de \mathbb{A}_k^{r-1} que l'on vient d'introduire. En particulier, pour tout sous-ensemble $R \subset [r-1]$, on note

$$\Omega_R(V, W) \subset \Omega(V, W)$$

l'image réciproque par ce morphisme de la strate localement fermée $\mathbb{A}_{k,R}^{r-1} \subset \mathbb{A}_k^{r-1}$. On vérifie que $\Omega_{\emptyset}(V, W) = \Omega^{\circ}(V, W)$.

Proposition 4. *Pour chaque sous-ensemble $R \subset [r - 1]$ écrit sous la forme $R = \{r_1, r_2, \dots, r_{s-1}\}$ où $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{s-1} < r_s = r$, soit $\text{Gr}_R(V, W)$ le k -schéma des uplets*

$$(V^\bullet, W_\bullet, (v_\sigma)_{\sigma=1, \dots, s})$$

où :

- $V^\bullet = (V = V^0 \supseteq V^1 \supseteq \dots \supseteq V^s = (0))$ est une filtration décroissante par des sous-espaces vectoriels de codimensions $0 = r_0, r_1, \dots, r_s = r$,
- $W_\bullet = ((0) = W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \dots \subsetneq W_s = W)$ est une filtration croissante par des sous-espaces vectoriels de dimensions $0 = r_0, r_1, \dots, r_s = r$,
- $v_\sigma : V^{\sigma-1}/V^\sigma \xrightarrow{\sim} W_\sigma/W_{\sigma-1}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Alors, chaque strate $\Omega_R(V, W)$, munie de sa projection sur $\mathbb{A}_{k,R}^{r-1}$, est isomorphe au k -schéma $\text{Gr}_R(V, W) \times_k \mathbb{G}_{m,k}^{[r-1]-R}$, muni de la seconde projection canonique. □

Exemple :

Pour $r = 2$, il n'y a qu'un seul sous-ensemble non vide R de $[1]$, à savoir $R = \{1\}$. Pour ce sous-ensemble, $\text{Gr}_R(V, W)$ est isomorphe à

$$\Omega_R(V, W) = \{u_1 \in \text{Hom}(V, W) \mid \text{rang}(u_1) = 1\} \times_k \text{Isom} \left(\bigwedge^2 V, \bigwedge^2 W \right).$$

En effet, la donnée de l'uplet

$$(V = V^0 \supset V^1, W_1 \subset W_2 = W, v_1, v_2)$$

équivaut à la donnée du morphisme $u_1 : V \rightarrow V/V^1 \xrightarrow{v_1} W_1 \hookrightarrow W$ partout de rang 1 et d'un isomorphisme

$$u_2 = v_1 \otimes v_2 : \bigwedge^2 V = (V/V^1) \otimes V^1 \xrightarrow{\sim} W_1 \otimes (W/W_1) = \bigwedge^2 W. \quad \square$$

Comme $\text{Gr}_R(V, W)$ est connexe et lisse sur k de dimension

$$\sum_{1 \leq \sigma < \sigma' \leq s} (r_\sigma - r_{\sigma-1})(r_{\sigma'} - r_{\sigma'-1}) + \sum_{1 \leq \sigma' < \sigma \leq s} (r_\sigma - r_{\sigma-1})(r_{\sigma'} - r_{\sigma'-1}) + \sum_{1 \leq \sigma \leq s} (r_\sigma - r_{\sigma-1})^2 = r^2,$$

on déduit de la proposition :

Corollaire 1.1. *Le morphisme $(\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}) : \Omega(V, W) \rightarrow \mathbb{A}_k^{r-1}$ est lisse purement de dimension relative r^2 et $\Omega^\circ(V, W) \subset \Omega(V, W)$ est l'ouvert complémentaire d'un diviseur à croisements normaux, réunion des $r - 1$ diviseurs lisses $\{\lambda_\rho = 0\}$ pour $\rho = 1, \dots, r - 1$. □*

Le tore $\mathbb{G}_{m,k}^{r-1} = \{(\mu_1, \dots, \mu_{r-1})\}$ agit librement sur $\Omega(V, W)$ par

$$u_1 \mapsto u_1, \quad u_2 \mapsto \mu_1^{-1} u_2, \quad u_3 \mapsto \mu_1^{-2} \mu_2 u_3, \quad \dots, \quad u_r \mapsto \mu_1^{1-r} \mu_2^{2-r} \dots \mu_{r-1} u_r,$$

et

$$\lambda_1 \mapsto \mu_1 \lambda_1, \quad \lambda_2 \mapsto \mu_2 \lambda_2, \quad \dots, \quad \lambda_{r-1} \mapsto \mu_{r-1} \lambda_{r-1},$$

et le quotient

$$\widetilde{\text{Hom}}(V, W) := \Omega(V, W) / \mathbb{G}_{m,k}^{r-1}$$

est un schéma quasi-projectif et lisse, qui contient comme ouvert dense $\text{Isom}(V, W)$ avec pour fermé complémentaire une réunion de $r - 1$ diviseurs lisses à croisements normaux. C'est par définition le *schéma des homomorphismes complets de V dans W* . Par construction, on a un morphisme représentable, lisse et purement de dimension relative r^2 , de champs algébriques

$$\widetilde{\text{Hom}}(V, W) \rightarrow [\mathbb{A}_k^{r-1}/\mathbb{G}_{\text{m},k}^{r-1}],$$

et le diviseur à croisements normaux ci-dessus est l'image réciproque par ce morphisme du diviseur à croisements normaux évident sur le champ algébrique $[\mathbb{A}_k^{r-1}/\mathbb{G}_{\text{m},k}^{r-1}]$.

Remarques :

(i) Le morphisme

$$u_1 : \widetilde{\text{Hom}}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(V, W) - \{0\}$$

peut aussi être obtenu comme le composé

$$\widetilde{\text{Hom}}(V, W) = H_{r-1} \rightarrow \cdots \rightarrow H_1 \rightarrow H_0 = \text{Hom}(V, W) - \{0\}$$

où $H_1 \rightarrow H_0$ est l'éclatement de H_0 le long du fermé des homomorphismes de rang 1 et où, pour $\rho = 2, \dots, r-1$, $H_\rho \rightarrow H_{\rho-1}$ est l'éclatement de $H_{\rho-1}$ le long du transformé strict du fermé de H_0 formé des homomorphismes de rang $\leq \rho$.

(ii) Si $V = W = k^r$ on note encore $\widetilde{\text{gl}}_{r,k}$ le k -schéma $\widetilde{\text{Hom}}(k^r, k^r)$ des *endomorphismes complets* de k^r . La strate ouverte de $\widetilde{\text{gl}}_{r,k}$ est bien entendu $\text{GL}_{r,k}$. Le groupe multiplicatif agit par homothétie sur $\widetilde{\text{gl}}_{r,k}$ et le quotient $\widetilde{\text{gl}}_{r,k}/\mathbb{G}_{\text{m},k}$ est un schéma projectif, isomorphe à la compactification de De Concini et Procesi de $\text{PGL}_{r,k}$. \square

Pour tout k -schéma U , la catégorie $[\mathbb{A}_k^1/\mathbb{G}_{\text{m},k}^1](U)$ a pour objets les couples (\mathcal{L}, λ) formés d'un \mathcal{O}_U -Module inversible \mathcal{L} et d'une section globale λ de ce fibré en droites. On peut donc voir un U -point de $\widetilde{\text{Hom}}(V, W)$ comme un uplet

$$u = (u_1, \dots, u_r, ((\mathcal{L}_1, \lambda_1), \dots, (\mathcal{L}_{r-1}, \lambda_{r-1})))$$

où

$$((\mathcal{L}_1, \lambda_1), \dots, (\mathcal{L}_{r-1}, \lambda_{r-1})) \in \text{ob} [\mathbb{A}_k^{r-1}/\mathbb{G}_{\text{m},k}^{r-1}](U) = (\text{ob} [\mathbb{A}_k^1/\mathbb{G}_{\text{m},k}^1](U))^{r-1}$$

et où

$$u_\rho : \left(\bigwedge^\rho V \right) \otimes_k \mathcal{L}_1^{\otimes(\rho-1)} \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{L}_2^{\otimes(\rho-2)} \cdots \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{L}_{\rho-1} \rightarrow \left(\bigwedge^\rho W \right) \otimes_k \mathcal{O}_U$$

est un homomorphisme partout non nul de \mathcal{O}_U -Modules pour $\rho = 1, \dots, r$.

Soient maintenant S un k -schéma et \mathcal{V}, \mathcal{W} deux \mathcal{O}_S -Modules localement libres de rang constant r . On peut considérer plus généralement les uplets

$$u = (u_1, \dots, u_r, ((\mathcal{L}_1, \lambda_1), \dots, (\mathcal{L}_{r-1}, \lambda_{r-1})))$$

où $((\mathcal{L}_1, \lambda_1), \dots, (\mathcal{L}_{r-1}, \lambda_{r-1}))$ est un objet de $[\mathbb{A}_k^{r-1}/\mathbb{G}_{\text{m},k}^{r-1}](S)$ et où

$$u_\rho : \left(\bigwedge^\rho \mathcal{V} \right) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}_1^{\otimes(\rho-1)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}_2^{\otimes(\rho-2)} \cdots \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}_{\rho-1} \rightarrow \bigwedge^\rho \mathcal{W}$$

est un homomorphisme partout non nul de \mathcal{O}_S -Modules pour $\rho = 1, \dots, r$.

Définition 2. Un homomorphisme complet de \mathcal{V} dans \mathcal{W} est un uplet u comme ci-dessus tel que, pour tout ouvert de Zariski U de S et toutes trivialisations $\mathcal{V}_U \cong V \otimes_k \mathcal{O}_U$ et $\mathcal{W}_U \cong W \otimes_k \mathcal{O}_U$ de \mathcal{V} et \mathcal{W} au-dessus de U , la restriction de u à U soit un U -point de $\widetilde{\text{Hom}}(V, W)$.

Les homomorphismes complets u de \mathcal{V} dans \mathcal{W} sont par définition des homomorphismes $u_1 : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ complétés par des données supplémentaires. Lafforgue les note commodément $u : \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{W}$.

3.2. Pré-chtoucas itérés

Définition 3. Un pré-chtouca itéré de rang r sur un schéma U consiste en les données :

– d’un diagramme

$$\mathcal{E} \xrightarrow{j} \mathcal{E}' \xleftarrow{j'} \mathcal{E}''$$

et de deux morphismes $\infty : U \rightarrow X$ et $o : U \rightarrow X$, où \mathcal{E} est un fibré vectoriel de rang r sur $U \times X$, j est une modification élémentaire supérieure de \mathcal{E} le long du graphe de ∞ et j' est une modification élémentaire inférieure de \mathcal{E}' le long du graphe de o ,

– de \mathcal{O}_U -Modules inversibles $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{r-1}$ munis de sections globales $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$,

– pour chaque entier $\rho = 1, \dots, r$, d’un homomorphisme de $\mathcal{O}_{U \times X}$ -Modules

$$u_\rho : \left(\bigwedge^\rho \tau \mathcal{E} \right) \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{L}_1^{\otimes (q-1)(\rho-1)} \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{L}_2^{\otimes (q-1)(\rho-2)} \dots \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{L}_{\rho-1}^{\otimes (q-1)} \rightarrow \bigwedge^\rho \mathcal{E}'' ,$$

de telle sorte que le uplet

$$u = (u_1, \dots, u_r, ((\mathcal{L}_1^{\otimes (q-1)}, \lambda_1^{q-1}), \dots, (\mathcal{L}_{r-1}^{\otimes (q-1)}, \lambda_{r-1}^{q-1}))) : \tau \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E}''$$

soit un homomorphisme complet.

En faisant varier U , on définit de manière évidente le champ \mathcal{C}^r des pré-chtoucas itérés de rang r . Il n’est pas difficile de vérifier que c’est un champ algébrique (au sens d’Artin), localement de type fini, muni d’un morphisme de champs

$$(\infty, o, ((\mathcal{L}_1, \lambda_1), \dots, (\mathcal{L}_{r-1}, \lambda_{r-1}))) : \mathcal{C}^r \rightarrow X \times X \times [\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}].$$

Pour tout $R \subset [r-1]$, on dispose de la strate localement fermée $\mathcal{C}_R^r \subset \mathcal{C}^r$ image réciproque de la strate $[\mathbb{A}_R^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}] \subset [\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}]$. Si on écrit $R = \{r_1, \dots, r_{s-1}\}$ pour des entiers $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_{s-1} < r_s = r$, la donnée d’un U -point de \mathcal{C}_R^r au-dessus d’un U -point $((\mathcal{L}_1, \lambda_1), \dots, (\mathcal{L}_{r-1}, \lambda_{r-1}))$ de $[\mathbb{A}_R^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}]$ équivaut aux données suivantes :

– un diagramme

$$\mathcal{E} \xrightarrow{j} \mathcal{E}' \xleftarrow{j'} \mathcal{E}''$$

et deux morphismes $\infty : U \rightarrow X$ et $o : U \rightarrow X$, où \mathcal{E} est un fibré vectoriel de rang r sur $U \times X$, j est une modification élémentaire supérieure de \mathcal{E} le long du graphe de ∞ et j' est une modification élémentaire inférieure de \mathcal{E}' le long du graphe de o ,

– une filtration décroissante

$${}^{\tau}\mathcal{E} = \mathcal{F}^0 \supseteq \mathcal{F}^1 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{F}^{s-1} \supseteq \mathcal{F}^s = (0)$$

de ${}^{\tau}\mathcal{E}$ par des sous- $\mathcal{O}_{U \times X}$ -Modules localement facteurs directs, de rangs $r = r - r_0, r - r_1, \dots, r - r_{s-1}, r - r_s = 0$,

– une filtration croissante

$$(0) = \mathcal{E}''_0 \subsetneq \mathcal{E}''_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{E}''_{s-1} \subsetneq \mathcal{E}''_s = \mathcal{E}''$$

de \mathcal{E}'' par des sous- $\mathcal{O}_{U \times X}$ -Modules localement facteurs directs, de rangs $0 = r_0, r_1, \dots, r_{s-1}, r_s = r$,

– d'isomorphismes de $\mathcal{O}_{U \times X}$ -Modules

$$v_{\sigma} : \frac{\mathcal{F}^{\sigma-1}}{\mathcal{F}^{\sigma}} \otimes \left(\bigotimes_{\sigma'=1}^{\sigma-1} {}^{\tau}\mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right) \xrightarrow{\sim} \frac{\mathcal{E}''_{\sigma}}{\mathcal{E}''_{\sigma-1}} \otimes \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} \mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right)$$

pour $\sigma = 1, \dots, s$.

Pour un tel U -point, on note

$$\mathcal{E}'_{\sigma} = j'(\mathcal{E}''_{\sigma}) \subset \mathcal{E}' \text{ et } \mathcal{E}_{\sigma} = j^{-1}(\mathcal{E}'_{\sigma}) \subset \mathcal{E}$$

quel que soit $\sigma = 0, 1, \dots, s-1$, $\mathcal{E}'_s = \mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}$, et on note $\mathcal{G}_1 = \mathcal{E}_1$, $\mathcal{G}'_1 = \mathcal{E}'_1$ et

$$\mathcal{G}_{\sigma} = \frac{\mathcal{E}_{\sigma}}{\mathcal{E}_{\sigma-1}} \otimes_{\mathcal{O}_U} \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} \mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right) \text{ et } \mathcal{G}'_{\sigma} = (\mathcal{F}^{\sigma-1} \cap {}^{\tau}\mathcal{E}_{\sigma}) \otimes_{\mathcal{O}_U} \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} {}^{\tau}\mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right)$$

quel que soit $\sigma = 2, \dots, s$. On définit des diagrammes de $\mathcal{O}_{U \times X}$ -Modules

$$\tilde{\mathcal{G}}_1 = (\mathcal{G}_1 \hookrightarrow \mathcal{G}'_1 \longleftarrow {}^{\tau}\mathcal{G}_1)$$

et

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\sigma} = \left(\begin{array}{c} \mathcal{G}_{\sigma} \\ \bar{j} \downarrow \\ \frac{\mathcal{E}'_{\sigma}}{\mathcal{E}'_{\sigma-1}} \otimes_{\mathcal{O}_U} \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} \mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right) \longleftarrow \mathcal{G}'_{\sigma} \longrightarrow {}^{\tau}\mathcal{G}_{\sigma} \end{array} \right)$$

pour $\sigma = 2, \dots, s$ de la façon suivante :

– la flèche de gauche de $\tilde{\mathcal{G}}_1$ est induite par j et celle de droite est la composée

$${}^{\tau}\mathcal{G}_1 \hookrightarrow {}^{\tau}\mathcal{E} \rightarrow {}^{\tau}\mathcal{E}/\mathcal{F}^1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}''_1 \xrightarrow{j'} \mathcal{G}'_1,$$

– pour chaque $\sigma = 2, \dots, r$, la flèche verticale

$$\bar{j} : \mathcal{G}_{\sigma} \rightarrow \frac{\mathcal{E}'_{\sigma}}{\mathcal{E}'_{\sigma-1}} \otimes_{\mathcal{O}_U} \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} \mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right)$$

de $\tilde{\mathcal{G}}_{\sigma}$ est induite par j , sa flèche horizontale de gauche est la composée

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G}'_{\sigma} & \hookrightarrow & \mathcal{F}^{\sigma-1} \otimes_{\mathcal{O}_U} \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} {}^{\tau}\mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right) & \twoheadrightarrow & \frac{\mathcal{F}^{\sigma-1}}{\mathcal{F}^{\sigma}} \otimes_{\mathcal{O}_U} \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} {}^{\tau}\mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right) \\ & \xrightarrow{\sim} & \frac{\mathcal{E}''_{\sigma}}{\mathcal{E}''_{\sigma-1}} \otimes_{\mathcal{O}_U} \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} \mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right) & \xrightarrow{\bar{j}'} & \frac{\mathcal{E}'_{\sigma}}{\mathcal{E}'_{\sigma-1}} \otimes_{\mathcal{O}_U} \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} \mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right) \end{array}$$

où $\overline{j'}$ est induite par j' , et sa flèche horizontale de droite est induite par la composée

$$\mathcal{G}'_\sigma \hookrightarrow {}^\tau \mathcal{E}_\sigma \twoheadrightarrow {}^\tau \mathcal{E}_\sigma / {}^\tau \mathcal{E}_{\sigma-1} = {}^\tau \mathcal{G}_\sigma.$$

3.3. Chtoucas itérés

Soient $R = \{r_1, \dots, r_{s-1}\} \subset [r-1]$ et

$$\tilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \xrightarrow{j} \mathcal{E}' \xleftarrow{j'} \mathcal{E}'' \xleftarrow{u} {}^\tau \mathcal{E})$$

un U -point de \mathcal{C}_R^r . Les diagrammes $\tilde{\mathcal{G}}_1, \dots, \tilde{\mathcal{G}}_s$ construits précédemment ressemblent beaucoup à des chtoucas de rangs $r_1 - r_0, \dots, r_s - r_{s-1}$, à droite pour le premier et à gauche pour les $s - 1$ autres. Suivant Lafforgue, nous allons dresser une liste de conditions qui assurent que ces diagrammes sont bien des chtoucas.

La première a été introduite par Drinfeld en rang 2 et porte sur la fibre du chtouca pré-itéré au point générique de X . Elle peut s'exprimer sous les deux formes équivalentes (a) et (a') du lemme suivant :

Lemme 5. *Pour tout $\rho = 1, \dots, r$, notons u_ρ° la restriction de u_ρ à l'ouvert de $U \times X$ complémentaire des graphes des morphismes ∞ et o , et identifions les restrictions de \mathcal{E} et \mathcal{E}'' à cet ouvert à l'aide de $j'^{-1} \circ j$. Avec ces notations les deux conditions ci-dessous sont équivalentes :*

- (a) *il n'existe aucun point géométrique de U tel que la fibre en ce point d'un des u_ρ° soit τ -nilpotente,*
- (a') *pour tout $\sigma = 1, \dots, s - 1$, on a $\mathcal{F}^\sigma \cap {}^\tau \mathcal{E}_\sigma = (0)$ dans ${}^\tau \mathcal{E}$.*

De plus, si ces conditions équivalentes sont vérifiées, le plus grand ouvert de $U \times X$ où toutes les flèches des diagrammes $\tilde{\mathcal{G}}_\sigma$ ci-dessus sont des isomorphismes rencontre chaque fibre de la projection canonique $U \times X \rightarrow U$ suivant un ouvert dense. □

La condition (a') implique que les restrictions à chaque fibre de la projection canonique $U \times X \rightarrow U$ des flèches horizontales des diagrammes $\tilde{\mathcal{G}}_1, \dots, \tilde{\mathcal{G}}_s$ sont toutes injectives. Elle implique aussi que la somme

$$\mathcal{F}^\sigma + {}^\tau \mathcal{E}_\sigma \subset {}^\tau \mathcal{E}$$

est directe et que, fibre à fibre de la projection canonique $U \times X \rightarrow U$, elle est de même rang r que ${}^\tau \mathcal{E}$.

Les autres conditions sont de nature locale sur X :

- (b) $\mathcal{E}'/\mathcal{E}'_\sigma$ est un $\mathcal{O}_{U \times S}$ -Module localement libre pour $\sigma = 0, 1, \dots, s - 1$,
- (c) pour tout $\sigma = 1, \dots, s$, l'homomorphisme composé

$$\mathcal{E}'_\sigma \subset \mathcal{E}' \twoheadrightarrow \mathcal{E}'/j(\mathcal{E})$$

est surjectif,

- (d) pour tout $\sigma = 1, \dots, s - 1$, on a $\mathcal{F}^{\sigma-1} + {}^\tau \mathcal{E}_\sigma = {}^\tau \mathcal{E}$.

La condition (c) assure en particulier que, pour $\sigma = 2, \dots, s$,

$$\bar{j} : \mathcal{G}_\sigma \rightarrow \frac{\mathcal{E}'_\sigma}{\mathcal{E}'_{\sigma-1}} \otimes_{\mathcal{O}_U} \left(\bigotimes_{\sigma'=0}^{\sigma-1} \mathcal{L}_{r_{\sigma'}} \right)$$

est un isomorphisme. Sous les conditions (a) et (c), on peut donc récrire, pour $\sigma = 2, \dots, s$, le diagramme $\tilde{\mathcal{G}}_\sigma$ sous la forme

$$\tilde{\mathcal{G}}_\sigma = (\mathcal{G}_\sigma \leftrightarrow \mathcal{G}'_\sigma \leftrightarrow {}^\tau \mathcal{G}_\sigma).$$

Lafforgue montre alors les deux lemmes suivants.

Lemme 6. (i) *Sous les conditions (a), (b), (c) et (d), le diagramme $\tilde{\mathcal{G}}_1$ est un chtouca à droite de rang r_1 et les diagrammes $\tilde{\mathcal{G}}_2, \dots, \tilde{\mathcal{G}}_s$ sont des chtoucas à gauche de rangs $r_2 - r_1, \dots, r_s - r_{s-1}$. De plus, le pôle de $\tilde{\mathcal{G}}_1$ est ∞ , le zéro de $\tilde{\mathcal{G}}_\sigma$ est égal au pôle de $\tilde{\mathcal{G}}_{\sigma+1}$ pour $\sigma = 1, \dots, s-1$ et le zéro de $\tilde{\mathcal{G}}_s$ est o .*

(ii) *Les conditions (a), (b), (c) et (d) définissent un ouvert $\overline{\text{Cht}}_R^r \subset \mathcal{C}_R^r$. \square*

Les objets de $\overline{\text{Cht}}_R^r$ sont appelés les *chtoucas itérés de rang r et de type R* . Un tel chtouca itéré admet un pôle ∞ , un zéro o et des *dégénérateurs* $o_1 = \infty_2, \dots, o_{s-1} = \infty_s$.

Bien entendu, pour $R = \emptyset$, $\overline{\text{Cht}}_R^r$ n'est autre que le champ Cht^r des chtoucas de rang r .

Lemme 7. *Il existe un unique sous-champ ouvert $\overline{\text{Cht}}^r \subset \mathcal{C}^r$ tel que, pour chaque $R = \{r_1, \dots, r_{s-1}\}$ comme ci-dessus, la trace de cet ouvert sur \mathcal{C}_R^r soit égale à $\overline{\text{Cht}}_R^r$. \square*

Le champ $\overline{\text{Cht}}^r$ est par définition le champ des *chtoucas itérés de rang r* . Il contient comme ouvert dense le champ des chtoucas Cht^r . Tout comme un chtouca ordinaire, un chtouca itéré admet un degré, à savoir le degré du fibré vectoriel sous-jacent \mathcal{E} , et on a un découpage de $\overline{\text{Cht}}^r$ en composantes

$$\overline{\text{Cht}}^r = \prod_{d \in \mathbb{Z}} \overline{\text{Cht}}^{r,d}$$

indexées par ce degré. Bien sûr, pour chaque entier d , $\text{Cht}^{r,d}$ est un ouvert dense de $\overline{\text{Cht}}^{r,d}$.

Pour chaque $R = \{r_1, \dots, r_{s-1}\} \subset [r-1]$, considérons le champ algébrique

$$\text{Cht}^R = \text{Cht}^{r_1} \times_X \text{Cht}^{r_2-r_1} \times_{X, \text{Frob}_X} \cdots \times_{X, \text{Frob}_X} \text{Cht}^{r_s-r_{s-1}}$$

qui paramètre les familles $(\tilde{\mathcal{E}}_1, \dots, \tilde{\mathcal{E}}_s)$ de « petits » chtoucas (à droite), de rangs $r_1 - r_0, \dots, r_s - r_{s-1}$ respectivement, tels que le zéro o_1 de $\tilde{\mathcal{E}}_1$ soit égal au pôle ∞_2 de $\tilde{\mathcal{E}}_2$ et que, pour $\sigma = 2, \dots, s-1$, le zéro o_σ de $\tilde{\mathcal{E}}_\sigma$ soit le transformé par Frobenius du pôle $\infty_{\sigma+1}$ de $\tilde{\mathcal{E}}_{\sigma+1}$. C'est un champ de Deligne-Mumford séparé et lisse purement de dimension relative

$$(2r_1 - 2) + (2(r_2 - r_1) - 2) + \cdots + (2(r_s - r_{s-1}) - 2) = 2r - 2s$$

au dessus de $X \times X^{s-1} \times X$ par le morphisme $(\infty, \infty_2, \dots, \infty_s, o)$ où $\infty = \infty_1$ est le pôle de $\tilde{\mathcal{E}}_1$ et $o = o_s$ est le zéro de $\tilde{\mathcal{E}}_s$.

Lemme 8. *Le morphisme de champs*

$$\overline{\text{Cht}}_R^r \rightarrow \text{Cht}^R$$

qui envoie le chtouca itéré $\tilde{\mathcal{E}}$ sur $(\tilde{\mathcal{G}}_1, \text{Frob}_o(\tilde{\mathcal{G}}_2), \dots, \text{Frob}_o(\tilde{\mathcal{G}}_s))$, est fini, surjectif et radiciel. (Rappelons que Frob_o est le morphisme de Frobenius partiel au dessus de l'endomorphisme $\text{Id}_X \times \text{Frob}_X$ de $X \times X$.) \square

Le champ Cht^R se décompose en

$$\text{Cht}^R = \coprod_{d_\bullet \in \mathbb{Z}^s} \text{Cht}^{R, d_\bullet}$$

où

$$\text{Cht}^{R, d_\bullet} := \text{Cht}^{r_1, d_1} \times_X \text{Cht}^{r_2 - r_1, d_2} \times_{X, \text{Frob}_X} \cdots \times_{X, \text{Frob}_X} \text{Cht}^{r_s - r_{s-1}, d_s}.$$

On notera

$$\overline{\text{Cht}}_R^r = \coprod_{d_\bullet \in \mathbb{Z}^s} \overline{\text{Cht}}_R^{r, d_\bullet}$$

la décomposition image réciproque par le morphisme $\overline{\text{Cht}}_R^r \rightarrow \text{Cht}^R$ ci-dessus. On vérifie que

$$\overline{\text{Cht}}_R^{r, d_\bullet} := \overline{\text{Cht}}_R^r \cap \overline{\text{Cht}}^{r, d_\bullet} = \coprod_{\substack{d_\bullet \in \mathbb{Z}^s \\ d_1 + \cdots + d_s = d - s + 1}} \overline{\text{Cht}}_R^{r, d_\bullet}$$

(le décalage $-s + 1$ provient des Frobenius partiels).

3.4. Chtoucas itérés et troncatures

Soient d un entier et $p : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ un paramètre de troncature. Pour chaque $\rho = 0, 1, \dots, r$, notons $\tilde{p}(\rho)$ l'unique entier appartenant à l'intervalle de longueur 1

$$]p(\rho) + \frac{\rho}{r}d - 1, p(\rho) + \frac{\rho}{r}d].$$

On définit alors des entiers d_1, \dots, d_s par

$$d_1 = \tilde{p}(r_1) \text{ et } d_\sigma = \tilde{p}(r_\sigma) - \tilde{p}(r_{\sigma-1}) - 1, \forall \sigma = 2, \dots, s,$$

et des paramètres de troncature $p_1 : [0, r_1] \rightarrow \mathbb{R}, \dots, p_s : [0, r_s - r_{s-1}] \rightarrow \mathbb{R}$ en imposant que

$$p_1(\rho_1) = \tilde{p}(\rho_1) - \frac{\rho_1}{r_1}d_1, \forall \rho_1 = 1, \dots, r_1 - 1,$$

et

$$p_\sigma(\rho_\sigma) = \tilde{p}(r_{\sigma-1} + \rho_\sigma) - \tilde{p}(r_{\sigma-1}) - 1 - \frac{\rho_\sigma}{r_\sigma - r_{\sigma-1}}d_\sigma, \forall \rho_\sigma = 1, \dots, r_\sigma - r_{\sigma-1}.$$

À décalage et normalisation près, les p_σ sont essentiellement les restrictions de p aux intervalles $[r_{\sigma-1}, r_\sigma]$ comme dans la figure 1. On note

$$\begin{aligned} \text{Cht}^{R, d; \leq p} &= \text{Cht}^{r_1, d_1; \leq p_1} \times_X \text{Cht}^{r_2 - r_1, d_2; \leq p_2} \times_{X, \text{Frob}_X} \cdots \\ &\cdots \times_{X, \text{Frob}_X} \text{Cht}^{r_s - r_{s-1}, d_s; \leq p_2} \subset \text{Cht}^R. \end{aligned}$$

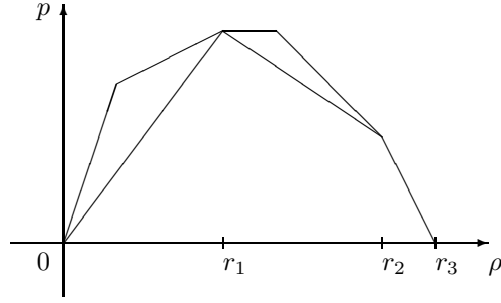


FIG. 1

Définition 4. Un paramètre de troncature $p : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ est dit μ -convexe pour un nombre réel $\mu \geq 0$ si l'on a

$$(p(\rho) - p(\rho - 1)) - (p(\rho + 1) - p(\rho)) \geq \mu, \quad \forall \rho = 1, \dots, r - 1.$$

Une propriété est dite vraie « pour tout paramètre de troncature assez convexe » s'il existe un nombre réel $\mu \geq 0$ tel que la propriété soit vraie pour tout paramètre de troncature qui est μ -convexe.

On remarquera que les paramètres de troncature p_σ définis ci-dessus sont automatiquement $(\mu - 2)$ -convexes dès que p est μ -convexe.

Théorème 9. Pour tout entier d et tout paramètre de troncature $p : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est 2-convexe, il existe un ouvert

$$\overline{\text{Cht}}^{r,d;\leq p} \subset \overline{\text{Cht}}^{r,d}$$

de la d -ième composante du champ des chtoucas itérés ayant les propriétés suivantes :

– pour tout $R \subset [r - 1]$, $\overline{\text{Cht}}_R^{r,d;\leq p} = \overline{\text{Cht}}_R^{r,d} \cap \overline{\text{Cht}}^{r,d;\leq p}$ est l'image réciproque par le morphisme fini, surjectif et radiciel $\overline{\text{Cht}}_R^r \rightarrow \text{Cht}^R$ de l'ouvert $\text{Cht}^{R,d;\leq p}$; en particulier, on a $\overline{\text{Cht}}_\emptyset^{r,d;\leq p} = \text{Cht}^{r,d;\leq p}$;

– le morphisme de champs $(\infty, o) : \overline{\text{Cht}}^{r,d;\leq p} \rightarrow X \times X$ est propre (et donc séparé et de type fini) ;

– si l'on suppose de plus que p est assez convexe relativement au genre de la courbe X , le morphisme de champs (∞, o) ci-dessus est lisse purement de dimension relative $2r - 2$ et le fermé complémentaire dans $\overline{\text{Cht}}^{r,d;\leq p}$ de la strate ouverte $\text{Cht}^{r,d;\leq p}$ est un diviseur à croisements normaux relatif sur $X \times X$, qui est réunion de $r - 1$ diviseurs lisses et dont la stratification canonique est celle par les $\overline{\text{Cht}}_R^{r,d;\leq p}$ pour R parcourant les parties non vides de $[r - 1]$. \square

Références

- [1] V. G. DRINFELD, Moduli varieties of F -sheaves, *Funct. Anal. and its Appl.* **21**, (1987), p.107–122.

- [2] V. G. DRINFELD, Proof of the Petersson conjecture for $GL(2)$ over a global field of characteristic p , *Funct. Anal. and its Appl.* **22**, (1988), p. 28–43.
- [3] V. G. DRINFELD, Cohomology of compactified moduli varieties of F -sheaves of rank 2, *J. of Soviet Math.* **46**, (1989), p. 1789–1821.
- [4] L. LAFFORGUE, Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson, *Astérisque* **243**, (1997).
- [5] L. LAFFORGUE, Une compactification des champs classifiant les chtoucas de Drinfeld, *J. Amer. Math. Soc.* **11**, (1998); p. 1001–1036.
- [6] L. LAFFORGUE, Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands, Prépublication de l'Université de Paris-Sud, Novembre 2000, <http://www.ihes.fr/PREPRINTS/M00/M00-70.ps.gz>
- [7] G. LAUMON, La correspondance de Langlands sur les corps de fonctions [d'après Laurent Lafforgue], Séminaire Bourbaki, Mars 2000