LIVRES

Geometric nonlinear Functional analysis, Vol. 1
Y. Benyamini et J. Lindenstrauss
American Mathematical Society Colloquium Publications **48**, 2000. xii+488 p.
ISBN 0-8218-0835-4. $ 65

Les « isomorphismes » entre espaces de Banach sont le plus souvent des applications linéaires continues. En d'autres termes, un espace de Banach est par définition un espace vectoriel normé complet, supposé muni de toute cette structure. Il est pourtant naturel, et parfois important, d'affaiblir la structure et de considérer un espace de Banach comme un espace métrique, ou un espace uniforme, ou enfin un espace topologique. Cet affaiblissement est motivé par l'importance des fonctionnelles non linéaires dans de nombreuses applications : points fixes, meilleure approximation, optimisation, équations différentielles, analyse convexe... Il y a bien sûr des liens étroits entre la théorie linéaire et la théorie non linéaire : on peut par exemple esayer de dériver une application non linéaire, ou au contraire « intégrer » un résultat linéaire pour tenter de l'étendre au cas non linéaire.

Ces questions délicates sont magistralement exposées dans ce livre, au moyens d'énoncés clairs et bien présentés des résultats les plus récents, et de démonstrations qui font appel aux méthodes les plus variées de l'analyse. Les dix-sept chapitres sont essentiellement indépendants ; un cours de troisième cycle semestriel permettrait sans doute de couvrir trois ou quatre d'entre eux. De nombreux problèmes ouverts sont présentés, et on peut espérer que les chercheurs répondront à cette invitation à visiter les profondeurs de l'analyse fonctionnelle. Résumons maintenant le contenu de chaque chapitre.

Le chapitre 1 est consacré aux rétractions, aux extensions et aux sélections des applications non linéaires, avec des résultats classiques comme le théorème de sélection de Michael. Les Lipschitz-rétracts absolus sont étudiés, et on montre que cette classe contient les espaces de fonctions uniformément continues sur les espaces métriques arbitraires, et la famille des convexes fermés bornés d'un espace de Banach. Des conséquences linéaires, comme la construction de l'opérateur d'extension simultanée de Borsuk-Dugundji, sont montrées.

Le chapitre 2 donne des résultats plus précis, comme des estimations quantitatives sur l'approximation des fonctions uniformément continues par des fonctions Lipschitziennes ou Hölderiennes sur les espaces de Banach classiques, ou le contrôle du module de continuité de l'application de meilleure approximation sur un convexe d'un espace uniformément convexe et lisse. On montre que le sélecteur de Steiner est quantitativement optimal, et on en déduit que si E est un espace de Banach de dimension infinie, il est impossible de choisir un point dans chaque sous-ensemble convexe fermé borné d'une façon *uniformément* continue.

La théorie du point fixe est étudiée dans le chapitre 3, où l'on rencontre les problèmes liés au manque de compacité. Par exemple, il existe une rétraction Lipschitzienne de la boule unité d'un espace de Banach arbitraire de dimension infinie sur sa sphère. Les points fixes des contractions sur les convexes faiblement compacts sont étudiés, avec l'exemple d'Alspach et les théorèmes de Maurey. Rappelons qu'on ne sait pas si toute contraction d'un convexe borné d'un espace réflexif a un point fixe.

Les fonctions convexes sont étudiées dans le chapitre 4 pour leurs propriétés de différentiablité. La théorie classique est esquissée, avec ses outils variés : dualité, renormages, principes variationnels, ensembles poreux. La caractérisation récente des espaces super-réflexifs par l'approximation des fonctions Lipschitziennes par des différences de fonctions convexes, due à Cepedello-Boiso, est établie.

Le point de vue dual est l'objet du chapitre 5, consacré à la propriété de Radon-Nikodym. Un espace X a cette propriété lorsque toute fonction Lipschitzienne de variable réelle à valeurs dans X est dérivable presque partout. Le point de vue original de Lebesgue s'étend donc ainsi à la dimension infinie. Diverses caractérisations géométriques et analytiques de la propriété de Radon-Nikodym sont établies, avec les exemples classiques et moins classiques.

Le chapitre 6 est consacré à la lissité des fonctions Lipschitziennes entre espaces de dimension infinie. Il est naturel de supposer que l'espace image a la propriété de Radon-Nikodym. Mais un problème subsiste, qui est d'avoir une notion de « presque partout » en l'absence de mesure de Haar. Quelques-unes de ces notions sont introduites. Certaines sont (non trivialement !) équivalentes, d'autres non. De plus, les notions correspondantes d'ensembles négligeables ne sont pas stables par Lipschitz-isomorphisme, et « Fubini » ne marche pas. On montre cependant que toute application Lipschitzienne d'un espace séparable dans un espace ayant la propriété de Radon-Nikodym est Gâteaux-différentiable « presque partout ». L'étude très délicate de résultats analogues pour la Fréchet différentiabilité est en cours. Le théorème de Preiss sur les fonctions à valeurs réelles est un premier résultat fondamental.

Les résultats précédents sont appliqués dans le chapitre 7 à la classification Lipschitzienne des espaces de Banach. Suivant Heinrich-Mankiewicz, on montre par exemple que deux espaces réflexifs Lipschitz-isomorphes sont tels que chacun est isomorphe à un sous-espace complémenté de l'autre. En utilisant la méthode de décomposition, on en déduit souvent l'isomorphisme linéaire ; c'est le cas des espaces L^p si $1 < p < \infty$. Le cas de c_0 est élucidé par d'autres méthodes dans le chapitre 10, mais celui de ℓ^1 est encore ouvert. En fait, on ne sait pas si deux espaces de Banach *séparables* Lipschitz-isomorphes sont linéairement isomorphes. Des contre-exemples non séparables ont été construits par Aharoni et Lindenstrauss.

Le chapitre 8 relève de méthodes Hilbertiennes, puisque les noyaux définis positifs sont appliqués aux plongements uniformes des espaces métriques dans l'espace de Hilbert. Le résultat principal est qu'un espace normé (ou même quasi-normé) est uniformément homéomorphe à un *sous-ensemble* de l'espace de Hilbert si et seulement s'il est *linéairement* isomorphe à un sous-espace de $L^0(\mu)$ muni de la topologie de la convergence en mesure.

Les applications uniformément continues se comportent comme les applications Lipschitziennes pour les grandes distances, mais leur comportement infinitésimal n'est pas contrôlable. De plus, les extensions radiales des homéomorphismes uniformes entre sphères ne sont pas uniformément continues en général. Il en résulte une classification des sphères dans cette catégorie très différente de celle des espaces. Le chapitre 9 y est consacré ; il contient diverses extensions de l'application de Mazur, qui donne un homéomorphisme uniforme entre les sphères unités des espaces L^p pour différents $p \in [1, \infty)$.

Le chapitre 10 est consacré à la classification des espaces pour les homéomorphismes uniformes. Des outils importants y sont introduits : ultrapuissances, presque-milieux, principe de Gorelik. Les ultrapuisances permettent de se ramener dans certains cas aux applications Lipschitziennes, donc d'utiliser la différentiation quand les espaces sont uniformément convexes. Cependant, un exemple de Ribe montre que deux espaces *séparables* peuvent être uniformément homéomorphes sans être linéairement isomorphes. Une application remarquable des homéomorphismes uniformes, due à G. Henkin, est que l'espace des fonctions C^1 sur une sphère de dimension au moins

2 n'est pas isomorphe à un espace $C(K)$. On montre également que dans un espace de dimension infinie, deux réseaux sont toujours Lipschitz-isomorphes. Par contre, c'est faux en dimension finie ! Le chapitre 11 s'intéresse à la notion très récente de quotient Lipschitzien ou uniforme. On y montre par exemple qu'un quotient uniforme d'espace Hilbertien est encore Hilbertien.

Dans le chapitre 12, on cherche des sphères de dimension finie sur lesquelles une fonction uniformément continue donnée sur un espace de Banach oscille peu. Cela peut être fait, et permet de montrer le théorème fondamental de Dvoretzky sur les sections presque euclidiennes de tous les espaces normés de dimension infinie. Le théorème de Krivine permet quant à lui d'obtenir des sections régulières comme suite de blocs d'une base donnée, au moyen du théorème combinatoire de Ramsey.

Les résultats du chapitre 12 ont-ils une extension à la dimension infinie ? Cette question est étudiée dans le chapitre 13. La solution négative par Odell et Schlumprecht du problème de la distorsion montre qu'une fonction Lipschitzienne sur ℓ^2 peut fortement osciller sur la sphère de *tous* les sous-espaces de dimension infinie. La démonstration utilise l'application de Mazur, ainsi que l'espace construit par Tsirelson en 1974 qui ne contient ni c_0 ni aucun ℓ^p avec $1 \leqslant p < \infty$. Une situation inverse, où l'on n'a pas distorsion et où des sous-espaces de ce type peuvent être construits, est celle des espace stables de Krivine et Maurey.

Si une application est presque une isométrie, est-elle proche d'une isométrie ? Dans le chapitre 14, on montre l'injectivité globale des quasi-isométries propres. En dimension finie, les quasi-isométries sont presque partout différentiables par le théorème de Rademacher, et la dérivée appartient à l'espace BMO. C'est d'ailleurs par ce biais que l'espace BMO a été introduit. Le chapitre 15 poursuit l'étude des quasi-isométries, mais cette fois du point de vue global, en donnant une réponse positive au problème de Myers-Ulam sur l'approximation des presque isométries surjectives.

Le chapitre 16 est consacée aux « sommes tordues » d'espaces de Banach ; disons que si Y est un sous-espace fermé de X, alors X est une somme tordue de Y et de X/Y. Il se trouve que le cadre naturel pour cette étude est celui des quasi-Banach, et que les sommes tordues sont étroitement liées à l'approximation des applications quasi-linéaires. Ceci fournit un lien inattendu et profond entre les théories linéaires et non linéaires. Parmi les exemples importants présentés dans ce chapitre, mentionnons l'espace de Kalton-Peck, et l'exemple explicite dû à Kalton d'un espace de Banach complexe qui n'est pas isomorphe à son conjugué. Notons que le premier exemple de somme tordue de deux espaces de Hilbert est dû à Enflo, Lindenstrauss et Pisier, et que de tels espaces peuvent être assez différents de l'espace de Hilbert. Un approfondissement de ces questions est à chercher dans les travaux de Kalton sur les relations entre les sommes tordues, les commutateurs non linéaires et l'interpolation.

Enfin, le chapitre 17 concerne les structures de groupe sur les espaces de Banach. Dans ce cadre, le « cinquième problème de Hilbert » s'écrit : soit G un groupe topologique commutatif et métrique qui est localement homéomorphe à un espace de Banach. Peut-on trouver des cartes pour lesquelles la loi de groupe devient l'addition ? Ce problème est encore largement ouvert, malgré des résultats partiels dûs à Enflo et présentés ici.

Une bibliographie très complète et un index détaillé concluent cet ouvrage, que je recommande vivement aux chercheurs en analyse fonctionnelle ainsi qu'à tous ceux qui souhaitent comprendre à quelle profondeur la géométrie des espaces de Banach est à présent parvenue, et quels outils elle a permis de développer. Ils pourront ainsi constater que les questions linéaires et non linéaires sont intimement liées, et que ces dernières sont elles aussi l'objet de recherches vivantes, et fascinantes.

Gilles Godefroy, Équipe d'analyse de Paris 6

Computer Algebra Systems, a pratical guide
M. J. Wester, éditeur
John Wiley & Sons, 1999. xvi+436 pages. ISBN 0-471-98353-5. £65

Cet ouvrage collectif se veut un guide pratique des Systèmes de Calculs Formels (SCF), c'est-à dire des programmes informatiques destinés à résoudre symboliquement, via le calcul algébrique, des problèmes mathématiques. Les sept principaux systèmes généralistes (Axiom, Derive, Macsyma, Maple, Mathematica, MuPAD, et Reduce) sont comparés en détail avec un luxe d'exemples, souvent pathologiques toutefois ; une soixantaine d'autres programmes plus ou moins spécialisés sont mentionnés dans un appendice, nécessairement un peu rapide. Le guide vise le mathématicien utilisateur occasionnel et ne suppose pas de connaissance particulière des systèmes décrits. En particulier, l'accent est mis sur le type de résultats directement accessibles (essentiellement sans programmation) et sur les limites des différents systèmes ; les techniques algorithmiques elles-mêmes sont peu abordées.

La moitié des articles sont comparatifs et traitent de sujets attendus (systèmes d'(in)équations, équations différentielles ordinaires, calculs de limites), ou plus ésotériques (génération de code, évaluation et simplification). Les mathématiques sont pour l'essentiel de formulation élémentaire, l'approche générale pragmatique, mais le souci de précision est louable et l'analyse des difficultés rencontrées dans la formulation puis la résolution des problèmes est instructive. Le chapitre consacré aux systèmes d'équations polynomiales est un exemple un peu extrême : le résultat attendu est « une décomposition de la variété des solutions en composantes irréductibles, i.e. une représentation du radical de l'idéal de définition comme intersection d'idéaux premiers », formulation recevant ensuite un contenu algorithmique précis (décomposition minimale en systèmes triangulaires). Suite aux échecs spectaculaires de la plupart des systèmes dans cette optique sur des exemples complexes, ce chapitre est un des rares à discuter de solutions approchées et de vérifications numériques...

Les autres articles sont d'esprit algorithmique et abordent divers problèmes, pas particulièrement originaux, qu'un SCF devrait pouvoir traiter simplement : simplification de racines carrées ($\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$), d'expressions réelles/complexes (problèmes de détermination principale : $\mathrm{Log}(e^z) \neq z$, etc.), calcul efficace des polynômes de Chebyshev, calculs d'aires et de volumes à l'aide d'intégrales multiples (élimination des quantificateurs et décomposition cylindrique), test d'intégrabilité d'équations différentielles. S'y rajoutent finalement un court rappel historique sur l'ancestrale « Machine Analytique » de Charles Babbage et Ada Lovelace et un article sur l'utilisation d'un SCF pour l'enseignement des mathématiques (honnête mais trop général pour être vraiment convaincant : necéssité et difficulté d'une synthèse entre « méthodes traditionnelles » et « réforme », liens avec l'innovation technologique, pistes pour l'adaptation des systèmes existants). Un appendice indique en 14 pages les commandes essentielles des sept systèmes considérés, sous forme de dictionnaire de synonymes.

De façon surprenante, le tout est plaisant et plutôt homogène et devrait permettre à l'utilisateur relativement expérimenté de mieux comprendre son système de prédilection et d'en cerner les limites. Le tableau offert au novice désireux de s'équiper me semble trop touffu pour être vraiment utilisable.

Karim Belabas, Université d'Orsay