

MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

Les Supercordes

I. Antoniadis^{1,2}, E. Cremmer^{2,3} & K.S. Stelle^{2,4}

Rédacteur : B. Duplantier^{2,5}

Dessins : J. Tolmie⁶

Cet article inaugure la nouvelle rubrique Mathématiques et Physique de la Gazette des Mathématiciens. Il porte sur la théorie des cordes, un domaine de la physique théorique fascinant et parfois critiqué. Ce dernier est actuellement le thème du semestre de recherche « Supergravité, Supercordes et Théorie M », qui se tient au Centre Émile Borel de l'Institut Henri Poincaré. Ses organisateurs scientifiques ont bien voulu écrire ce long texte de présentation.

Il n'existe pas à l'heure actuelle de confirmation expérimentale des modèles exposés ci-dessous. Cependant, l'idée même de cordes quantiques en physique des particules est née au tout début des années 70, de l'observation expérimentale de trajectoires linéaires, dites « de Regge », dans le plan de coordonnées (carré de la masse, spin) pour un certain type de particules, appelées hadrons, comme le proton ou le neutron.

On verra dans cet article, dont la présentation suit un plan plutôt historique, comment fut long et tortueux, parfois fragile, le cheminement des idées. Le texte commence par une présentation exhaustive du « zoo » des particules connues et de leurs interactions, ainsi que du « modèle standard » qui les décrit. On verra aussi comment la théorie des cordes ambitionne, en unifiant toutes les interactions au niveau quantique, d'expliquer les modèles précédents. Certaines parties, comme celles portant sur les cordes « hétérotiques », les symétries miroirs, les « p-branes », ne sont pas simples à lire, et le jargon des physiciens y réapparaît bientôt. Qu'on nous pardonne en songeant que ces tourments mathématiques, s'ils ont pu faire leur percée en physique théorique, ont probablement une nécessité intrinsèque pour appréhender le monde mystérieux de la gravitation quantique. C'est ce qui explique aussi l'apparition récente de cette théorie fondamentale sous-jacente, la « théorie M », comme Mystérieuse,

¹ CERN Division Théorique CH-1211, Genève 23, Suisse

En détachement du Centre de Physique Théorique, École Polytechnique, F-91128 Palaiseau

² Centre Émile Borel, IHP, 11 rue Pierre et Marie Curie, F-75231 Paris, France

³ Laboratoire de Physique Théorique de l'ENS 24 rue Lhomond, F-75231 Paris, France

⁴ Department of Physics, Imperial College Prince Consort Road, London SW7 2BW

⁵ Service de Physique Théorique de Saclay 91191 Gif-sur-Yvette Cedex

⁶ jatolmie@ozemail.com.au

Mère ou des Membranes, dont toutes les théories de supercordes ne sont que différents aspects.

Cet article est divisé en deux parties, la première couvrant la genèse de la théorie des cordes et supercordes jusqu'en 1984, la seconde (à paraître dans le prochain numéro de la Gazette) les périodes appelées « première et deuxième révolutions », jusqu'aux derniers développements. Le lecteur mathématicien patient saura alors enfin pourquoi notre monde est sans doute à ... 11 dimensions.

— Bertrand Duplantier

Introduction

L'un des rêves constants de la physique théorique depuis Einstein a été la réconciliation de la mécanique quantique décrivant les phénomènes à très courtes distances (chimie quantique, physique atomique, physique nucléaire, physique des particules élémentaires) et de la relativité générale décrivant les phénomènes à très grandes distances (gravitation, cosmologie), ainsi que l'unification des forces fondamentales.

Il existe aujourd'hui un espoir sérieux de réaliser ce rêve dans le cadre de la théorie des supercordes, qui fait appel à trois nouveaux concepts. Tout d'abord, les particules élémentaires « nues » (en négligeant leurs auto-interactions) ne sont plus considérées comme particules ponctuelles (comme c'est le cas en théorie quantique des champs, cadre habituel de leurs description) mais comme des objets étendus de dimension 1 (cordes). Ensuite, on est amené à postuler l'existence de dimensions supplémentaires, du type espace, décrivant un espace compact très petit s'ajoutant à l'espace-temps habituel (3 dimensions du type espace et 1 dimension du type temps). Enfin, ces théories doivent admettre un nouveau type de symétrie, appelée supersymétrie, qui ne commute pas avec les transformations de Lorentz.

Nous décrivons dans cet article l'évolution de cette théorie en commençant par rappeler le modèle standard des particules élémentaires (forces et particules fondamentales). Puis nous rappellerons comment est né le modèle des cordes à partir des modèles duaux introduits pour décrire les interactions « fortes » des particules dites « hadroniques » (telles le proton ou le pion). Un premier modèle, celui de la corde dite bosonique, est associé à la corde relativiste quantique simple ; il n'est cohérent qu'en dimension 26 et contient une particule de masse carrée négative (tachyon). Il a été montré que les seuls modèles complètement cohérents sans tachyons n'existent qu'en dimension d'espace-temps égale à 10 et qu'ils ne peuvent servir à décrire les interactions « hadroniques » mais plutôt les interactions des particules plus fondamentales telles que les quarks et les leptons (électron, neutrino) ainsi que la gravitation, ce sont les modèles de supercordes. Une première révolution des supercordes eut lieu quand une nouvelle condition de cohérence réduisit le nombre, a priori infini, de théories possibles à seulement cinq. Une deuxième révolution eut lieu quand on découvrit que ces cinq théories étaient toutes reliées entre elles et à une autre théorie : la supergravité à 11 dimensions, d'où la conjecture de l'existence d'une théorie mère, appelée Théorie M, qui aurait ces six théories pour différentes limites.

Le modèle standard

Rappelons qu'outre la gravitation, il existe trois interactions fondamentales entre les particules élémentaires : l'interaction électromagnétique responsable de la cohésion des atomes et de leurs électrons, l'interaction faible responsable de la radioactivité dite β et l'interaction forte responsable de la cohésion des noyaux.

L'électrodynamique quantique

L'électrodynamique quantique décrit les interactions des leptons chargés (particules insensibles aux interactions fortes, par exemple l'électron) et du champ électromagnétique. Rappelons que l'électrodynamique est le premier exemple d'unification des interactions (électriques et magnétiques) ; celle-ci se fait naturellement dans le cadre de la relativité spéciale sous la forme invariante de Lorentz des équations de Maxwell du champ électromagnétique $A_\mu(x)$ (μ est un indice de Lorentz prenant les valeurs 0, 1, 2 et 3 et un point d'espace-temps de Minkowski s'écrit $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ avec signature $(+, -, -, -)$) :

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}(x) = j_\nu(x),$$

où $j_\nu(x)$ est le courant électromagnétique et $F_{\mu\nu}(x)$ le tenseur électromagnétique défini par

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x).$$

Les équations de Maxwell dérivent d'un lagrangien qui s'écrit en l'absence d'autres champs

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x).$$

Il est invariant par la transformation

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x),$$

où $\lambda(x)$ est une fonction arbitraire de x .

En présence de champs de matière cette invariance est associée à une invariance locale sous le groupe U(1) lié à la conservation de la charge électrique. Les fonctions d'onde (ou champs) de ces particules se transforment par une phase, non plus constante mais dépendant du point d'espace-temps x , par exemple

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\lambda(x)}\Psi(x).$$

Quand la théorie est quantifiée, le champ électromagnétique se manifeste sous la forme d'une particule de masse nulle et de spin (moment angulaire intrinsèque) égal à 1, le photon. Les champs de matière sont associés aux particules chargées. Rappelons que l'électrodynamique quantique est le premier exemple de théorie quantique des champs renormalisable à être testée expérimentalement et avec une très grande précision. (Schématiquement, une théorie est dite renormalisable lorsque les infinités apparaissant dans le calcul de la théorie des perturbations peuvent être absorbées dans une redéfinition des constantes physiques apparaissant dans le lagrangien, ou dans la normalisation des fonctions d'onde.)

Le modèle unifié électrofaible

Le modèle électrofaible décrit les interactions électromagnétiques et faibles des leptons. Les leptons (insensibles aux interactions fortes) sont des particules dites fermioniques, de spin $\frac{1}{2}$ (la fonction d'onde de fermions identiques est antisymétrique dans l'échange de ceux-ci). Ils sont groupés en trois familles composées d'un lepton massif $l = e, \mu, \tau$ et d'un neutrino associé de masse nulle, ν_l , et ne différant que par les masses de leurs leptons l :

$$(e, \nu_e), (\mu, \nu_\mu), (\tau, \nu_\tau).$$

Il est bon de signaler ici que les bosons de masse nulle ont en général deux états de polarisation (comme le photon), tandis que les fermions de masse nulle (comme le neutrino) n'en ont qu'un, appelé aussi chiralité. Par contre, les fermions massifs ont les deux chiralités (droite et gauche).

Les interactions faibles ont une très petite constante de couplage et sont de courte portée, indiquant que les quantas de radiation associés sont de masse non nulle. Ce sont des bosons massifs de spin 1. Les particules sont dites bosoniques lorsque la fonction d'onde de telles particules identiques est symétrique dans l'échange de deux d'entre elles. On peut montrer dans le cadre de la théorie des champs que les bosons ont des spins entiers et les fermions des spins demi-entiers. Ces particules W^+, W^-, Z^0 provoquent des transitions entre particules d'une même famille mais pas d'une famille à l'autre. Ces transitions peuvent se représenter par des matrices 2×2 et suggèrent d'étendre la théorie de jauge électromagnétique basée sur le groupe $U(1)$ à une théorie basée sur le groupe $SU(2)$. En fait, une telle théorie existe et avait été introduite par Yang et Mills en 1954. Le lagrangien de Yang-Mills pour un groupe G arbitraire s'écrit simplement :

$$L = -\frac{1}{4}Tr(\mathbf{F}_{\mu\nu})^2,$$

où

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu + ig[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu],$$

g étant la constante de couplage et \mathbf{A}_μ une matrice dans la représentation fondamentale du groupe G .

Il fut montré par 't Hooft que ces théories sont renormalisables en l'absence de termes de masse pour les particules représentées par les champs \mathbf{A}_μ . Ceci n'est plus vrai si cette masse est introduite « à la main » dans le lagrangien. Cependant, cette masse peut être engendrée si l'on postule l'existence d'un autre champ associé à une particule scalaire (de spin 0), appelée particule de Higgs et non encore observée expérimentalement (des résultats préliminaires obtenus cet automne 2000 à l'accélérateur LEP du CERN pourraient être un premier signe de cette découverte). Higgs, Brout et Englert ont proposé un mécanisme de brisure de symétrie où cette nouvelle particule se meut dans un potentiel invariant par le groupe de symétrie, mais dont le minimum (état fondamental) n'est pas symétrique. Quand la symétrie est rendue locale, le champ de Higgs est couplé aux champs de jauge. Il s'ensuit qu'au voisinage de l'état fondamental certains bosons de jauge acquièrent une masse. Ceux qui sont associés à la symétrie préservant l'état fondamental restent de masse nulle.

't Hooft a montré en 1971 que dans ces conditions la théorie était encore renormalisable (l'ensemble de ces travaux lui valurent le prix Nobel de physique en 1999). Cela fut appliqué avec succès au modèle de Weinberg-Salam basé sur le groupe de jauge $G = \text{SU}(2) \times \text{U}(1)$, brisé spontanément par le champ de Higgs en $\text{U}(1)$. Des quatre bosons de jauge initiaux de masses nulles W^+ , W^- , Z^0 , γ' , seule une combinaison de γ' et Z^0 demeure de masse nulle et s'identifie au photon γ . Le groupe non brisé restant est le groupe de jauge des interactions électromagnétiques. Le paramètre de mélange entre Z^0 et γ' est appelé angle de Weinberg.

Les test expérimentaux de cette théorie sont actuellement tous concluants. Bien que leur précision soient loin de celle des tests de l'électrodynamique quantique, elle est cependant suffisante pour exclure l'existence d'une quatrième famille de leptons de même type (qui contribueraient aux corrections perturbatives des processus mesurés), le nombre 3 de familles n'ayant pas reçu d'explication théorique jusqu'à ce jour.

Les interactions fortes

Plusieurs centaines de particules hadroniques différentes ont été produites dans les accélérateurs de particules. La plupart d'entre elles sont très instables et ont une durée de vie très courte, elles se manifestent sous forme de résonances dans les sections efficaces de diffusion et sont caractérisées par leur masse M et leur largeur Γ (inverse de la durée de vie). Les caractéristiques de ces particules sont expliquées par le modèle des quarks. Tous les hadrons sont composés de particules appelées quarks. Il existe six types de quarks **u**, **d**, **s**, **c**, **b**, **t**, chacun existant dans trois états (appelés couleurs), ainsi que leurs antiparticules. Les hadrons sont de deux types : les baryons (comme le proton) formés de 3 quarks et de spin demi-entier, et les mésons formés d'un quark et d'un antiquark, et de spin entier. Les quarks eux-mêmes sont des particules fermioniques de spin $\frac{1}{2}$, ont des charges électriques non entières ($\pm\frac{1}{3}$ ou $\pm\frac{2}{3}$) et sont dans la représentation $3(\bar{3})$ du groupe de couleur $\text{SU}(3)$. Tous les hadrons sont dans la représentation de dimension 1 de $\text{SU}(3)$ (on dit qu'ils sont neutres de couleur). Comme les leptons, les quarks se regroupent en trois familles qui ne diffèrent que par leur masse, notées :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{d}), (\mathbf{s}, \mathbf{c}), (\mathbf{b}, \mathbf{t}).$$

Le modèles des quarks permet d'expliquer les nombres quantiques additifs de tous les hadrons. Il existe une autre propriété expérimentale du spectre des hadrons. Les hadrons de mêmes nombres quantiques (autres que le spin) ont une masse carrée M^2 fonction linéaire de leur spin J :

$$\alpha(M^2) \equiv \alpha' M^2 + \alpha_0 = J.$$

Cette droite du plan (M^2, J) est appelée trajectoire de Regge, α' étant la pente et α_0 l'intercept (α' est approximativement la même pour toutes les trajectoires). Tenter d'expliquer cette relation est à *la source même de l'introduction de l'idée de corde quantique*, comme nous le verrons plus loin.

Si le modèle des quarks permet d'expliquer assez bien les propriétés statiques des hadrons, il n'en est pas de même des propriétés dynamiques. Les interactions fortes sont de courte portée et suggèrent l'existence de quantas de

radiation massifs échangés dans les réactions hadroniques. Il n'a pas été possible d'identifier de tels quantas, ou plutôt chaque hadron peut jouer ce rôle suivant les réactions, en particulier les hadrons instables à courte durée de vie qui peuvent aussi apparaître comme résonances. Comme en outre les constantes de couplages en jeu dans ces réactions hadroniques sont de l'ordre de 1, toute description dans le cadre des perturbations d'une théorie quantique des champs sembla impossible. On s'orienta vers des descriptions plus phénoménologiques (reproduisant en partie les résultats expérimentaux) qui conduisirent en particulier aux modèles duaux que nous verrons plus loin.

Le succès des théories de jauge dans la théorie électrofaible conduisit à essayer d'appliquer ce concept aux interactions fortes, non plus au niveau des hadrons eux-mêmes mais à celui des quarks. Le groupe de jauge choisi est celui de couleurs $SU(3)$, les quantas sont huit particules vectorielles (de spin 1) appelées « gluons », dans la représentation adjointe de $SU(3)$. Les hadrons étant neutres de couleur, comme en particulier l'état fondamental de la théorie, ce groupe ne sera pas spontanément brisé et les gluons resteront de masse nulle. Seuls les états neutres de couleur existent dans la nature, tous les autres états restant confinés. En particulier, les quarks constituant des hadrons ne sont pas séparables les uns des autres. Ceci est la conséquence d'une propriété conjecturée, mais non encore démontrée, appelée « esclavage infrarouge » (c'est-à-dire à grande distance). Cette théorie de jauge a une autre propriété importante, la « liberté asymptotique » : la constante de couplage (ou force de l'interaction), dont la variation en fonction de l'énergie des particules est contrôlée par les équations du groupe de renormalisation, tend vers zéro quand l'énergie tend vers l'infini (ou quand la distance entre particules tend vers zéro). Cette propriété permet de calculer perturbativement certains processus à haute énergie (ou de les relier entre eux), tandis qu'on ne sait pas calculer les masses des hadrons.

Les quarks sont également soumis aux interactions faibles et électromagnétique, les paires de quarks de chaque famille forment un doublet du groupe $SU(2)$ des interactions faibles. Il est bon de signaler ici que le modèle électrofaible purement leptonique n'est pas complètement cohérent. Il possède des anomalies chirales. Cela signifie que les identités (dites de Ward), conséquences de la conservation partielle des courants pseudovectoriels (axiaux) de la théorie, ne sont plus satisfaites au niveau quantique. En revanche, lorsque l'on inclut les quarks les anomalies disparaissent. Cette annulation qui dépend du nombre de fermions de chiralité donnée et de leurs charges se fait famille par famille. Cela suggéra la possibilité d'unifier les trois interactions de jauge en une théorie de jauge basée sur un groupe G se brisant spontanément en $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Le groupe G le plus simple est $SU(5)$. Ces modèles prédisent la désintégration du proton, unifient quarks et leptons, et prédisent l'unification des constantes de couplages à haute énergie. Malheureusement, ils ont besoin d'un très grand nombre de paramètres pour induire la brisure spontanée de symétrie, ce qui a limité leur intérêt comme théorie fondamentale, d'autant qu'ils n'incorporent pas les interactions gravitationnelles.

La gravitation

La théorie de la gravitation est basée sur le lagrangien d'Einstein. Au niveau

classique, non quantique, elle est très bien vérifiée expérimentalement. Si l'on quantifie la théorie, on trouve que le quanta de radiation doit être une particule de spin 2 de masse nulle, représentée par un champ symétrique à deux indices $h_{\mu,\nu} = h_{\nu,\mu}$. Les interactions gravitationnelles peuvent être décrites perturbativement dans la constante de couplage κ proportionnelle à la racine carrée de la constante de Newton G_N . Cette constante κ , contrairement au cas des théories de Yang-Mills dans un espace temps à 4 dimensions, n'est pas sans dimension ; elle serait sans dimension seulement dans un espace-temps à deux dimensions (2 est la dimension critique de la gravité quantique). Il s'ensuit que les corrections perturbatives quantiques ne pourront jamais avoir la même structure que l'ordre le plus bas, et que donc les infinités éventuelles ne sauraient être réabsorbées, en particulier par redéfinition de κ . On ne pourra définir une théorie quantique de la gravitation que si celle-ci n'engendre pas de divergences. Ceci ne semble pas pouvoir être réalisé dans le cadre des théories quantiques des champs renormalisables.

Des modèles duaux aux supercordes

Modèles duaux

L'approche phénoménologique

La théorie des (super)cordes relativistes a pour origine les modèles duaux. À la fin des années 60, l'un des buts des physiciens des particules était de décrire les interactions fortes entre hadrons aussi bien à basse énergie qu'à haute énergie. Rappelons que les interactions sont décrites par une amplitude complexe dont le module carré est relié de façon simple à la section efficace de diffusion accessible expérimentalement. Dans le cas de la diffusion de deux particules scalaires (entrantes) A et B , de quadri-impulsions $p_{1\mu}$ et $p_{2\mu}$ et de masse m , donnant deux particules scalaires (sortantes) C et D de quadri-impulsions $p_{3\mu}$ et $p_{4\mu}$ et de masse m (voir figure 1) :

$$(p_i)^2 = (p_{i0})^2 - (\vec{p}_i)^2 = m^2, \quad i = 1, \dots, 4,$$

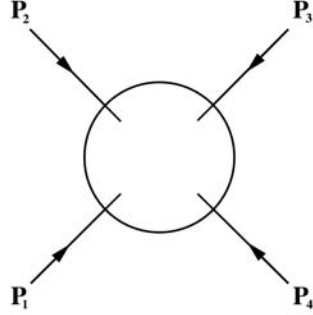
$$A(p_1) + B(p_2) \rightarrow C(p_3) + D(p_4) .$$

L'amplitude est fonction des deux invariants de Lorentz indépendants s et t :

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_2 + p_3)^2, \quad u = (p_2 + p_4)^2 ,$$

avec $s + t + u = 4m^2$ et $p_{1\mu} + p_{2\mu} + p_{3\mu} + p_{4\mu} = 0$ (Les domaines physiques de ces variables sont $s \geq 4m^2$, $t, u \leq 0$, $p_{i0} \geq m$ pour les particules entrantes et $p_{i0} \leq -m$ pour les particules sortantes).

À basse énergie, la physique des hadrons est dominée par une série de résonances dont les carrés des masses sont une fonction linéaire de leur spin J (les trajectoires de Regge vues plus haut) : $\alpha(m_J^2) = \alpha' m_J^2 + \alpha_0 = J$. À haute énergie, la physique hadronique est dominée par l'échange de particules dans la voie t et des comportements dits à la Regge. Pour s grand, à t fixé, l'amplitude de diffusion se comporte comme $s^{\alpha(t)}$, où $\alpha(t)$ est la trajectoire de Regge associée aux particules échangées. Cette amplitude admet alors deux représentations duales, soit comme la somme d'une infinité de résonances (pôles en s

FIG. 1. Diffusion 2 particules \rightarrow 2 particules.

dans le plan complexe), soit comme l'échange d'une infinité de particules (pôles en t dans le plan complexe). Dans l'approximation de largeur Γ nulle pour les résonances (pour laquelle les pôles en s et t sont sur l'axe réel), G. Veneziano proposa en 1968 une formule mathématique simple pour les amplitudes à 4 particules, qui reproduisait précisément ces propriétés en termes des fonctions d'Euler :

$$V(s, t, u) = A(s, t) + A(t, u) + A(s, u)$$

$$A(s, t) = g^2 \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s) - \alpha(t))} = g^2 \int_0^1 dx x^{-\alpha(s)-1} (1-x)^{-\alpha(t)-1},$$

avec $\alpha(s) = \alpha' s + \alpha^0$. Cette forme intégrale permet de développer l'amplitude en série de pôles en s ou en série de pôles en t (il n'y a pas de pôles simultanés en s et t).

$$A(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n(t)}{\alpha(s) - n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n(s)}{\alpha(t) - n},$$

où $R_n(x)$ est un polynôme de degré n en x qui peut se développer sur une base de polynômes orthogonaux $P^J(x)$ caractérisant une particule de spin J :

$$R_n(x) = \sum_{J=0}^n g_{n,J}^2 P^J(x),$$

où $g_{n,J}$ est la constante de couplage des deux particules initiales (ou finales) et de la particule $E_{n,J}$ échangée, de spin J et de masse définie par $\alpha(m^2) = n$. La quantité $g_{n,J}^2$ peut être négative, ce qui correspond à des résonances non physiques (appelées fantômes) ; leur nécessaire absence implique $\alpha_0 \leq 1$. L'identité des deux développements en séries de pôles sur s ou t exprime la propriété de dualité planaire de $A(s, t)$ (voir figure 2). $A(s, t)$ est invariant par permutation cyclique et anticyclique des p_i ; $A(t, u)$ et $A(s, u)$ s'obtiennent à partir de $A(s, t)$ par les autres permutations.

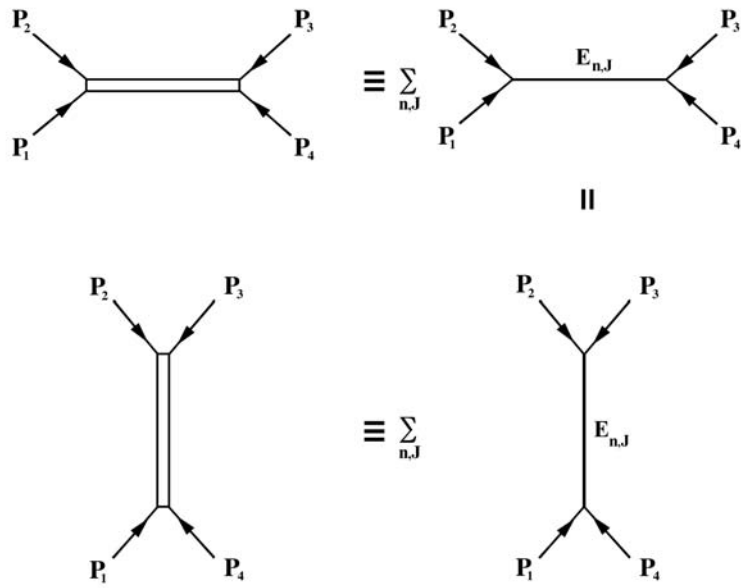


FIG. 2. Diagrammes duaux : les doubles lignes représentent une somme infinie de résonances de masse $E_{n,J}$.

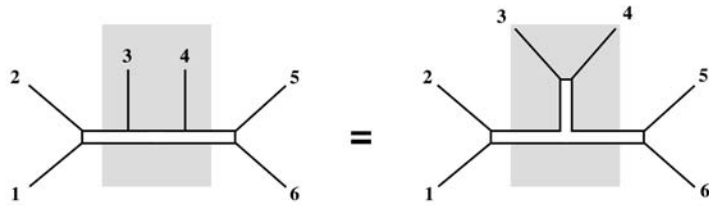


FIG. 3. Exemple de dualité d'une amplitude à 6 particules.

Très vite, la formule donnant l'amplitude $A(s, t)$ sous forme intégrale fut généralisée pour décrire des amplitudes à N particules. À chaque décomposition en somme de pôles dans les différentes variables on peut associer un diagramme en arbre, où les lignes externes représentent les particules entrantes et sortantes et les lignes internes une série de pôles. La dualité de l'amplitude à 4 particules se généralise au cas de N particules : dans un diagramme en arbre, chaque sous-diagramme à 4 lignes « externes » peut être dualisé (échange des voies s

et t dans ce sous-diagramme), le diagramme complet continuant à représenter la même amplitude à N particules (voir figure 3). En particulier, l'amplitude est invariante par permutation cyclique des N particules externes. Ceci suggère une représentation plus appropriée de ces amplitudes, non pas comme plusieurs diagrammes en arbres équivalents par dualité, mais comme une surface à 2 dimensions avec un bord, les N particules externes étant associées à N points sur le bord. Ces N points peuvent encore être remplacés par des rubans de longueur infinie, tous les diagrammes en arbre équivalents pour représenter l'amplitude correspondant alors à toutes les déformations planaires filiformes de cette surface, avec ses N « rubans » infinis externes (voir figure 4).

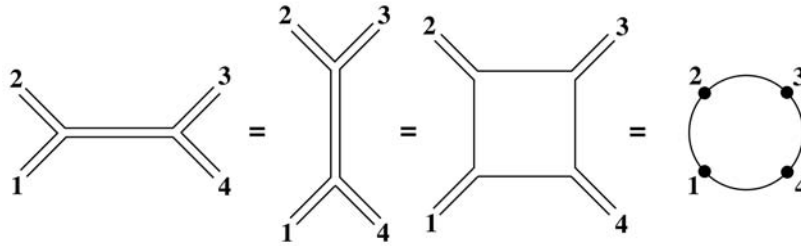


FIG. 4. Représentation des diagrammes duaux par une surface avec bord.

Au prix de certaines modifications, qui tinrent compte en particulier de largeur non nulle des résonances, ces formules et leurs généralisations obtinrent un certain succès phénoménologique dans la description de la diffusion des hadrons.

L'approche conceptuelle

Toutefois, la curiosité aidant, les formules générales des amplitudes à N particules furent étudiées plus en détail. En particulier, la forme intégrale de l'amplitude mettant en évidence les pôles de la configuration, dite « multipériphérique », de N particules d'impulsions p_i , $i = 1, \dots, N$ (voir figure 5) put être réécrite par Fubini et Veneziano sous une nouvelle forme. L'amplitude est un élément de matrice d'un produit d'opérateurs de vertex $V(p_i)$ (appelés aussi vertex d'émission ou d'absorption de la particule d'impulsion p_i) et de propagateurs $P(p_1 + \dots + p_i)$ (qui ont des pôles aux valeurs entières de $(p_1 + \dots + p_i)^2$)

$$A_N = g^{N-2} \langle 0, p_1 | V(p_2) P(p_1 + p_2) V(p_3) \dots P(p_1 + \dots + p_{N-2}) V(p_{N-1}) | 0, p_N \rangle,$$

pris entre deux états fondamentaux $|0, p\rangle$ à une particule, d'impulsions p_1 et p_N . Ultérieurement, ces deux états seront vus comme états de vibration minimale de la corde.

Les opérateurs $V(p)$ et $P(p)$ peuvent être écrits à l'aide d'une infinité d'oscillateurs harmoniques quantiques, vecteurs de Lorentz d'un espace-temps à D dimensions, notés $1, 2, \dots, n, \dots$, et de « quanta d'énergie » respectifs $1, 2, \dots, n, \dots$. À chaque oscillateur harmonique quantique n sont associés les



FIG. 5. Diagramme dual d'une configuration multipériphérique.

opérateurs d'annihilation et de création $\mathbf{a}_\mu^n, \mathbf{a}_\mu^{\dagger n}$ ($\mu = 0, 1, \dots, D - 1$), définis par les relations de commutation

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}_\mu^n, \mathbf{a}_\nu^{\dagger m}] &= -\eta_{\mu\nu} \delta_{nm} \\ [\mathbf{a}_\mu^n, \mathbf{a}_\nu^m] &= 0 \\ [\mathbf{a}_\mu^{\dagger n}, \mathbf{a}_\nu^{\dagger m}] &= 0, \end{aligned}$$

avec $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, \dots, -1)$.

Ces opérateurs agissent dans un espace (appelé espace de Fock), engendré par l'algèbre des polynômes des opérateurs $\mathbf{a}_\nu^{\dagger m}$ agissant sur un état $|0, p\rangle$ appelé « vide », et défini par $\mathbf{a}_\mu^n |0, p\rangle = 0$ (pour tout n et μ). Ces opérateurs permettent de calculer le spectre complet des états physiques de ce modèle : masse, « spin », correspondant ici aux représentations du groupe $O(D - 1)$ pour les particules massives et du groupe $O(D - 2)$ pour les particules de masse nulle, et enfin multiplicité. En particulier, l'opérateur donnant la masse carrée des états s'écrit :

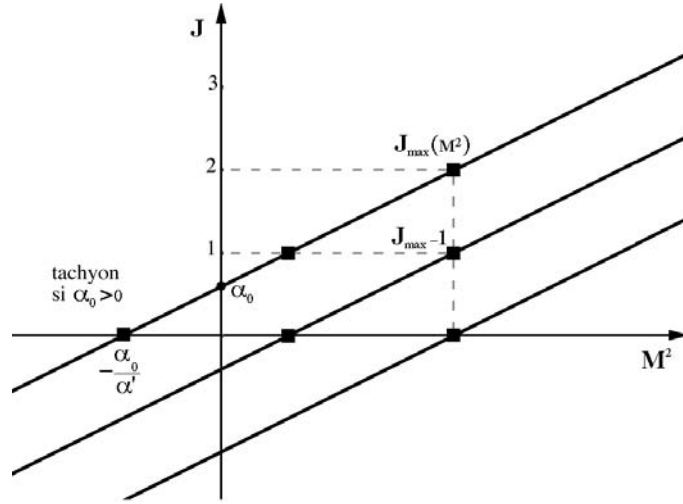
$$\mathbf{M}^2 = -(\alpha_0 - \mathbf{H})/\alpha',$$

avec

$$\mathbf{H} = -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu, \nu} n \mathbf{a}_\mu^{\dagger n} \mathbf{a}_\nu^n \eta^{\mu\nu}.$$

α_0 et α' sont les paramètres de la trajectoire de Regge « dominante » $\alpha(M^2) = J_{max}$, où J_{max} est le moment cinétique maximal pour une valeur donnée de M^2 , et se trouve aussi être une valeur propre de \mathbf{H} . Dans ce modèle, à chaque valeur de la masse correspondent des particules de spin $J_{max}, J_{max} - 1, \dots, 0$; (voir figure 6).

Chaque particule est représentée par un sous-espace de dimension finie de l'espace de Fock (dimension $2J + 1$ pour une particule massive de spin J , dimension 2 pour une particule de masse nulle dans un espace-temps de dimension 4). L'espace de Fock est plus grand que l'espace engendré par les états physiques; en raison de la signature de l'espace-temps, l'espace de Fock contient des états de norme négative ou « fantômes » (par exemple $\mathbf{a}_0^{\dagger 1} |0, p\rangle$). Pour rendre possible une interprétation physique de ces modèles, de tels éléments doivent être absents du spectre. Une condition nécessaire et suffisante est que l'intercept α_0 soit égal à 1 et la dimension d'espace-temps soit inférieure ou égale à 26. Virasoro a montré que le sous-espace des états physiques $|Ph\rangle$ est

FIG. 6. Trajectoires de Regge pour $0 < \alpha_0 < 1$

alors caractérisé par la condition dite de « couche de masse » $(\mathbf{L}_0 - 1)|Ph\rangle = 0$, où $\mathbf{L}_0 = -\alpha' p^2 + \mathbf{H}$, et par une infinité de conditions $\mathbf{L}_n|Ph\rangle = 0$ pour $n > 0$. L'infinité d'opérateurs \mathbf{L}_n (définis pour tout n entier relatif) agissent dans l'espace de Fock et satisfont les règles de commutation

$$[\mathbf{L}_n, \mathbf{L}_m] = (n - m)\mathbf{L}_{n+m} + \frac{D}{12}n(n^2 - 1)\delta_{n+m,0}.$$

C'est la fameuse algèbre de Virasoro.

Pour $\alpha_0 = 1$, le spectre contient en particulier une particule scalaire tachyonique (c'est-à-dire de masse carrée négative), décrite par $|0, p\rangle$ avec $p^2 = -1$, et une particule de masse nulle, décrite par $\sum_{\mu} \varepsilon^{\mu} \mathbf{a}_{\mu}^{\dagger 1} |0, p\rangle$, où ε_{μ} est un vecteur de polarisation, et où $p^2 = 0$. La condition $\mathbf{L}_1|Ph\rangle = 0$ sur cet état implique $\sum_{\mu} \varepsilon^{\mu} p_{\mu} = 0$, ce qui montre que cette particule est de spin 1 et de masse nulle (comme le photon). La condition de Virasoro $\mathbf{L}_1|Ph\rangle = 0$ a éliminé la particule scalaire (de spin 0) de masse nulle, qui aurait été de norme négative. L'existence d'une particule de spin 1 et de masse nulle éloigne cependant ce modèle de la physique hadronique, où une telle particule n'existe pas.

Il est possible d'introduire de nouveaux nombres quantiques associés aux groupes non abéliens $SO(N)$, $U(N)$ et $SP(2N)$, en multipliant les amplitudes par des facteurs appropriés dépendant du groupe (appelés facteurs de Chan-Paton). Dans le cadre des anciens modèles hadroniques de mésons (maintenant non cohérents), on les interprétait comme des nombres quantiques associés à des quarks (antiquarks) se propageant sur les bords du ruban et de la surface.

Le modèle de Shapiro-Virasoro

Un nouveau modèle fut introduit par Virasoro pour l'amplitude à 4 particules, et généralisé pour l'amplitude à N particules par Shapiro. Ce modèle a davantage de propriétés de dualité que le modèle de Veneziano, en ce sens que

tous les diagrammes en arbre à N particules y sont équivalents par permutation des particules, et il n'y a plus à distinguer les diagrammes planaires des non planaires. Ces nouvelles propriétés de dualité suggèrent une représentation diagrammatique appropriée des amplitudes, non plus comme un ensemble de diagrammes de rubans en arbres (équivalents par dualité), mais par une surface *fermée*, les particules étant représentées par des points sur la surface, ou de manière équivalente par des *tubes* infinis partant de cette surface (voir figure 7).

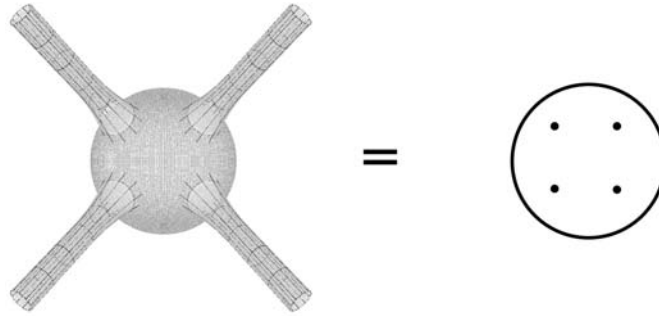


FIG. 7. Diagrammes duaux pour le modèle de Shapiro-Virasoro.

Pour étudier le spectre de ce modèle, il est alors nécessaire d'introduire une double infinité d'oscillateurs harmoniques quantiques du type précédent associés aux opérateurs de création et d'annihilation $\mathbf{a}_\mu^n, \mathbf{a}_\mu^{\dagger n}, \tilde{\mathbf{a}}_\mu^n, \tilde{\mathbf{a}}_\mu^{\dagger n}$. Le spectre est décrit en particulier par l'opérateur de masse

$$\mathbf{M}^2 = -(2\alpha_0 - \mathbf{H} - \tilde{\mathbf{H}})/(\alpha'/2).$$

La pente et l'intercept de ce modèle sont respectivement $\alpha'/2$ et $2\alpha_0$. Les états sur couche de masse (états propres de l'opérateur de masse) sont également états propres de \mathbf{H} et $\tilde{\mathbf{H}}$, avec même valeur propre $\mathbf{H}|Ph\rangle = \tilde{\mathbf{H}}|Ph\rangle$.

Les états de normes négatives sont absents du spectre si l'intercept est égal à 2 et la dimension d'espace-temps inférieure ou égale à 26. Le sous-espace physique de l'espace de Fock est déterminé, outre les conditions de couche de masse $(\mathbf{L}_0 - 1)|Ph\rangle = (\tilde{\mathbf{L}}_0 - 1)|Ph\rangle = 0$, par une infinité de conditions $\mathbf{L}_n|Ph\rangle = \tilde{\mathbf{L}}_n|Ph\rangle = 0$ pour $n > 0$. Les opérateurs \mathbf{L}_n et $\tilde{\mathbf{L}}_n$ sont définis comme dans le modèle de Veneziano. Comme précédemment, cela implique l'existence d'une particule de spin 2 et de masse nulle (représentée par un tenseur symétrique $g_{\mu\nu}$), d'une particule scalaire de masse nulle et d'une autre représentée par un tenseur antisymétrique $a_{\mu\nu}$, et enfin d'un tachyon. Comme dans le cas du modèle de Veneziano pour la particule vectorielle de masse nulle, les conditions de jauge $\mathbf{L}_1|Ph\rangle = \tilde{\mathbf{L}}_1|Ph\rangle = 0$ impliquent que $g_{\mu\nu}$ et $a_{\mu\nu}$ sont des champs de jauge. Ils correspondent respectivement au graviton et à l'existence possible d'« axions » non encore observés et pouvant jouer un rôle cosmologique.

Théorie des perturbations

Il est possible de définir une théorie de perturbation en g (constante de couplage), dont le premier ordre va correspondre aux amplitudes en arbres

définies précédemment. À un ordre de perturbations donné, on peut associer les amplitudes à des surfaces de Riemann à bords planaires ou non planaires, orientables ou non orientables pour le modèle de Veneziano, et à des surfaces fermées orientables ou non orientables, avec anses, pour le modèle de Virasoro. La classification des diagrammes est alors beaucoup plus simple qu'en théorie des champs et correspond à la classification des surfaces à 2 dimensions, le genre de la surface étant l'ordre du développement de perturbation. Les amplitudes correspondantes s'écriront en termes de fonctions définies sur ces surfaces, en particulier d'intégrales abéliennes (voir figure 8). Le processus n'est complètement cohérent qu'en dimension exactement égale à 26, où les contraintes d'unitarité sont satisfaites perturbativement. Dans le modèle de Veneziano, et dès le deuxième ordre de perturbation (diagrammes à une boucle), apparaît alors dans les amplitudes une série de pôles qui peuvent être associés à des nouvelles particules, décrites par le modèle de Virasoro (avec pente moitié). Ceci avait été conjecturé par Lovelace en 1971 et prouvé par Cremmer et Scherk, Clavelli et Shapiro en 1972. Ceci correspond à une transition ruban \rightarrow tube \rightarrow ruban (voir figure 9) et montre que les états physiques du modèle de Veneziano (rubans) ne sont pas suffisants pour avoir une théorie complète et qu'on doit y ajouter les états physiques du modèle de Virasoro (tubes). Dans le modèle de Shapiro-Virasoro, les interactions n'engendrent pas de nouveaux pôles dans les amplitudes, ni de nouveaux états.

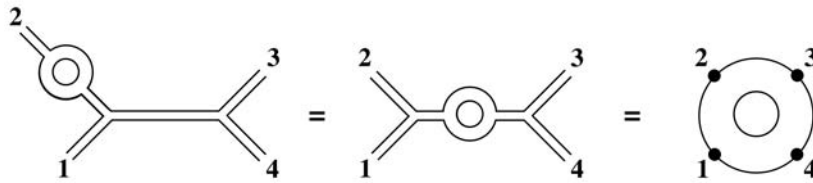


FIG. 8. Diagrammes duaux d'ordre supérieur : 1 boucle.

Modèles fermioniques

Tous ces développements furent généralisés par Ramond, Neveu et Schwarz pour un modèle contenant un type de trajectoire fermionique et deux types de trajectoires bosoniques, toutes parallèles. Ce modèle n'a pas de fantômes pourvu que les intercepts soient $1/2$ pour les fermions, $1/2$ et 1 pour les bosons, et la dimension d'espace-temps inférieure ou égale à 10. Comme précédemment, la cohérence complète n'a lieu qu'en 10 dimensions. Pour décrire le spectre de ce modèle il est nécessaire d'introduire trois infinités d'oscillateurs harmoniques quantiques, un type bosonique et deux types fermioniques. Ils sont associés à trois types d'opérateurs de création et d'annihilation \mathbf{a}_μ^n , \mathbf{b}_r^μ , \mathbf{d}_n^μ et leurs hermitiens conjugués, où n est entier positif et r un demi-entier positif. Les opérateurs \mathbf{a} satisfont à des relations de commutation, les opérateurs \mathbf{b} et \mathbf{d} satisfaisant à des relations d'anticommutation. Ils permettent en particulier de construire des opérateurs généralisant les \mathbf{L}_n du modèle de Veneziano. Des

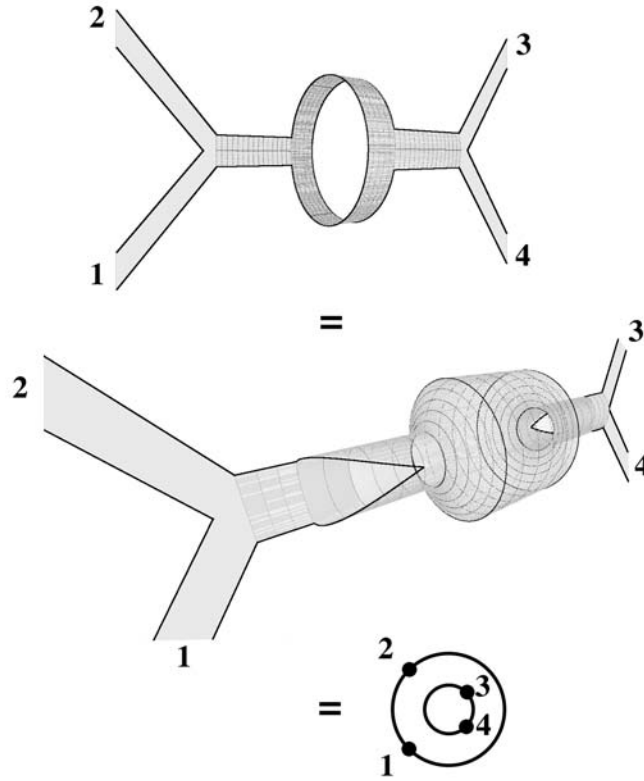


FIG. 9. Diagrammes duaux à 1 boucle représentant la transition ruban \rightarrow tube \rightarrow ruban.

opérateurs \mathbf{L}_n^F et \mathbf{F}_n s'expriment en fonction des \mathbf{a}_μ^n et \mathbf{d}_n^μ . Ils agissent dans le sous-espace des états fermioniques et satisfont une algèbre graduée généralisant celle de Virasoro, et contenant à la fois des commutateurs et anticommutateurs (n, m entiers) :

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}_n^F, \mathbf{L}_m^F] &= (n - m)\mathbf{L}_{n+m}^F + \frac{D}{8}n(n^2 - 1)\delta_{n+m,0} \\ [\mathbf{L}_m^F, \mathbf{F}_n] &= \left(\frac{m}{2} - n\right)\mathbf{F}_{m+n} \\ [\mathbf{F}_m, \mathbf{F}_n]_+ &= 2\mathbf{L}_{m+n}^F + \frac{D}{2}\left(m^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{m+n,0} . \end{aligned}$$

De même, des opérateurs \mathbf{L}_n^B et \mathbf{G}_r s'expriment en fonction des \mathbf{a}_μ^n et \mathbf{b}_r^μ . Ils agissent dans le sous-espace des états bosoniques et satisfont une algèbre graduée similaire. Les sous-espaces physiques (sans états de norme négative) sont maintenant définis par les conditions :

- secteur bosonique : $\mathbf{L}_n^B|\text{Phys}B\rangle = \mathbf{G}_r|\text{Phys}B\rangle = 0$ pour $n, r > 0$,
- secteur fermionique : $\mathbf{L}_n^F|\text{Phys}F\rangle = \mathbf{F}_n|\text{Phys}F\rangle = 0$ pour $n > 0$.

De même, on peut définir un modèle fermionique de tubes du type Shapiro-Virasoro en doublant le nombre d'oscillateurs harmoniques quantiques.

Théorie des cordes relativistes quantiques

Cordes relativistes classiques

Dès 1969, Nambu, Nielsen, et Susskind suggérèrent que les modèles que nous venons de décrire étaient liés aux cordes relativistes. Ce fut en 1973 que Goddard, Goldstone, Rebbi et Thorn montrèrent que le spectre physique d'une corde relativiste quantique était identique à celui des modèles duaux, en partant de l'action de Nambu-Goto. Celle-ci n'est autre que l'aire de la surface engendrée par le déplacement de la corde dans un espace-temps à D dimensions. Un point de la corde est repéré par ses coordonnées $X_\mu(\sigma, \tau)$, σ caractérise la position (« abscisse ») du point sur la corde et peut être choisi variant entre 0 et π , tandis que τ caractérise l'évolution temporelle de la corde sur cette surface. L'action de Nambu-Goto s'écrit alors $S = -(2\pi\alpha')^{-1}\mathcal{A}$, où l'aire \mathcal{A} s'écrit

$$\mathcal{A} = \int_0^\pi d\sigma \int d\tau \left[\left(\sum_{\mu=1}^D \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau} \right)^2 - \left(\sum_{\mu=1}^D \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \right) \left(\sum_{\mu=1}^D \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

L'invariance par changement de coordonnées de cette action permet des choix de coordonnées telles que les équations du mouvement de $X_\mu(\sigma, \tau)$ se réduisent à des équations libres (équations des ondes), augmentées de contraintes provenant du choix de coordonnées. L'équation des ondes s'écrit comme

$$\frac{\partial^2 X_\mu}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2 X_\mu}{\partial \tau^2} = 0,$$

et sa solution générale est bien connue :

$$X_\mu(\sigma, \tau) = X_\mu^L(\sigma + \tau) + X_\mu^R(\sigma - \tau),$$

où X_μ^L et X_μ^R sont des fonctions arbitraires. Les contraintes peuvent s'écrire

$$\sum_{\mu=1}^D \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \right) \left(\frac{\partial X_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \right) = 0$$

Les conditions aux limites (Neumann ou Dirichlet) impliquent que $X_\mu(\sigma, \tau)$ est la somme d'un terme linéaire en σ et τ et d'un terme périodique en σ et τ . Dans la cas de cordes ouvertes à extrémités libres satisfaisant les conditions aux limites de Neumann $\partial X_\mu / \partial \sigma = 0$ pour $\sigma = 0$ et π , la solution de l'équation des ondes s'écrit

$$X_\mu(\sigma, \tau) = q_\mu^0 + 2\alpha' p_\mu^0 \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (a_\mu^n e^{-in\tau} - a_\mu^{*n} e^{in\tau}) \cos(n\sigma).$$

La surface d'univers décrite par la corde ouverte est alors un ruban. Les deux premiers termes représentent le mouvement du centre de gravité de la corde,

tandis que les composantes de Fourier représentent les modes vibratoires de la corde. Les contraintes s'écrivent alors

$$\sum_{\mu=1}^D \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \right) \left(\frac{\partial X_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \right) = 2\alpha' \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in(\tau+\sigma)} 2L_n = 0.$$

Les coefficients de Fourier L_n ont la même expression en fonction de a_μ^n et a_μ^{*n} que les opérateurs \mathbf{L}_n introduits pour les modèles duaux en fonction des opérateurs de création et d'annihilation $\mathbf{a}_\mu^{\dagger n}$ et \mathbf{a}_μ^n

Les cordes *fermées* satisfont aux conditions aux limites $X_\mu(\sigma + \pi, \tau) = X_\mu(\sigma, \tau)$. Dans ce cas la solution de l'équation des ondes s'écrit :

$$X_\mu(\sigma, \tau) = q_\mu^0 + 2\alpha' p_\mu^0 \tau + \frac{i}{2} \sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (a_\mu^n e^{-2in(\tau-\sigma)} + \tilde{a}_\mu^n e^{-2in(\tau+\sigma)} - c.c.).$$

La surface d'univers décrite par la corde fermée est un tube. Le doublage de coefficients de Fourier est analogue à celui du modèle de Shapiro-Virasoro.

Il est aussi possible de définir un troisième type de cordes qui, bien que n'ayant pas d'analogues dans les modèles duaux discutés précédemment, a pris récemment une très grande importance. Leurs extrémités sont contraintes à se déplacer dans deux hyperplans (aujourd'hui appelés D-branes, où « D » symbolise les conditions aux limites de Dirichlet), que l'on peut définir par $X_m(\sigma = 0, \tau) = d_m^1$, $X_m(\sigma = \pi, \tau) = d_m^2$ pour certains indices $\mu = m \neq 0$, et où d_m^1 et d_m^2 sont des constantes.

Corde quantique relativiste, première quantification

Les règles de quantification canoniques appliquées au lagrangien amènent simplement à remplacer les coefficients de Fourier des solutions X_μ par des opérateurs de création et d'annihilation selon le schéma :

$$a_\mu^n \rightarrow \mathbf{a}_\mu^n \quad \text{et} \quad a_\mu^{*n} \rightarrow \mathbf{a}_\mu^{\dagger n}.$$

Comme dans le cas des modèles duaux, l'espace de Fock engendré par ces opérateurs contiendra des états de normes négatives. La contrainte au niveau classique, $L_n = 0$, devient dans la théorie quantique $\mathbf{L}_n |Phys\rangle = 0$, pour $n > 0$. Cette condition sera suffisante pour définir un sous-espace d'états de norme positive si la dimension d'espace-temps est égale à 26. Cet espace est le même que celui défini pour les modèles duaux. Une corde quantique relativiste décrit alors une infinité de particules associées aux états propres de l'opérateur de masse \mathbf{L}_0 .

La contrainte ne fixe pas complètement le choix de coordonnées. Il est possible de faire un choix supplémentaire de jauge dans lequel seules $D - 2$ composantes $X_i(\sigma, \tau)$ seront indépendantes, « dynamiques ». Ce choix garantit l'absence de fantômes quelle que soit la dimension d'espace-temps, mais il n'est pas covariant de Lorentz (en D dimensions), et la théorie quantique n'est invariante de Lorentz que si $D = 26$ précisément.

Comme dans les modèles duaux, on peut alors définir un propagateur $D(p)$ et un vertex $V(p)$ d'émission de particules (ici du tachyon), permettant d'écrire les amplitudes de diffusion par les mêmes formules,

$$D(p) = (\mathbf{L}_0 - 1)^{-1} \quad \text{et} \quad V(p) =: e^{i \sum_{\mu=1}^D p^\mu \mathbf{X}_\mu(0,0)} ;$$

où le symbole « : : » désigne le produit normal (tous les opérateurs \mathbf{a}_μ sont mis à droite et tous les opérateurs \mathbf{a}_μ^\dagger à gauche). Ce modèle de corde quantique relativiste est alors complètement équivalent aux modèles duaux correspondants. Ce formalisme est dit de première quantification.

Tout ceci s'étend au modèle de Neveu-Schwarz-Ramond : outre la position de la corde $X_\mu(\sigma, \tau)$, il faut introduire deux autres quantités (structures de spin), fonctions de σ et τ , décrivant les degrés supplémentaires du modèle associés aux deux types de trajectoires de Regge supplémentaires, et dont les coefficients du développement de Fourier seront proportionnels aux opérateurs introduits précédemment, \mathbf{b}_r^μ et \mathbf{d}_n^μ .

Cordes en interaction, théorie des champs de cordes

Jusqu'ici, nous avons uniquement défini la théorie des cordes quantiques relativistes libres avec émission de tachyons. Il est naturel de considérer des interactions à trois cordes qui généralisent les interactions à trois particules en théorie quantique des champs. L'interaction à trois particules est locale si les trois particules sont au même point de l'espace-temps. Dans le cas de cordes, au moment de l'interaction, les trois cordes doivent se recoller par morceaux. Ce concept est particulièrement simple dans un formalisme non covariant (dit du cône de lumière), où l'on peut définir des interactions du type : 1 corde \rightarrow 2 cordes. Au moment de l'interaction une corde doit s'identifier à la réunion des deux autres (on parle de cordes se coupant en deux, voir figure 10). Chaque état de vibration de la corde correspond à une particule et l'on peut alors calculer les constantes de couplage entre trois de ces particules (dont on sait qu'elles peuvent être identifiées à celles apparaissant dans le modèle de Veneziano). Il fut montré par Cremmer et Gervais dans le formalisme opératoire, et par Kaku et Kikkawa, Mandelstam dans le formalisme fonctionnel, que ces constantes de couplage étaient identiques à celles calculées dans les modèles duaux. Ceci montrait qu'il est alors possible de définir une théorie de champs de cordes reproduisant tous les résultats des modèles duaux.

Comme en théorie des champs, on peut définir une théorie des perturbations où les « diagrammes de Feynman » représentent les surfaces d'univers décrites par la corde (dans la paramétrisation du cône de lumière) (voir figure 10). On retrouve la « série » des perturbations des modèles duaux, mais chaque diagramme (covariant de Lorentz) de la théorie duale correspond à une somme de diagrammes (non covariants de Lorentz) de cette théorie de champs de cordes. Bien que satisfaisante conceptuellement, cette théorie de champs de cordes n'a pas permis jusqu'à maintenant d'aborder des problèmes non perturbatifs. Ed Witten formula cette théorie de champs de cordes de manière covariante et symétrique entre les trois cordes et définit une transformation de jauge pour les champs de cordes. Malgré son élégance, elle ne conduisait pas à des résultats nouveaux, jusqu'à des progrès très récents (condensation du tachyon).

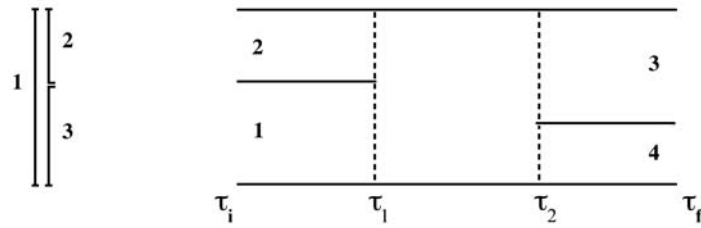


FIG. 10. À gauche : interaction « une grande corde \rightarrow deux petites cordes » ; à droite : « diagramme de Feynman » de la théorie de champs de cordes représentant l'interaction de la figure de gauche

Nouvelle interprétation des théories de cordes

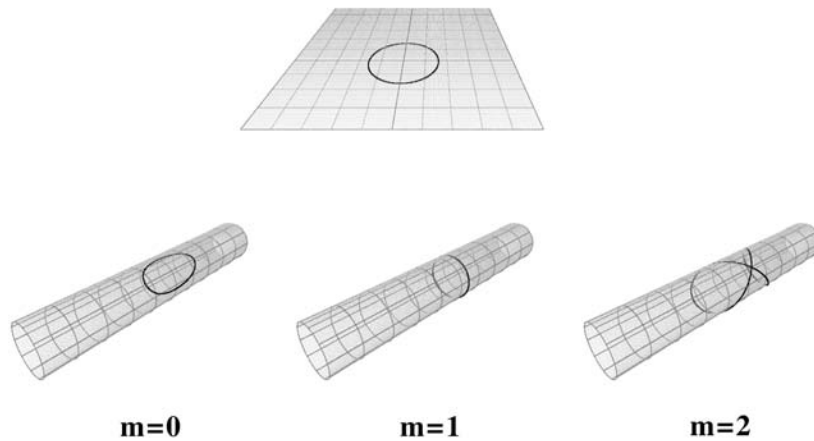


FIG. 11. Cordes fermées dans un espace compactifié en tore, m est le nombre d'enroulements.

Pour obtenir une véritable théorie de hadrons, il était nécessaire de remédier à la fois à l'existence de spineurs et vecteurs de masse nulle, et de tachyon. Cet espoir fut vite abandonné, d'autant qu'une théorie des interactions fortes au niveau des particules fondamentales (les quarks), et non plus des hadrons, émergeait avec la chromodynamique quantique. D'autre part, il avait été montré par Neveu, Scherk et Gervais que dans la limite $\alpha' \rightarrow 0$ on retrouvait les amplitudes de la théorie des champs habituelle. Dès lors, il apparut à Scherk

et Schwarz en 1974, ainsi qu'à Yoneya, que la théorie des cordes pourrait être interprétée comme une théorie des particules élémentaires (quarks, leptons, ...) et non des hadrons, l'existence de particules de masse nulle devenant alors un avantage. En particulier, l'existence d'une particule de spin 2 et de masse nulle suggère qu'elle pourrait décrire la gravitation quantique. Il restait bien sûr les problèmes du tachyon et de la dimension de l'espace-temps 10.

Dans le cadre de la théorie des champs classiques, on peut interpréter des théories définies dans un espace-temps de dimension supérieure à 4, en généralisant les travaux de Kaluza et Klein des années 20. Si l'espace-temps à D dimensions est le produit d'un espace-temps à 4 dimensions et d'un espace *compact* à $D - 4$ dimensions, à chaque particule D -dimensionnelle correspondent une infinité de particules 4-dimensionnelles, dont les excitations de masse sont proportionnelles à l'inverse de la taille de l'espace compact. Si celui-ci est très petit, ces masses deviennent très grandes et les nouvelles particules sont indétectables. Si l'on peut conserver de façon cohérente seulement un nombre fini de particules (le plus souvent de masse nulle), on parlera de réduction dimensionnelle. Si l'espace compact est un tore, produit de cercles i de rayons R_i , les impulsions dans les directions i de compactification sont quantifiées en $p_i = n_i/R_i$, les n_i étant entiers relatifs. Pour les cordes ouvertes, cela s'applique immédiatement en quantifiant les composantes correspondantes p_i^0 de l'impulsion du centre de masse. Toutes les propriétés des cordes ouvertes restent valables comme l'ont montré Cremmer et Scherk en 1976. Pour les cordes fermées, ces derniers ont également montré qu'il est nécessaire d'introduire des états de cordes s'enroulant m_i fois ($m_i \in \mathbb{Z}$) autour du cercle i (voir figure 11), ces nouveaux états solitoniques ayant des excitations de masse proportionnelles à R_i . En effet, les conditions aux limites s'écrivent maintenant

$$X_i(\sigma + \pi, \tau) = X_i(\sigma, \tau) + 2\pi m_i R_i,$$

et la solution de l'équation des ondes devient

$$X_i(\sigma, \tau) = x_i + 2\alpha' \frac{n_i}{R_i} \tau + 2m_i R_i \sigma + \text{développement de Fourier},$$

le carré de la masse de l'état fondamental devenant alors

$$M_i^2 = \frac{n_i^2}{R_i^2} + m_i^2 \frac{R_i^2}{\alpha'^2}.$$

On y voit déjà l'apparition (dont on n'a pas réalisé l'importance à l'époque) de la symétrie qui sera exploitée plus tard sous le nom de dualité T :

$$n_i \leftrightarrow m_i, R_i \leftrightarrow \frac{\alpha'}{R_i}.$$

Supersymétrie

Dans le cadre de la formulation par intégrale fonctionnelle des modèles duaux de Hsue, Sakita et Virasoro, Gervais et Sakita avaient montré en 1971 le lien entre l'algèbre de Virasoro et le groupe conforme à 2 dimensions, d'abord pour le modèle bosonique, puis dans le cadre du modèle de Neveu-Schwarz-Ramond, où ils ont découvert que l'algèbre graduée infinie était liée à un nouveau type de symétrie, la supersymétrie à 2 dimensions. Ceci incita en 1974 Wess et Zumino

à chercher une généralisation de telles symétries en 4 dimensions. Ce fut le point de départ de la *supersymétrie* qui échange bosons et fermions. Il va s'ensuivre alors une influence mutuelle entre supersymétrie et théorie des cordes.

L'algèbre de supersymétrie a un nombre fini de générateurs et contient l'algèbre de Poincaré (il existe aussi des superalgèbres de (anti)de Sitter et conformes). La superalgèbre de Poincaré contient, outre les générateurs de l'algèbre de Poincaré $M_{\mu\nu}$ (algèbre de Lorentz) et P_μ (translations), des générateurs spinoriels (fermioniques) Q_α , qui ont les lois de commutation ou d'anticommutation supplémentaires

$$\begin{aligned} [P_\mu, Q_\alpha] &= 0 \\ [M_{\mu\nu}, Q_\alpha] &= \frac{1}{4}(\gamma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta \\ [Q_\alpha, Q_\beta^\dagger]_+ &= \sum_\mu (C\gamma^\mu)_{\alpha,\beta} P_\mu, \end{aligned}$$

où les γ^μ sont les matrices 4×4 de l'algèbre de Clifford de $O(3,1)$ et $\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ et C est une matrice 4×4 appelée matrice de conjugaison de charge.

Cette algèbre peut contenir plusieurs générateurs spinoriels Q_α^i , $i = 1, \dots, \mathcal{N}$. Chaque opérateur Q_α^i augmentant l'hélicité d'une demi-unité, il s'ensuit que si l'on veut seulement des particules de masse nulle et de spin inférieur ou égal à 1, on doit se limiter à $\mathcal{N} \leq 4$ (cadre des théories des champs renormalisables). Si l'on veut des particules de masse nulle et de spin inférieur ou égal à 2, on peut aller jusqu'à $\mathcal{N} = 8$. (Il semble impossible de construire des théories avec des particules de masse nulle et de spin plus grand que 2). Si la supersymétrie est rendue locale, le groupe de Poincaré sera aussi local, et les théories correspondantes seront invariantes par reparamétrisation et contiendront la gravitation, d'où leur nom de supergravité. La plus simple fut construite en 1976 par deux groupes, celui de Ferrara, Freedman et Van Nieuwenhuizen d'une part, et celui de Deser et Zumino de l'autre.

Supercordes et supergravités en dimensions supérieures

Ces réussites amenèrent à se poser la question de l'existence de théories de cordes supersymétriques. En 1977, Gliozzi, Olive et Scherk montrèrent qu'il était possible de tronquer le modèle de Neveu-Schwarz-Ramond de manière cohérente, à la fois dans le secteur bosonique et le secteur fermionique, pour obtenir des théories de cordes supersymétriques à 10 dimensions, et de plus sans tachyon. Il existe alors deux types de supercordes ouvertes avec symétrie $SO(N)$ ou $SU(N)$, et trois types de supercordes fermées I, IIA et IIB, toutes à 10 dimensions. Les particules de masse nulle de ces théories (survivant à la limite $\alpha' \rightarrow 0$) forment les multiplets de la théorie de super Yang-Mills $SO(N)$ et $SU(N)$ et les multiplets des supergravités à $\mathcal{N} = 1$, $\mathcal{N} = 2$ (IIA) et $\mathcal{N} = 2$ (IIB). Ceci amena Nahm en 1977 à étudier les représentations des supersymétries en dimension D . Il montra en particulier que super Yang-Mills peut exister jusqu'à $D = 10$, tandis que la supergravité peut exister jusqu'à 11 dimensions. Bien qu'elle n'eut pas un lien direct avec les supercordes (autre que son identification, après réduction dimensionnelle à 10 dimensions, avec la supergravité IIA) Cremmer, Julia et Scherk la construisirent en 1978. Cela permit à Cremmer et

Julia de construire la supergravité maximale à 4 dimensions dite $\mathcal{N} = 8$ (où il y a 8 supercharges), et de découvrir les symétries non-compactes de dualité de cette théorie $E_{7(+7)}$ et l'interprétation géométrique des champs scalaires paramétrisant l'espace quotient $E_{7(+7)}/SU(8)$. Ces symétries de dualité ne sont pas des symétries du lagrangien, mais seulement des équations du mouvement ; en fait elles échangent les équations du mouvement proprement dites des champs vectoriels (connexions) et les identités de Bianchi satisfaites par leur courbures. Les symétries de dualité sont à la base des nouvelles dualités des supercordes actuelles. À partir de cette époque, le formalisme des supercordes fut établi avec précision, essentiellement par Green et Schwarz. En raison de la supersymétrie, les dernières divergences ultraviolettes (c'est-à-dire à courte distance) disparaissent et il devient possible de considérer les supercordes fermées comme une définition possible de la gravitation quantique. Malgré cela, la situation restera calme jusqu'en 1984.

REMERCIEMENTS

Nous remercions vivement Costas Bachas, Chris Hull et John Schwarz pour leurs commentaires éclairant cet article.

Cet article a été soutenu en partie par les programmes RTN HPRN-CT-2000-0013 et HPRN-CT-2000-00148 de la Commission Européenne et par le Semestre « Supergravité, Supercordes et Théorie M » du Centre Émile Borel de l'Institut Henri Poincaré (UMS 839-CNRS/UPMC).

Pour en savoir plus

— Ouvrages de base

- M.B. Green, J.H. Schwarz et E. Witten
Superstring Theory, Vols 1 & 2 (Cambridge University Press, 1987)
- A.M. Polyakov
Gauge Fields and Strings (Harwood-Academic, Chur, 1987)
- J. Polchinski
String Theory, Vols 1 & 2 (Cambridge University Press, 1998)
- S. Weinberg
The Quantum Theory of Fields, Vol. 3 : Supersymmetry
(Cambridge University Press, 2000)

— Ouvrages de « Reprints »

- *Superstrings - The first 15 years of superstring theory, Vols 1 & 2*
compilés par J.H. Schwarz (World Scientific, 1986)
- *Supersymmetry, Vols 1 & 2*
compilés par S. Ferrara (North Holland/World Scientific, 1987)
- *Supergravity in Diverse Dimensions, Vols 1 & 2*
compilés par Abdus Salam et E. Sezgin
(North Holland/World Scientific, 1989)