MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

$\maltese_{\mathrm{K}}$, objet du 3$^{\text{e}}$ type[1]

Francis Sergeraert[2]

1. Introduction

Au milieu des années 60, Maître Henri Cartan était ravi d'avoir fait baptiser *Mathématique*, sans *s*, l'immeuble de l'Université d'Orsay consacré à notre discipline. Ce singulier inhabituel voulait en proclamer l'unité, bien dans la ligne de pensée de l'un des principaux créateurs de Bourbaki.

L'introduction[3] du livre *Théorie des Ensembles* [2] de l'éminent Nicolas virtuel explique comment et pourquoi une seule logique, celle de Zermelo-Frænkel, nous est jusqu'à nouvel ordre suffisante. Cette logique de référence est souvent mentionnée dans le présent texte et y est désignée simplement $\mathfrak{ZF}$. Les objections à ce mode de *pensée unique* sont connues, mais elles n'intéressent pas beaucoup de mathématiciens. Bourbaki a « oublié » les catégories, mais quelques modifications mineures permettent de travailler avec les classes *intuitivement* comme on a l'habitude de le faire avec les ensembles, à condition de prendre quelques précautions. Dans un registre assez différent, les logiques *constructives*[4] ($\mathfrak{LC}$) et *non-standard* ont fini par imposer l'intérêt de leurs points de vue, mais sans que la proportion de mathématiciens vraiment concernés soit significative.

On veut présenter dans cet article un objet d'un type nouveau, noté $\maltese_{\mathrm{K}}$, récemment introduit en topologie algébrique. Il faut travailler *simultanément* sous $\mathfrak{ZF}$ et $\mathfrak{LC}$ pour en comprendre la nature. C'est le type inédit de cet objet qui est à l'origine du titre du texte. La situation est cocasse et propice aux malentendus. La « part de marché » de la topologie algébrique s'est appauvrie depuis les temps héroïques de Cartan et Serre[5]. L'une des causes de cette désaffection de fait est l'insuffisance donnée au point de vue *effectif* dans ses résultats, quelquefois assez illusoires, pour ne pas dire *illusionnistes*[6]. Il est curieux dans ces conditions de constater comment cette spécialité reste disjointe des développements modernes de la logique et de l'informatique. La

---

1 Larry Siebenmann a suggéré de publier dans cette Gazette le texte [19], en fait un peu trop spécialisé pour le public visé. Le présent article en est une réécriture sous une forme adaptée assez différente, mais équivalente sur le fond.

2 Francis.Sergeraert@ujf-grenoble.fr

3 Où l'on croit bien reconnaître la patte d'Henri Cartan ?

4 Appelées aussi assez maladroitement *intuitionnistes*.

5 La topologie algébrique « classique » était pratiquement absente du dernier Congrès Européen de Barcelone (10-14 Juillet 2000).

6 Point détaillé Section 4.

géométrie algébrique, l'arithmétique et la théorie des groupes bénéficient au contraire depuis longtemps de relations « pluridisciplinaires » avec l'algorithmique théorique ou concrète. Les historiens de notre discipline resteront perplexes pour comprendre pourquoi la topologie algébrique est encore, au changement de millénaire, si éloignée du point de vue effectif ; pour des raisons qui seront expliquées plus loin, ce devrait pourtant être l'un de ses buts premiers.

Le résultat à examiner est la définition d'un *modèle algébrique* du *type d'homotopie* d'un espace topologique. On expliquera la nature du problème, qu'on peut appeler « problème MATH », acronyme pour modèle algébrique du type d'homotopie. Trois solutions sont maintenant disponibles, très différentes, toutes intéressantes, qu'on appellera respectivement JS, RSH et RSG. C'est dans la solution RSG qu'intervient l'objet ✠K.

L'article est organisé comme suit. La Section 2 explique de façon ultra-simplifiée la nature du problème MATH. La Section 3 donne les grandes lignes du cheminement qui, par enrichissement progressif de structure, a conduit à la solution obtenue récemment par Justin Smith, celle qu'on a baptisée JS. Cette solution est intéressante, mais ce n'est pas celle qui motive le présent texte ; elle est en effet « classique » et ne nécessite aucune logique particulière pour être comprise et *évaluée*.

Il n'est pas évident de définir ce que recouvre exactement le mot-clé *algébrique*. La Section 4 examine rapidement le point de vue *algorithmique*, connexe mais pas équivalent. Les solutions RSH et RSG au problème MATH dépendent de ce point de vue ; elles sont succintement exposées Section 5. La troisième solution, celle qui motive cet article, a été bizarrement acueillie par la profession ; un mini-rapport à ce sujet est donné Section 6. La solution RSG a mené au logiciel *Kenzo* ; quelques résultats de calculs machines sont décrits Section 7.

2. Topologie algébrique

2.1. Topologie et algèbre

La topologie[7] est une discipline a priori relativement ésotérique, de sorte qu'un sujet permanent d'étude est la recherche d'une réduction de tel ou tel problème topologique à un problème moins ésotérique, par exemple de nature algébrique. La topologie algébrique est l'étude systématique de telles réductions.

L'exemple prototype est le suivant. Soit D^2 le disque unité fermé du plan et S^1 son bord, le cercle unité ; alors il n'existe pas d'application continue $f : D^2 \to S^1$ telle que la restriction au bord $f_{|S^1} : S^1 \to S^1$ soit l'identité. La preuve, par l'absurde, résulte de l'application du foncteur H_1 de la topologie algébrique, foncteur défini pour tout espace topologique, à valeur groupe abélien. En particulier $H_1.D^2/ = 0$ et $H_1.S^1/ = \mathbb{Z}$. Notons i l'inclusion canonique $i : S^1 \to D^2$. Un éventuel f devrait vérifier $f \circ i = id_{S^1}$ et, par application du foncteur H_1, le morphisme identité $H_1.id_{S^1}/ = id_{\mathbb{Z}}$ devrait se factoriser comme un composé de deux morphismes $H_1.i/$ et $H_1.f/$ où le groupe médian est nul ; ce n'est pas possible.

7 Conformément au style « large public » de la Gazette, l'auteur n'a pas hésité à plusieurs reprises à « tricher » copieusement pour contourner les technicités secondaires ; les topologues professionnels sauront déterminer les corrections appropriées ; les autres lecteurs peuvent demander le cas échéant (Sergeraert@ujf-grenoble.fr) compléments et références.

$$
\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "i"'] & & S^1 \\
& D^2 \arrow[ur, "f\,???"'] &
\end{tikzcd}
\quad \overset{\Longrightarrow}{H_1} \quad
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "0"'] & & \mathbb{Z} \\
& 0 \arrow[ur, "???"'] &
\end{tikzcd}
$$

2.2. Invariants

Un groupe tel que $\mathbb{Z} = H_1(S^1)$ est appelé un *invariant* de S^1, car il ne dépend que de la classe d'homéomorphisme de l'argument S^1 : si les espaces X et Y sont homéomorphes, les groupes $H_1(X)$ et $H_1(Y)$ sont les mêmes.

Deux applications continues $f_0; f_1 : X \to Y$ sont *homotopes* s'il existe une application continue $F : X \times [0; 1] \to Y$ telle que $F(x; 0) = f_0(x)$ et $F(x; 1) = f_1(x)$. Une application[8] $f : X \to Y$ est une *équivalence d'homotopie* s'il existe $g : Y \to X$ telle que les deux composés $g \circ f$ et $f \circ g$ sont homotopes aux identités de X et Y. Par exemple l'inclusion du cercle unité S^1 dans le plan troué $\mathbb{R}^2 - \{(0; 0)\}$ est une équivalence d'homotopie.

Plus fort que ce qui était expliqué plus haut, un groupe $H_1(X)$ est un invariant du *type d'homotopie* de X ; autrement dit, s'il existe une équivalence d'homotopie $f : X \to Y$, alors les groupes $H_1(X)$ et $H_1(Y)$ sont les mêmes. Un type d'homotopie est une classe d'équivalence d'espaces topologiques pour la relation « il existe une équivalence d'homotopie entre… » ; par exemple le cercle unité et le plan troué ont le même type d'homotopie.

Il en est de même pour beaucoup d'autres notions de topologie algébrique, par exemple les groupes d'homotopie $\pi_i(X)$ et les groupes de K-théorie $K_i(X)$ ne dépendent que du type d'homotopie de X ; de sorte que le *problème inverse* s'impose : quel ensemble d'invariants pourrait permettre de *caractériser* un type d'homotopie ? Il s'agit de définir un ensemble d'invariants HT_0, HT_1, …, HT_n, … de telle façon que deux espaces X et Y admettent une équivalence d'homotopie *si et seulement si* l'égalité $HT_i(X) = HT_i(Y)$ est valide pour tout entier i. En regroupant ces invariants hypothétiques $HT_i(X)$ en *un* objet « synthèse » $HT(X)$, on peut alors appeler cet objet $HT(X)$ un modèle du type d'homotopie de X. Il faut arriver à définir le foncteur HT de telle façon que X et Y ont même type d'homotopie si et seulement si $HT(X) = HT(Y)$.

Sous peine de solution sans intérêt[9], il faut exiger quelque chose du modèle $HT(X)$. Dans l'esprit de la topologie algébrique, on demande habituellement que la solution $HT(X)$ soit un objet *algébrique*, qualificatif qu'il n'est pas possible de définir dans le cadre $\mathfrak{ZF}$. En fait il y a bien une façon de définir l'exigence « algébrique » : l'objet $HT(X)$ doit pouvoir être installé *sur machine*[10], de telle façon qu'il existe un *algorithme* permettant de déterminer s'il y a égalité ou non entre deux tels objets $HT(X)$ et $HT(Y)$. C'est ici que le point de vue constructif apparaît, revenant à dire qu'en définitive est « algébrique » ce qui est exploitable sur machine ; cette *définition* de l'algébricité n'est pas standard, mais la topologie algébrique bien comprise est précisément le contexte idéal pour réaliser que c'est la seule possible. On reviendra sur cette question.

---

[8] Désormais, sauf mention contraire qui n'arrivera jamais, une application entre espaces topologiques est supposée continue.

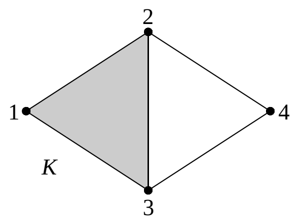
[9] Si vous connaissez le ø de Hilbert défini comme dans Bourbaki [2], l'objet $HT_{\mathfrak{ZF}}(X) = ø_A(A$ a le type d'homotopie de $X)$ est une telle solution.

[10] Concrète, comme un PC du supermarché, ou théorique, comme une machine de Turing.

2.3. Groupes d'homologie

Avant de continuer, on explique très succintement comment on « calcule » le groupe H_1 d'un espace topologique. Cet exemple nous servira de support pour expliquer très grossièrement la nature du problème MATH.

On finira par *devoir* travailler sur machine, et des modèles combinatoires sont nécessaires pour les espaces topologiques à traiter. Le cadre simplicial est commode ; par exemple le *complexe simplicial* K ci-contre, un losange dont un triangle est plein et l'autre creux, peut être défini comme $K = (V, S)$ où V, l'ensemble des *sommets*, est $V = \{1, 2, 3, 4\}$ et S, l'ensemble des *simplexes*, est :



$$S = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}\}.$$

Autrement dit on décrit un espace topologique par un assemblage de sommets, d'arêtes, de triangles (= 2-simplexes), tétraèdres (= 3-simplexes) et plus généralement de n-simplexes. Seuls les espaces *triangulables* sont susceptibles d'un tel traitement mais on ne considère pas ici les autres[11]. Le groupe C_0 des 0-chaînes est le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les 0-simplexes (sommets), ici $\mathbb{Z}^4$; plus généralement le groupe C_n des n-chaînes est engendré par les n-simplexes. L'opérateur de bord $d_n : C_n \to C_{n-1}$ fait correspondre à un n-simplexe générateur la somme alternée de ses faces, les sous-simplexes obtenus en enlevant l'un des sommets du simplexe. Par exemple :

$$d_2(\{1,2,3\}) = \{2,3\} - \{1,3\} + \{1,2\}.$$

Le composé de deux opérateurs de bord successifs est nul, ce qui permet de définir $H_n = \operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n+1}$. Ainsi, pour le complexe simplicial ci-dessus, on trouve que H_1 est isomorphe à $\mathbb{Z}$ avec comme générateur la classe de la chaîne (du *cycle*) $\{2,3\} - \{2,4\} + \{3,4\}$.

Il est remarquable et pas si facile à montrer que deux triangulations différentes d'un même espace topologique donnent les mêmes groupes d'homologie. Il faut pour ce faire utiliser l'homologie *singulière*, généralisation de ce qui est expliqué ci-dessus aux espaces topologiques quelconques [8, Chap. VI et VII]. Le complexe de chaînes d'un complexe simplicial est la suite de ses groupes de chaînes et opérateurs de bord :

$$\cdots \xleftarrow{d_{n-1}} C_{n-1}(K) \xleftarrow{d_n} C_n(K) \xleftarrow{d_{n+1}} C_{n+1}(K) \xleftarrow{d_{n+2}} \cdots$$

Pour le différencier du complexe minimal introduit plus loin, on l'appellera le complexe de chaînes *initial* $C_*(K)$ de K. Ce complexe de chaînes vient de l'objet géométrique K, mais on peut aussi considérer des complexes de chaînes « abstraits » faits de $\mathbb{Z}$-modules et d'opérateurs de bord quelconques vérifiant cependant $d_{n-1} \circ d_n = 0$ pour tout n.

---

[11] Par ailleurs le cadre des *ensembles simpliciaux* [11] est beaucoup plus puissant que celui des complexes simpliciaux, mais hors de portée de ce texte.

2.4. Propriétés de finitude

Il est très fréquent de *devoir* considérer des complexes simpliciaux qui ne sont pas de type fini. Par exemple $\mathrm{K} = .\mathrm{V}\,;\mathrm{S}/$ où V, ensemble des sommets, est l'ensemble $\mathbb{N}$ de *tous* les entiers, et S, ensemble des simplexes, est l'ensemble de *toutes* les parties finies de $\mathbb{N}$, est un complexe simplicial assez « gros » ; pourtant tous ses groupes d'homologie sont nuls sauf $\mathrm{H}_0 = \mathbb{Z}$.

L'un des résultats les plus importants de Serre en topologie algébrique [20] montre que beaucoup de complexes simpliciaux de type infini ont quand même, s'ils sont construits selon des processus « raisonnables », décrits en détail par Serre, des groupes d'homologie de type fini. Dans un tel cas, le complexe de chaînes $\mathrm{C}_*.\mathrm{K}/$ du complexe simplicial K n'est pas de type fini, mais il a les mêmes groupes d'homologie qu'un autre complexe de chaînes $\mathrm{C}^{\mathrm{m}}_*.\mathrm{K}/$, essentiellement unique pour les propriétés suivantes : le complexe $\mathrm{C}^{\mathrm{m}}_*.\mathrm{K}/$ est fait de $\mathbb{Z}$-modules libres de rang fini et il est *minimal* parmi les complexes ayant les groupes d'homologie qu'il faut. En particulier une *équivalence de chaînes*, elle aussi essentiellement unique, peut alors être installée entre le complexe de chaînes *initial* $\mathrm{C}_*.\mathrm{K}/$ définissant les groupes d'homologie et le complexe minimal $\mathrm{C}^{\mathrm{m}}_*.\mathrm{K}/$ qui s'en déduit[12]. Une telle équivalence de chaînes est un morphisme de complexes de chaînes (définition naturelle) vérifiant quelques propriétés. C'est cette équivalence qui va nous occuper dans la suite. Elle est si importante qu'elle mérite un affichage $\mathrm{T_EX}$ « display » :

$$\mathrm{C}_*.\mathrm{K}/ \overset{”}{\Longleftrightarrow} \mathrm{C}^{\mathrm{m}}_*.\mathrm{K}/$$

On verra que cette équivalence de chaînes ” est le cœur du sujet des trois solutions JS, RSH et RSG du problème MATH[13].

Le lecteur courageux parvenu à ce point ne doit pas s'inquiéter s'il ne connaît pas le détail de ces définitions. Seul nous intéresse le statut de ces objets par rapport à la calculabilité, statut qui sera exposé de façon « informelle », en essayant de montrer seulement les idées principales.

2.5. Topologie algébrique = ?

Il s'agit donc d'examiner soigneusement l'équivalence de chaînes ” montrée ci-dessus, en analysant la situation créée par le fait que, dans la quasi-totalité des cas intéressants, le complexe *initial* $\mathrm{C}_*.\mathrm{K}/$ n'est pas de type fini, alors qu'au contraire l'autre complexe $\mathrm{C}^{\mathrm{m}}_*.\mathrm{K}/$, à considérer comme complexe *résultat*, est lui de type fini. Du point de vue de la calculabilité, la non-finitude du complexe initial va clairement poser un sérieux problème. C'est ce point qui est à l'origine des malentendus observés, quelquefois chez des topologues de première classe.

On avait donné dans une note bas de page, Section 2.2, une solution absurde au problème MATH, consistant à utiliser le ø de Hilbert, pour ce qui ressemble à une plaisanterie de mauvais goût ; pourtant, du point de vue $\mathfrak{ZF}$, la solution proposée en est bien une. Puisqu'elle est sans intérêt, comment préciser l'énoncé pour l'interdire ? C'est le sorcier caché derrière le ø qui est à l'origine de l'entourloupe et il faut le mettre hors d'état de nuire. L'opérateur ø sert à modéliser l'axiome du choix, et nous devons donc

---

[12] Et vice versa : puisque le complexe $\mathrm{C}^{\mathrm{m}}_*.\mathrm{K}/$ est de type fini, ses groupes d'homologie sont calculables : il y a équivalence, même dans $\mathfrak{LC}$, entre la donnée des groupes d'homologie et celle du complexe minimal.

[13] Les topologues savent qu'il *faut garder* la structure simpliciale de $\mathrm{C}_*.\mathrm{K}/$ pour ne pas perdre d'emblée le type d'homotopie de K; le complexe $\mathrm{C}_*.\mathrm{K}/$ est donc un module simplicial, alors que le complexe minimal $\mathrm{C}^{\mathrm{m}}_*.\mathrm{K}/$ est un complexe de chaînes « pur », ou « abstrait ».

affaiblir, sérieusement, cet axiome. Le plus simple et le plus naturel consiste à changer de logique et à adopter le point de vue $\mathfrak{LC}$: on demande que le modèle $\mathrm{HT}(K)$ du type d'homotopie d'un complexe simplicial K soit un « objet machine », et que, si deux tels objets $\mathrm{HT}(K)$ et $\mathrm{HT}(L)$ sont donnés, alors un algorithme sache décider leur égalité[14].

Qu'est-ce qu'un *objet machine* ? C'est le contenu d'un segment mémoire, donc une chaîne de bits, ou bien, si on préfère, une chaîne de caractères. Mais [15] $\mathfrak{ZF}$ va à nouveau nous jouer des tours, car il nous explique comment tout complexe simplicial K peut être défini par une chaîne de caractères sur un alphabet fini, et *de même* pour la classe d'homotopie à la $\mathfrak{ZF}$:

$$\mathrm{HT}_{\mathfrak{ZF}}(K) = \varnothing_A(A \text{ a le type d'homotopie de } K).$$

Oui, mais même après installation sur machine du texte $\mathfrak{ZF}$ pour les objets $\mathrm{HT}_{\mathfrak{ZF}}(K)$ et $\mathrm{HT}_{\mathfrak{ZF}}(L)$, théoriquement *et* pratiquement[16] parfaitement faisable, aucun *algorithme* n'est a priori disponible[17] pour en déterminer l'égalité, et la solution absurde utilisant le $\varnothing$ de Hilbert est cette fois en échec. Il faut donc impérativement considérer le problème MATH dans le cadre $\mathfrak{LC}$. Ce type de situation est très fréquent, et on doit indiquer ici au lecteur que ce n'est pas du tout ce point qui motive cet article : il est en effet facile de modéliser la notion d'algorithme à l'intérieur de $\mathfrak{ZF}$ même, tout le monde le fait sans se poser de question métaphysique et c'est très bien ainsi.

Dans ces considérations introductrices, deux notions ont évolué en parallèle sans qu'elles aient encore convergé. On a d'une part introduit la notion de *type d'homotopie* du complexe K, d'autre part donné quelques indications sur le « calcul » des groupes d'homologie $H_*(K)$. Seule relation pour le moment : « mêmes types d'homotopie » implique « mêmes groupes d'homologies », ou, si on préfère, mêmes complexes minimaux.

Puisqu'il est classique que les invariants groupes d'homologie *ne déterminent pas* un type d'homotopie, il reste donc à trouver ce qu'on pourrait inventer comme nouveaux invariants pour que leur ensemble détermine enfin le type d'homotopie du complexe simplicial sous-jacent. On a ainsi résumé d'une façon hyper-elliptique le *problème clé* de la topologie algébrique *fondamentale,* le problème MATH [18].

3. De Steenrod à Justin Smith

Les espaces $S^2 \vee S^4$ (deux sphères de dimension 2 et 4 « attachées » par leur pôle sud) et $P^2\mathbb{C}$ (plan projectif complexe) ont les mêmes groupes d'homologie et pourtant ils n'ont pas le même type d'homotopie. Comment distinguer « par la topologie algébrique » les types d'homotopie de ces espaces ?

---

[14] Au sens des logiciens : répondre par oui ou par non à la question de l'égalité.

[15] Que le lecteur non familier de la formalisation de $\mathfrak{ZF}$ telle qu'elle est décrite dans [2] saute ce paragraphe.

[16] On va justement le faire Section 5.3.

[17] Il résulte du théorème d'incomplétude de Gödel qu'un tel algorithme ne peut exister.

[18] Pour les topologues : une autre façon d'énoncer le problème MATH consiste à demander une extension au cas *entier* de la théorie de Sullivan [25], théorie qui n'est valide que pour les types d'homotopie *rationnelle*.

3.1. Structure multiplicative

Les groupes d'homologie ne sont a priori que des groupes, mais ils portent en fait des structures beaucoup plus riches qu'il faut examiner pour tenter d'obtenir plus d'informations sur le type d'homotopie sous-jacent.

En s'inspirant du produit extérieur des formes différentielles sur les variétés, on peut définir une structure d'algèbre sur l'ensemble des groupes de *co*homologie [19] $H^*.K/$. Il arrive alors ceci : les espaces $S^2 \vee S^4$ et $P^2\mathbb{C}$ ne sont pas distingués par les groupes d'homologie, ni par les groupes de cohomologie, mais par contre ils le sont par la structure multiplicative de la cohomologie : celle de $S^2 \vee S^4$ est triviale, alors que celle de $P^2\mathbb{C}$ ne l'est pas.

Bien, mais il se trouve aussi que cette structure multiplicative ne permet pas de distinguer $S^3 \vee S^5$ et la suspension[20] $SP^2\mathbb{C}$. Il faut donc trouver un nouvel invariant permettant de distinguer aussi les types d'homotopie de ces espaces.

3.2. Steenrod

Norman Steenrod a découvert à la fin des années 40 un type de structure d'un type complètement nouveau sur la cohomologie $H^*.K;\mathbb{Z}_2/$ à coefficients[21] dans $\mathbb{Z}_2$. Steenrod a montré que cette cohomologie admet naturellement une structure de module par rapport à une algèbre « métaphysique » appelée maintenant l'algèbre de Steenrod $\mathcal{A}_2$, algèbre d'opérations de cohomologie. Cette structure de module contient la structure multiplicative évoquée dans la section précédente mais elle est beaucoup plus riche. Elle permet en particulier de distinguer les types d'homotopie de $S^3 \vee S^5$ et $SP^2\mathbb{C}$.

Oui, mais d'autres espaces sensiblement plus compliqués à construire, dont les types d'homotopie sont différents, ne peuvent pas être distingués par la structure de $\mathcal{A}_2$-module de leur $\mathbb{Z}_2$-cohomologie...

3.3. Sisyphes, Peter May et Justin Smith

Des quantités d'autres invariants (groupes d'homotopie, à coefficients ou non, groupes de K-théorie, cohomologies extraordinaires, groupes de X-théories de toutes sortes, ...) ont été imaginés depuis Steenrod, le plus souvent pour leur intérêt propre, indépendamment du problème qui nous occupe. Aucune combinaison connue de ces invariants[22] n'est jusqu'à nouvel ordre une solution au problème MATH, au sens expliqué Section 2.5. Il est clair maintenant que ces invariants sont, malgré leur richesse, beaucoup trop... pauvres pour être la matière d'une solution à notre problème. La topologie algébrique est apparue dès lors comme un espace vaste et escarpé, peuplé de clones de Sisyphe ; rien ne permet de constester l'intérêt de leur travail, mais il est vrai qu'ils donnent souvent l'impression d'avoir oublié l'origine de leur sujet.

Une autre direction, du plus haut intérêt, a été heureusement ouverte par Peter May et quelques autres dans les années 70. La topologie algébrique utilise constamment des homotopies et aussi des équivalences d'homotopie, topologiques ou algébriques ;

---

[19] Obtenus en dualisant d'abord le complexe initial $C_*.K/$.

[20] La *suspension* de X est le produit $X \times [0;1]$ où le plancher $X \times 0$ et le plafond $X \times 1$ sont l'un et l'autre réduits à un point.

[21] Modification de la cohomologie de style localisation en un premier.

[22] Les dispositifs connus comme tours de Postnikov et tours de Wall (voir par exemple [1]) ne sont pas non plus des solutions à notre problème, car les ingrédients qui les constituent ne sont pas a priori calculables ; ils le deviennent dès qu'une solution au problème MATH est disponible.

dans le deuxième cas on les appelle plutôt des *équivalences de chaînes*, mais le principe est le même. Dans un premier temps on préfère se contenter de l'*existence*, au sens $\mathfrak{ZF}$, de ces équivalences d'homotopie. Puis, peu à peu, on réalise qu'il faut en savoir plus sur ces équivalences d'homotopie, pour mieux exploiter le contexte. De proche en proche, on observe qu'en général on abandonne *bien trop tôt* le contexte structurel à l'origine des principales définitions de la topologie algébrique. On ne peut détailler plus dans ce court article, mais expliquer seulement que ce point de vue a conduit Peter May à définir et développer des types de structure absolument nouveaux appelés *opérades*, car il s'agit de vastes ensembles d'opérateurs richement structurés ; les objets où opèrent ces batteries d'opérateurs sont des « modules » par rapport à ces opérades ; bien utilisée, cette technique permet d'*abstraire* le cœur de la structure des objets topologiques et de leurs descendants, sans rien perdre de l'essentiel. Les invariants usuels de la topologie algébrique sont des micro-sous-produits de ces structures. Vladimir Smirnov [22] est allé très loin en ce sens ; il a obtenu ainsi de superbes solutions à des problèmes très concrets, en particulier autour de l'homologie des espaces de lacets itérés [23].

Suivant la voie ouverte par Smirnov, Justin Smith a annoncé récemment [24] une solution au problème MATH consistant à enrichir le complexe minimal $\mathrm{C}^{\mathrm{m}}_*.\mathrm{K}/$ d'une structure de module par rapport à un opérade bien choisi, un modèle de type fini de l'opérade E_∞, opérade clé des questions de topologie algébrique. C'est cette solution qu'on appelle solution JS. Sa validité reste un peu problématique dans ses détails, mais il est clair qu'après quelques corrections et compléments éventuels, une telle solution doit être disponible.

Examinons pour comparaison ultérieure la solution de Justin Smith par rapport à l'équivalence de chaînes ” décrite Section 2.4 :

$$\mathrm{C}_*.\mathrm{K}/ \stackrel{”}{\Longleftrightarrow} \mathrm{C}^{\mathrm{m}}_*.\mathrm{K}/;$$

La *nature* de la solution de Justin Smith est la suivante : la non-finitude très fréquente du complexe initial $\mathrm{C}_*.\mathrm{K}/$ interdit de considérer cet objet pour un usage *sur machine*, théorique ou concrète. Il faut donc l'évacuer complètement et se contenter du complexe minimal $\mathrm{C}^{\mathrm{m}}_*.\mathrm{K}/$; mais ce dernier est très pauvre en information et il faut enrichir considérablement sa structure si on souhaite y décrire un type d'homotopie *complet*. La solution de Justin Smith utilise les opérades de Peter May, en s'inspirant notamment des travaux de Smirnov sur l'opérade E_∞. Justin Smith définit un modèle ad hoc pour l'opérade E_∞, puis une structure de E_∞-module sur le complexe minimal $\mathrm{C}^{\mathrm{m}}_*.\mathrm{K}/$, déduite de la topologie du complexe initial K. Notons $[\mathrm{C}^{\mathrm{m}}_*.\mathrm{K}/]_{\mathrm{E}_\infty}$ le complexe à structure ainsi enrichie. Alors :

$$\mathrm{H\,T}_{\mathrm{JS}} = [\mathrm{C}^{\mathrm{m}}_*.\mathrm{K}/]_{\mathrm{E}_\infty}$$

est la solution de Justin Smith du problème MATH .

Elle est très intéressante. Son auteur[23] commence à étudier ce qui pourrait être fait sur machine *concrète* pour y implémenter ses E_∞-modules, pour *calculer* $[\mathrm{C}^{\mathrm{m}}_*.\mathrm{K}/]_{\mathrm{E}_\infty}$ dans les cas usuels de la topologie algébrique, et pour en déduire les divers invariants de la topologie algébrique. Un superbe espace de travail est là devant ceux qui veulent bien s'y intéresser.

---

[23] Il bénéficie d'une double complétence rare Topologie Algébrique + Informatique.

4. La version algorithmique du problème

On a vu que sans exigence de calculabilité pour une solution MATH, le problème est vide ; les questions de calculabilité en topologie algébrique vont donc jouer un rôle essentiel. L'une des premières questions naturelles en la matière est la calculabilité des groupes d'homotopie des complexes simpliciaux finis[24]. Elle fut résolue positivement par Edgar Brown [3] dans un article remarquable à deux points de vue :

– Edgar Brown expliquait lui-même que sa solution est définitivement inutilisable pour des calculs concrets ;

– Il n'utilisait pas les *suites spectrales*, l'outil essentiel mis au point par Serre pour « calculer » les groupes d'homotopie qui lui ont valu la médaille Fields.

Le premier point est à l'origine de la désaffection des topologues pour les questions de calculabilité, théorique ou concrète. Il y a pourtant là une anomalie flagrante par rapport à l'évolution scientifique en général, mais on l'a déjà expliqué. La seconde remarque est capitale pour notre sujet. Presque tous les manuels de topologie algébrique présentent les suites exactes et les suites spectrales comme des méthodes de « calcul » de groupes inconnus. C'est le plus souvent *grossièrement faux*[25], en raison des problèmes de détermination des différentielles supérieures, d'une part, et des problèmes d'extension à l'aboutissement, d'autre part[26]. Voir [12, pp 6 et 28], où McCleary explique mieux que d'autres cette difficulté essentielle, mais n'arrive pourtant pas à la décrire *mathématiquement,* pour cause d'absence de contexte *calculabilité* : il faudrait là travailler dans $\mathfrak{LC}$.

En vérité on pourrait, en utilisant notamment la suite spectrale de Browder-Bockstein, transformer les suites spectrales en algorithmes ; mais la validité du résultat ne serait accessible qu'aux super-experts en algorithmique et de plus les méthodes ainsi obtenues seraient encore bien moins utilisables concrètement que celle d'Edgar Brown pour les groupes d'homotopie ! On laisse donc définitivement dormir cette idée.

Les deux autres solutions au problème MATH, celles qu'on a baptisées RSH et RSG vont consister justement à transformer suites exactes et suites spectrales en *véritables* outils de calcul, par des méthodes telles que :

– La validité théorique est incontestable, au moins pour ceux qui disposent d'un background raisonnable en informatique théorique ;

– Un espace de travail pour des applications concrètes est ouvert.

Si ceci est réalisé, une solution digne d'intérêt pour le problème MATH résulte alors des méthodes usuelles de topologie algébrique. C'est le cœur des solutions RSH et RSG.

5. Les solutions RSH et RSG

La solution RSH [14] est due à Rolf Schön. Le principe général de la solution RSG[27] est dû au présent auteur [18], mais sa forme définitive, très supérieure, résulte

[24] Et simplement connexes, sans quoi on bute inévitablement sur les résultats de non-calculabilité de Novikov et Rabin. On ne précisera plus ce point.

[25] Soixante ans après Hilbert, Ackermann, Gödel, Church et Turing ! Sans commentaire.

[26] C'est pourquoi tant de « résultats » de topologie algébrique sont en fait *illusionnistes*.

[27] La coïncidence RS = Rolf Schön = Rubio-Sergeraert nous impose de compléter l'acronyme par l'indication géographique H pour Heidelberg ou G pour Grenoble.

d'un travail commun avec Julio Rubio [13], travail qui a mené non seulement à une solution théorique *remarquablement simple* du problème MATH, mais aussi, grâce justement à sa simplicité, à une utilisation *concrète* des résultats ainsi obtenus pour un programme logiciel assez vaste, voir [6].

5.1. La solution RSH

Il faut à nouveau considérer l'équivalence de chaînes fondamentale :

$$C_*(K) \overset{\varepsilon}{\Longleftrightarrow} C_*^m(K)$$

Le complexe de gauche contient « tout » mais n'est pas de type fini, il est donc inutilisable sur machine ; le complexe de droite est au contraire de type fini, mais l'essentiel de l'information contenue dans le complexe de gauche y est perdu. Schön construit un système inductif de complexes de type fini $\{[C_*]_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ où $\lim_{k\to\infty}[C_*]_k = C_*(K)$. Il réussit à organiser tout ça de telle façon que :

– Grâce aux méthodes de programmation fonctionnelle, ce système inductif est installable et utilisable sur machine.

– La propriété à la limite de son système inductif implique qu'il *contient* le type d'homotopie de l'espace sous-jacent K.

La solution du problème MATH de Schön est donc :

$$HT_{RSH} = \{[C_*]_k\}_{k\in\mathbb{N}}.$$

C'est une systématisation très ingénieuse de la méthode d'Edgar Brown pour le calcul des groupes d'homotopie [3]. Le cadre de travail beaucoup plus conceptuel retire *a priori* l'objection de complexité énoncée par Edgar Brown lui-même contre sa méthode. Rolf Schön parvient en particulier à obtenir des versions effectives des suites spectrales classiques, Serre et Eilenberg-Moore, pour ces objets. Il démontre très complètement pourquoi il a bien ainsi obtenu une solution du problème MATH. Il est fort dommage qu'aucun travail concret n'ait été envisagé autour de la solution de Rolf Schön : le contexte algorithmique est exceptionnellement intéressant et d'une grande nouveauté ; quel que soit le résultat final sur l'efficacité des algorithmes obtenus, la méthode de Schön *doit absolument* être implémentée, notamment pour l'intérêt propre des algorithmes qui doivent y être développés.

5.2. Programmation fonctionnelle

Les méthodes de programmation fonctionnelle jouent un rôle essentiel dans la solution RSH. De quoi s'agit-il ? Le cœur du système inductif $\{[C_*]_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de Schön est $\boxed{\text{un}}$ *algorithme* S, objet machine fixe, tel que, si on passe à cet algorithme un entier *quelconque* k, par exemple 7, alors S *construit* dynamiquement l'objet $S(7) = [C_*]_7$, la 7e approximation de type fini du gros complexe $C_*(K)$; l'objet machine $S(7)$ est à son tour un paquet d'algorithmes capables de répondre à des questions comme :

– Quelle est la base distinguée de $[C_4]_7$?
– Quel est le bord du générateur n° 5 de $[C_4]_7$?
– Quelle est la face[28] n° 3 du même générateur ?

[28] Les $[C_*]_k$ sont en fait des sous-complexes *simpliciaux* de $C_*(K)$; la réponse est triviale pour un complexe simplicial, mais essentielle dans le cadre plus général des *ensembles* simpliciaux.

Pour un calcul particulier, comme par exemple celui du groupe d'homotopie [29] $ß_6.S^3/$, il n'y aura en définitive qu'un nombre fini de questions de cette sorte à poser, ne faisant intervenir qu'un nombre fini d'approximations de type fini de « gros » complexes. Les suites spectrales en jeu sont bien cette fois des *algorithmes* de calcul. Le problème MATH est résolu, avec beaucoup d'élégance.

On voit que les méthodes de programmation fonctionnelle permettent à Schön de « s'approcher » arbitrairement près du gros complexe $C_*.K/$, obtenant ainsi les informations nécessaires pour déterminer *le* type d'homotopie du complexe K sous-jacent. Ce qui lui a permis en particulier de se dispenser des structures effroyablement compliquées à base d'opérades qui étaient nécessaires pour la solution JS.

5.3. Version **localement effective** *de* $C_*.K/$

La troisième solution, la solution RSG, tire le meilleur parti de l'outil *fonctionnel*, au sens des algorithmiciens. Contrairement à ce qui a été affirmé à plusieurs reprises, bien qu'il ne soit pas de type fini, le complexe $C_*.K/$ est parfaitement installable sur machine ! Sous une forme affaiblie qui est le sujet principal de ce texte, sous la forme que nous appelons *localement effective*.

La non finitude très fréquente de $C_*.K/$ interdit définitivement l'installation *complète*, au sens $\mathfrak{LC}$, de ce complexe sur machine. Mais un type de *semi*-installation reste disponible, qu'on appelle un codage *localement effectif* : c'est un couple $.Ø;@/$ d'algorithmes vérifiant les propriétés suivantes :

– La première composante $Ø$ (fonction caractéristique) est un algorithme

$$Ø : \mathcal{U} \times \mathbb{N} \to \textbf{Bool}:$$

L'ensemble $\mathcal{U}$ (univers) est l'ensemble, dénombrable, de *tous* les objets machine. L'algorithme $Ø$ répond le booléen $\top$ (vrai) pour la donnée $.a;n/$ si et seulement si l'objet machine a est un générateur (simplexe) de $C_n.K/$.

– La deuxième composante $@$ (opérateur de face) est un algorithme :

$$@ : \mathcal{U} \mathbin{\tilde{\times}} \mathbb{N} \mathbin{\tilde{\times}} \mathbb{N} \to \mathcal{U}:$$

Un triplet $.œ;n;i/$ est acceptable par cet algorithme seulement si $Ø.œ;n/ = \top$, auquel cas $œ$ est donc un n-simplexe de K et notre algorithme $@$ doit retourner la i-ème face[30] ; la composante i doit donc à son tour vérifier $0 \leqslant i \leqslant n$.

C'est cet objet $✠K = [C_*.K/]_{LE} = .Ø;@/$, si original dans notre paysage, qui justifie le titre science-fiction de ce texte. L'indice « LE » doit être lu « version localement effective de… ». Il est nécessaire de connaître ici un peu de « vraie » logique pour comprendre les points suivants :

– L'objet $✠K$ est un *terme* $\mathfrak{ZF}$ (voir [2]). C'est en particulier une chaîne de caractères *finie*, même si K est « très » infini.

– Du point de vue $\mathfrak{ZF}$, l'objet $✠K$ est une définition *complète* du complexe simplicial K ; « rien » n'y est oublié.

---

[29] Groupe un peu fétiche : c'est le premier qui résista à Serre dans sa thèse : un problème d'extension en fin de course ne lui permettait pas de choisir entre $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6$ et $\mathbb{Z}_{12}$.

[30] Les connaisseurs notent qu'on a surtout codé la structure *simpliciale* de K, le complexe de chaînes $C_*.K/$ étant à considérer comme un sous-produit. Il est classique qu'avec le complexe de chaînes *seul*, on a déjà perdu le type d'homotopie !

– Le théorème de Post [5] implique que, dans $\mathfrak{LC}$, l'objet $\maltese K$ *n'est pas* une définition du complexe simplicial K ; par exemple aucun algorithme de portée générale ne peut déterminer si le complexe K sous-jacent est vide ou non. En particulier aucun algorithme de portée générale ne peut déterminer les groupes d'homologie de K.

L'objet $\maltese K$ est donc un oracle, comme adorent dire les informaticiens, qui sait répondre à *certaines* questions au sujet de K, seulement celles qui sont de nature *locale*. L'objet $\maltese K$ veut bien vous dire si tel « candidat » simplexe est effectivement un simplexe de K ; si oui, il veut bien vous donner ses faces ; par contre l'oracle $\maltese K$ est incapable de vous dire si K est vide, connexe, simplement connexe, etc. Alors que du point de vue $\mathfrak{ZF}$, les groupes $H_n(\maltese K)$, $\pi_n(\maltese K)$, $\ldots$, sont parfaitement définis ! Ce sont d'ailleurs ces groupes qui vous intéressent mais ils ne sont pas $\mathfrak{LC}$-déductibles de cet objet !

L'analogie avec l'oracle qui définit le problème « $P \neq NP$? » (voir encore [5]) est flagrante. Un algorithme de complexité NP ne sait pas trouver rapidement une solution à votre problème ; par contre si vous avez une solution à proposer, il sait vous dire « tout de suite » si votre solution est correcte. Un oracle NP n'est donc rien d'autre qu'un codage *localement* effectif *efficace* de l'ensemble des solutions du problème, mais il est incapable de vous dire en temps polynômial si cet ensemble de solutions est vide ou non !

Noter que l'oracle du problème P-NP ne sert pratiquement à rien, au moins du point de vue théorique, sinon à énoncer un superbe problème [31]. Le point le plus original dans notre situation est donc le fait qu'au contraire l'oracle $\maltese K$ joue chez nous un rôle *essentiel* : il va être la clé d'une solution efficace du problème MATH, ou, si on préfère, une extension *entière* de la théorie de Sullivan [25]. De plus notre oracle $\maltese K$ ne sait répondre que localement, mais il est pourtant exactement ce qu'il faut ajouter au complexe minimal $C^m_*(K)$ pour une description *complète* du type d'homotopie de K, notion *globale*[32].

Cette situation si originale, si voisine du problème P-NP, devrait normalement intéresser les chasseurs de prime Clay.

5.4. La solution RSG

L'objet $\maltese K$ est la composante clé de la solution RSG du problème MATH. Il suffit en effet d'adopter comme modèle algébrique du type d'homotopie de K l'équivalence d'homotopie :

$$HT_{RSG} = [\maltese K \overset{\text{”}}{\Longleftrightarrow} C^m_*(K)]:$$

Le cahier des charges est satisfait. Ce modèle $HT_{RSG}(K)$ est installable[33] sur machine et un *algorithme* permet de décider l'égalité de $HT_{RSG}(K)$ et $HT_{RSG}(L)$. Il suffit le cas échéant de suivre par exemple le plan de calcul de Schön : les suites spectrales de la topologie algébrique deviennent en effet, si on les applique à de tels objets, des *algorithmes* de calcul des objets images, espace total ou fibre ou base d'une fibration. L'essentiel du travail en la matière avait été fait il y a bien longtemps par Shih Weishu [21] pour la suite spectrale de Serre, puis Julio Rubio (voir [17]) a obtenu le même

[31] Du point de vue pratique, un vérificateur de mot de passe est presque toujours un tel oracle.

[32] L'analogie avec la solution *fonctionnelle* de Laurent Schwartz pour modéliser les distributions est elle aussi flagrante : une distribution est un *oracle* qui répond à des questions sur les fonctions C^∞ à support compact, seule possibilité pour « implémenter » un objet si nébuleux.

[33] Mieux : il est *installé* [6].

résultat pour la suite spectrale d'Eilenberg-Moore, sensiblement plus complexe. Une solution remarquablement simple du problème MATH est ainsi obtenue.

5.5. Constructions topologiques

Soit 8 un endofoncteur de la topologie, par exemple le foncteur de Serre « espace de lacets » ¨ ; il fait correspondre au complexe simplicial K l'espace fonctionnel[34] ¨K des applications continues du cercle S^1 dans K. Il se trouve que ¨K est « moralement » l'*inverse* de K, c'est dire son intérêt. Comment déduire $H\,T_{RSG}.$¨K/ de $H\,T_{RSG}.K/$:

$$[✠K \overset{”K}{\Longleftrightarrow} C^{m}_{*}.K/] \overset{???}{\Longrightarrow} [✠¨K \overset{”¨K}{\Longleftrightarrow} C^{m}_{*}.¨K/]$$

Il est classique que $C^{m}_{*}.K/$ *ne détermine pas* $C^{m}_{*}.$¨K/, par exemple $C^{m}_{*}.S^2 \vee S^4/ = C^{m}_{*}.P^2\mathbb{C}/$, alors que $C^{m}_{2}.$¨ $.S^2 \vee S^4// = \mathbb{Z}$ et $C^{m}_{2}.$¨ $P^2\mathbb{C}/ = 0$. C'est *exactement* là l'origine des travaux des Sisyphes évoqués Section 3.3.

Par contre ✠K détermine ✠¨K, plus précisément $\mathfrak{LC}$-détermine, et ce grâce au travail de Kan évoqué en note. On a déjà vu que ✠K ne $\mathfrak{LC}$-détermine pas $C^{m}_{*}.K/$ et en particulier ✠¨K ne $\mathfrak{LC}$-détermine pas $C^{m}_{*}.$¨K/. Le couple .✠K; $C^{m}_{*}.K//$ ne $\mathfrak{LC}$-détermine pas non plus $C^{m}_{*}.$¨K/, par contre l'objet *complet* $H\,T_{RSG}.K/ = [✠K \overset{”K}{\Longleftrightarrow} C^{m}_{*}.K/]$ lui $\mathfrak{LC}$-détermine $H\,T_{RSG}.$¨K $/ = [✠¨K \overset{”¨K}{\Longleftrightarrow} C^{m}_{*}.$¨K /] : le cordon ombilical ”K est absolument indispensable. Moyennant quoi, par banale récurrence, on déduit notre solution pour l'itération de la construction Cobar d'Adams, si simple qu'il n'a pas été difficile de la programmer sur machine ; solution à l'origine des aventures épiques de Carlsson évoquées en fin d'article.

6. De l'accueil de la solution RSG par la profession

Le résultat obtenu trouble toujours les témoins, preuve s'il en fallait une de son extrême nouveauté. La nature si étrange de l'objet ✠K indique que l'essentiel de notre solution n'est pas du tout dans la topologie algébrique, mais dans les possibilités si méconnues de la programmation fonctionnelle[35], situation elle aussi très nouvelle, qui plonge les « commentateurs » dans des abîmes de perplexité, au moins ceux que les circonstances contraignent à opiner. Ils se répartissent grossièrement en deux classes *contradictoires*, dont nous avons par chance deux beaux exemples prototypes *écrits*, un pour chacune d'elles.

Les algorithmes obtenus sont si puissants, y compris pour des calculs concrets, que beaucoup cherchent avec opiniâtreté où pourrait se cacher un bug *théorique* dans cette solution si simple du problème MATH. La correction des résultats concrets obtenus, au moins de ceux qui sont vérifiables par d'autres moyens, apparemment ne suffit pas pour ce faire. L'un des épisodes les plus savoureux en la matière est le « rapport » de referee [15] où le dit referee n'hésite pas à conclure : « The algorithmic claim is a joke », alors que l'article proposé donnait toutes les indications nécessaires pour que

---

[34] En fait une version simpliciale de l'espace ¨K, possible grâce au superbe travail de Kan [10] des années 50, travail qui trouve ainsi soudain tout son intérêt.

[35] Un autre beau succès de la programmation fonctionnelle est le théorème d'incomplétude de Gödel : la numérotation des objets mathématiques n'est autre en effet qu'un *logiciel* de programmation fonctionnelle permettant aux relations de travailler éventuellement sur elles-mêmes, puis de rencontrer l'obstacle diagonal de Cantor. C'est pourquoi la démonstration de Church basée sur le ˘-calcul est si simple.

le lecteur puisse essayer lui-même, sur la machine de son choix, les... algorithmes résultats. Article proposé à une revue « computationale » par l'intermédiaire de l'un des membres de son Comité de Rédaction, topologue médaille Fields en pleine activité.

L'autre classe de témoins est pathologique ; elle est moins fournie[36] mais déshonore la profession. Ces témoins-là décident que notre résultat est sans intérêt, et/ou trivial, ou encore, œuvre d'une autre médaille Fields dans un contexte très officiel, qu'il n'y a pas de résultat du tout. Dans le même registre, un autre referee, l'un des meilleurs topologues de ces trente dernières années, sollicité par une revue mathématique top-niveau, ajoute que de toute façon si les algorithmes obtenus ne sont pas à temps polynômial, ils ne peuvent avoir d'intérêt [16]. Ce qui, dans le contexte auquel il pense, équivaut à exiger une démonstration de P = NP. Alors qu'en fait nos algorithmes sont bien à temps polynômial par rapport à l'énoncé approprié.

On a déjà expliqué que Hilbert, Ackermann, Gödel, Church et Turing avaient fait l'essentiel de leur travail il y a plus de soixante ans. Messieurs les topologues, vous êtes à l'origine de certaines des plus belles réussites mathématiques depuis cinquante ans ; félicitations, très sincères. Mais il est peut-être temps néanmoins de reconsidérer un peu votre discipline à la lumière du travail des autres mathématiciens, sinon l'académisme vous menace. Ou quelquefois le ridicule.

Corollaire immédiat de cette situation, la solution $H\,T_{RSG}$, sous la forme définitive obtenue dans la thèse de Julio Rubio (résumée en [17]), n'est toujours pas *publiée*. Cette thèse a été soutenue en Octobre 1991. Compte tenu des nombreux échecs essuyés dont vous n'avez là qu'un tout petit échantillon, nous avons décidé d'inverser le problème et d'attendre[37] les propositions des revues qui seraient intéressées.

7. Le logiciel Kenzo.

Il a déjà été expliqué que les solutions JS et RSH du problème MATH n'ont pas jusqu'à présent donné de résultats concrets, contrairement à la solution RSG.

Cette dernière s'est concrétisée en un premier logiciel, baptisé EAT (Effective Algebraic Topology) ; écrit en 89-90, il permettait déjà des calculs qui ont mis en échec les meilleurs topologues. Une version de portée beaucoup plus large a été récemment entièrement réécrite, baptisée Kenzo[38], voir [6] : 16.000 lignes Lisp écrites dans un travail commun avec Xavier Dousson [7]. Le but défi qui nous était constamment opposé, de façon assez puérile[39], à savoir le calcul des premiers groupes d'homotopie de complexes simpliciaux *arbitraires*[40], est atteint. Dans ce registre, notre solution au problème MATH donne immédiatement comme sous-produit une solution simple et naturelle au problème *théorique* de la calculabilité des groupes d'homotopie, à comparer avec les démonstrations si complexes d'Edgar Brown [3] et Rolf Schön [14].

De plus, contrairement à la première solution, elle est utilisable pour des problèmes concrets. Par exemple le groupe ß$_6$.S^3/ est calculé par Kenzo en 2 minutes avec un PC du supermarché ; le calcul met en jeu 53 objets ✠K pour divers complexes K

36 Elle s'est enrichie récemment d'un « expert », anonyme, qui a mis fin à la PEDR de l'auteur.

37 L'auteur tient à la disposition de qui le souhaite la procédure très raisonnable imaginée en ce sens.

38 Nom du chat de l'auteur : cat = Constructive Algebraic Topology.

39 Il faudrait pour bien faire une version effective *entière* de la suite spectrale d'Adams, qui reste à déterminer, un bien beau sujet à attaquer à la lumière des travaux de Smirnov.

40 Un tel programme ne calculera jamais de nouveaux groupes d'homotopie de *sphères*, de même qu'aucun programme de factorisation d'entiers *quelconques* ne trouvera de nouveaux nombres de Mersenne premiers.

appropriés. Un nombre fini, quelques dizaines de milliers, de questions *locales* sont posées à ces objets, et ces réponses suffisent à déterminer la solution $ß_6.S^3/ = \mathbb{Z}_{12}$. Voir un autre exemple de calcul de groupe d'homotopie dans la démo-web accessible par [6]. Voir aussi à ce sujet l'article de Fred Cohen suscité par notre travail, accessible pas le même chemin.

Le groupe $ß_6.S^3/$ est maintenant le b-a-ba des topologues, mais si on continue d'examiner les calculs possibles sous Kenzo, on trouve très vite des calculs « connus » depuis longtemps des dits topologues, à ceci près que si on les met en demeure de les exécuter, d'une part on trouve bien peu de partants, et d'autre part l'expérience montre qu'il leur arrive d'échouer. Par exemple le calcul de $H_5.\ddot{\ }^3.\mathrm{Moore}.\mathbb{Z}_2;4///$ est *en principe* une conséquence d'un résultat très ancien (1966) de Milgram [41]. Deux éminents collègues s'y sont essayés, avec des méthodes complètement différentes. Le premier a proposé successivement deux résultats qui étaient tous les deux incorrects. Le second a fini par constater qu'il ne savait pas appliquer la suite spectrale de Bockstein nécessaire pour terminer son calcul. Exemple de résultat illusionniste. Malgré cette infortune, ces collègues ont eu au moins le mérite d'essayer, bravo et merci ; le lecteur aura compris qu'on préfère gentiment ne pas expliquer ce qu'il faut penser des autres. Le programme Kenzo trouve le résultat en 70 secondes, après avoir construit en 60 *milli*secondes 59 objets ✠K, prouesses de la programmation fonctionnelle sous Common Lisp : ces objets « du 3e type » sont aussi banals dans l'environnement ad hoc que le prix du kilo de tomates dans la balance électronique du super-marché.

Puis viennent les calculs où aucune « méthode », *même théorique*, n'est connue à ce jour pour en venir à bout, à l'exception bien sûr des solutions JS et RSH, équivalentes à la nôtre sur le plan théorique. L'exemple suivant cumule des « difficultés » classiques :

$$H_5.\ddot{\ }.\ddot{\ }^2.P^{\infty}\mathbb{R}=P^3\mathbb{R}/\cup_2 D^3/;\mathbb{Z}/ = ???$$

Le programme Kenzo détermine ce groupe en un peu moins d'une heure, avec l'aide de 55 objets ✠K. Exemple de résultat non-illusionniste.

Un topologue peut trouver cet exemple artificiel ? Il a tort. On sait depuis Serre que le calcul des groupes d'homologie des espaces de lacets itérés permet de « tout » faire, d'où l'intérêt qui leur est accordé. C'est ainsi que dans un article de 1995 [4, p. 545], Carlsson et Milgram expliquent exactement quel est le point où la théorie actuelle est en échec à ce propos, au moins ce qu'ils en connaissent. Soit X un CW-complexe de type fini 3-réduit *qui n'est pas* une suspension ; il se trouve que l'exemple le plus simple est notre quotient $P^{\infty}\mathbb{R}=P^3\mathbb{R}$. Il résulte du travail de Serre [20] qu'il « existe » (attention, dans $\mathfrak{ZF}$) un CW-complexe de type fini Y dont le type d'homotopie est celui de $\ddot{\ }^3X$; Carlsson et Milgram expliquent comment un autre travail d'Adams permet de déterminer un nombre suffisant de cellules pour la construction de Y, puis ils font état de difficultés *sévères*, sic, pour déterminer les matrices de bord correspondantes. En langage de mathématicien, on dit que la $\mathfrak{LC}$-existence de ces matrices est un problème *ouvert* ou, de façon moins pédante, qu'on ne connaît pas d'algorithme les produisant. L'exemple le plus simple en la matière est la détermination des matrices de bord du complexe Cobar *itéré* d'Adams de $\ddot{\ }^3.P^{\infty}\mathbb{R}=P^3\mathbb{R}/$. Le programme Kenzo détermine en 35 secondes la matrice de bord du dit complexe entre les dimensions 5 et 4, matrice à 13 lignes et 33 colonnes dont les termes varient de -4 à +6, ce qui, pour ceux qui savent ce que ceci implique, décrit une géométrie absolument hallucinante

41 Voir l'article synthèse [4].

du modèle dont Serre et Adams savaient démontrer la $\mathfrak{ZF}$-existence. Kenzo sait donc résoudre avec ses modestes moyens le problème « sévère » de Carlsson et Milgram.

Il est amusant dans ces conditions de rapporter que l'article [18] contient l'essentiel de la solution. Avant d'être accueilli par les Advances en 1990, cet article avait été proposé en 1989 aux Annals of Mathematics, par l'intermédiaire de… Gunnar Carlsson, alors membre de son Comité de Rédaction. L'article avait été refusé sans lecture, puisque, selon la réponse qui avait été retournée, il n'intéressait pas un large lectorat (*broad readership*, sic). Si cet article n'avait eu qu'un seul lecteur, Carlsson, il aurait au moins évité à ce dernier d'énoncer comme ouvert[42], en 1995, dans le texte de référence sur la spécialité, un problème majeur résolu en fait depuis plusieurs années, et de façon très simple [18, Theorem 10.3]. Il aurait en outre appris comment l'énoncer correctement.

Références

[1] Hans J. Baues. *Homotopy types*. in [9], pp 1-72.

[2] N. Bourbaki. *Théorie des Ensembles, chap. 1 et 2*. Hermann, 1960.

[3] Edgar H. Brown Jr.. *Finite computability of Postnikov complexes.* Annals of Mathematics, 1957, vol. 65, pp 1-20.

[4] Gunnar Carlsson and R. James Milgram. *Stable homotopy and iterated loop spaces*. in [9], pp 505-583.

[5] Patrick Dehornoy, *Complexité et décidabilité.* Springer, 1993.

[6] Xavier Dousson, Julio Rubio, Francis Sergeraert et Yvon Siret. *The Kenzo program*. www-fourier.ujf-grenoble.fr/~sergerar/Kenzo/

[7] Xavier Dousson. *Un programme pour le calcul des groupes d'homotopie*. Thèse Institut Fourier, 1999, Grenoble.

[8] Samuel Eilenberg and Norman Steenrod. *Foundations of Algebraic Topology*. Princeton University Press, 1952.

[9] *Handbook of Algebraic Topology* (Edited by I.M. James). North-Holland (1995).

[10] Daniel M. Kan. *A combinatorial definition of homotopy groups*. Annals of Mathematics. 1958, vol. 67, pp 282-312.

[11] J. Peter May. *Simplicial objects in algebraic topology*. Van Nostrand, 1967.

[12] John McCleary. *User's guide to spectral sequences.* Publish or Perish, Wilmington DE, 1985.

[13] Julio Rubio, Francis Sergeraert. *Constructive Algebraic Topology*. En préparation, voir www-fourier.ujf-grenoble.fr/~sergerar.

[14] Rolf Schön. *Effective algebraic topology*. Memoirs of the American Mathematical Society, 1991, vol. 451.

[15] www-fourier.ujf-grenoble.fr/~sergerar/Papers/dcg-report.html

[16] www-fourier.ujf-grenoble.fr/~sergerar/Papers/asens-report.html

[17] www-fourier.ujf-grenoble.fr/~sergerar/Papers/survey.ps

[18] Francis Sergeraert. *The computability problem in algebraic topology*. Advances in Mathematics, 1994, vol. 104, pp 1-29.

[19] Francis Sergeraert. *Constructive Algebraic Topology*. Exposé aux Rencontres EACA, Tenerife, Septembre 1999.
www-fourier.ujf-grenoble.fr/~sergerar/Papers/tenerife.ps

[20] Jean-Pierre Serre. *Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens*. Annals of Mathematics, 1953, vol. 58, pp. 258-294.

[21] Weishu Shih. *Homologie des espaces fibrés*. Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., 1962, vol. 13.

[22] V.A. Smirnov. *On the chain complex of an iterated loop space*. Mathematics of the USSR, Izvestiya, 1990, vol. 35, pp 445-455.

[23] V.A. Smirnov. *The homology of iterated loop spaces.*
www-fourier.ujf-grenoble.fr/~sergerar/Kenzo/smirnov-s.ps

[24] Justin R. Smith. *m-structures determine integral homotopy type.*
vorpal.mcs.drexel.edu/research/m-homotop.pdf.

[42] Pardon, *sévère*.

[25] Dennis Sullivan. *Infinitesimal calculations in topology*. Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., 1977, vol. 47, pp 269-331.