

LIVRES

Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation

F. ROUVIÈRE

Cassini, 1999

Que la modestie du titre de ce livre ne l'empêche pas de trouver tout son public, étudiants de second cycle universitaire et agrégatifs, certes, mais peut-être surtout mathématiciens ayant vocation à enseigner le calcul différentiel, voire auteurs de livres consacrés à cette discipline. De même que beaucoup de lycéens détestent la géométrie parce que leurs enseignants, ne l'aimant pas, ne peuvent la leur faire apprécier, beaucoup de nos étudiants haïssent le calcul différentiel parce que nous le leur enseignons mal. Les énoncés sont délicats, à la limite du pénible, les démonstrations sont parfois si techniques qu'on n'y trouve pas d'idée à suivre, nous ne faisons pas de figures et n'avons « pas le temps » (?) de développer des exemples intéressants.

Il suffit de feuilleter un livre de « calcul » différentiel pris au hasard pour s'assurer de la réalité de ce constat. Il n'est même pas nécessaire de dénoncer qui que ce soit. La présentation absconse est la règle. Un exemple vraiment pris au hasard : dans un livre paru en 1997, le chapitre sur les fonctions implicites, pire encore, le chapitre sur les équations différentielles sans une seule figure¹. . . Une exception notable est le cours de Laudenbach à l'École polytechnique [4], dont la diffusion est malheureusement plus confidentielle. On aura compris que le « petit guide » de Rouvière est un livre qui veut faire aimer et comprendre le calcul différentiel à ses lecteurs. Je crois que c'est très réussi. à vrai dire, j'aimais déjà le calcul différentiel avant de lire le livre, aussi je l'ai testé (le livre. . .) sur mes étudiants (agrégatifs). Ils en sont enchantés. L'idée de Rouvière est simplissime :

- (1) il y a une Grande Idée (je cite) du calcul différentiel : les objets d'étude se laissent approcher par des objets linéaires (et l'algèbre linéaire, c'est facile!),
- (2) heuristique : ce qui marche en linéaire marche aussi, localement, en différentiel (les bienfaits de l'algèbre linéaire) — même si la réalisation technique peut être délicate (c'est le mot « localement » qui se traduit par tous ces voisinages qu'il va falloir rétrécir, tous ces points de suspension qu'on va devoir remplacer par d'authentiques epsilons, des petits o, voire des grands O. . .),
- (3) tous les énoncés sont, donc, compréhensibles (c'est-à-dire qu'on peut les comprendre) et susceptibles d'illustration ; ces résultats, obtenus parfois avec peine, sont utiles. Ils ont des applications, classiques ou non, mais nombreuses : fonctions holomorphes, géométrie différentielle, racines des polynômes, résolution d'équations (à l'aide de la dérivée d'une fonction implicite, toujours laborieusement calculée, rarement utilisée), billards, calcul des variations, points fixes, lemme de Morse, extremums. . .

Suivant cette idée simplissime, le livre est composé d'un texte explicatif, souvent heuristique, toujours très clair et intelligible, toujours accompagné de références précises, de cent quatre vingt huit figures et de cent vingt neuf illustrations baptisées exercices et allant de la plus « bête » application des définitions à des résultats plus élaborés, en général accompagnés de commentaires les replaçant dans leur contexte mathématique naturel.

¹ Il y a pourtant d'excellents livres abondamment illustrés sur les équations différentielles, notamment [1], [2] et [3].

J'insiste sur la présence des figures, visant, dixit Rouvière, à créer une sournoise accoutumance. Quelle honte y a-t-il en effet, à dessiner l'inégalité triangulaire ? Combien parmi les lecteurs de cette critique ont-ils déjà dessiné le développement en série entière de e^{ix} avec x réel (pour ma part, j'ai découvert cette figure avec un ravissement indescriptible).

Bref, le livre est utile. En plus, il est bien écrit, drôle (la citation de Bergson sur la différenciation des fonctions est particulièrement bien venue) et souvent passionnant, un vrai plaisir, la typographie est très soignée (peu de fautes de frappe) et les croquis bien réalisés.

Une petite critique pour finir : que l'auteur préfère les ovales aux ellipses, c'est son droit. . . Mais est-il bien raisonnable de vouloir faire prendre à ses lecteurs des œufs pour des quadratiques (page 268) : il me semble que le groupe d'isométries d'un œuf est le cercle S^1 , alors que celui d'une quadratique est beaucoup plus petit si elle n'est pas de révolution et un peu plus gros si elle l'est.

[1] M. Artigue, V. Gautheron, Systèmes différentiels, étude graphique, Cedic/Nathan, 1983.

[2] J.-P. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles, Presses Universitaires de Grenoble, 1996.

[3] J. Hubbard, B. West, équations différentielles et systèmes dynamiques, traduit de l'anglais et adapté par V. Gautheron, Cassini, 1999.

[4] F. Laudenbach, Calcul différentiel et intégral, École polytechnique, 1997.

M. Audin, Université Louis Pasteur, Strasbourg

Real Submanifolds in Complex Space and Their Mappings

M.S. BAOUENDI, P. EBENFELT, L.P. ROTHSCHILD

Princeton Mathematical Series, 47, 1999

1. La classification des domaines et des sous-variétés réelles de \mathbf{C}^n à isomorphisme près (ici, isomorphisme veut dire transformation holomorphe inversible) est étudiée depuis un siècle, mais le sujet a beaucoup évolué depuis 1970. Cette évolution est encore rapide et il n'existe pas de livre qui fasse le bilan des progrès accomplis.

Sans combler ce vide, l'ouvrage de Baouendi, Ebenfelt et Rothschild présente, de façon ordonnée et cohérente, une partie de la théorie, surtout les résultats obtenus depuis 1983 par les auteurs et leurs collaborateurs. Il contient aussi une introduction aux fonctions « CR », qu'on peut lire indépendamment du reste de l'ouvrage, mais les derniers chapitres, consacrés aux transformations, en constituent, je crois, le but et l'aboutissement. C'est surtout ceux-là que je vais tenter de présenter.

2. Il peut être utile de faire quelques rappels historiques. En dimension 1, le problème de la classification est résolu par le théorème d'uniformisation de Riemann. En particulier, si $D, D' \subset \mathbf{C}$ sont deux domaines bornés simplement connexes, il existe un isomorphisme $h : D \rightarrow D'$. On sait aussi que $h \in C^\infty(\overline{D})$ si D et D' sont à bord de classe C^∞ (Painlevé), et que h se prolonge holomorphiquement au voisinage de \overline{D} si D et D' sont à bord analytique (Schwarz).

En dimension $n \geq 2$, le problème est infiniment plus compliqué. En 1907, Poincaré montrait que la boule unité de \mathbf{C}^2 et le bi-disque $\Delta \times \Delta \subset \mathbf{C}^2$, qui sont homéomorphes, ne sont pas isomorphes ; il montrait aussi qu'un germe analytique d'hypersurface réelle dans \mathbf{C}^2 possède une infinité d'invariants holomorphes. Autrement dit, les hypersurfaces réelles de \mathbf{C}^n sont « rigides » en dimension $n \geq 2$; l'existence d'un isomorphisme entre deux domaines, ou entre deux hypersurfaces est exceptionnelle.

Longtemps, on n'a guère su traiter que des exemples, et on considère généralement que le progrès décisif est la généralisation suivante du théorème de Painlevé à une large classe de domaines de \mathbf{C}^n :

Théorème (FEFFERMAN 1974) *Soit $D, D' \subset \mathbf{C}^n$ deux domaines bornés à bord de classe C^∞ , et $h : D \rightarrow D'$ un isomorphisme.*

Si D et D' sont strictement pseudoconvexes, h se prolonge en un C^∞ -difféomorphisme $\overline{D} \rightarrow \overline{D}'$.

En particulier, h conserve les invariants locaux des bords, qui sont bien compris (Chern-Moser (1974)). La démonstration de Fefferman est très difficile, mais d'autres ont été trouvées, plus simples et d'une portée plus générale, par Bell-Ligočka (1980), Nirenberg-Webster-Yang (1980), Pinchuk-Khasanov (1987). La régularité au bord des applications propres $h : D \rightarrow D'$ d'un domaine faiblement pseudoconvexe sur un autre a été étudiée (Bell, Catlin, Diederich, Fornæss ...) et établie dans de nombreux cas.

Les deux résultats suivants des années (1970) sont plus directement liés à l'ouvrage qui nous occupe. Ils concernent le problème local mais, compte-tenu du théorème ci-dessus, ils ont des conséquences globales évidentes.

Soit M, M' , deux germes d'hypersurfaces réelles analytiques en $0 \in \mathbf{C}^n$, $n \geq 2$, et $h : M \rightarrow M'$ un germe de difféomorphisme de classe C^1 , vérifiant les équations de Cauchy-Riemann induites sur M .

Théorème *Si de plus M et M' sont strictement pseudoconvexes, on a :*

(A) (PINCHUK 1975, LEWY 1977) *h se prolonge holomorphiquement au voisinage de $0 \in \mathbf{C}^n$.*

(B) (WEBSTER 1977) *Si M et M' sont algébriques réelles, h est algébrique.*

La propriété (A) généralise le théorème de Schwarz. La propriété (B), sans analogue en dimension 1, témoigne de la rigidité des hypersurfaces en dimension $n \geq 2$. La démonstration qu'en donne Webster est magnifique et n'occupe que quelques pages. Alors que la réflexion de Schwarz par rapport à une courbe analytique dans \mathbf{C} est une involution antiholomorphe de lieu fixe cette courbe, en dimension supérieure, le reflet d'un point par rapport à une hypersurface réelle analytique est une hypersurface complexe, dite variété de Segre. La démonstration de Webster est basée sur la considération de ces variétés ; cette idée s'est révélée très féconde.

3. Les travaux, dont le livre qui nous occupe dresse un bilan, constituent une vaste généralisation des théorèmes (A) et (B) ci-dessus. Le problème de la régularité C^∞ au bord n'est pas abordé, même si le théorème de Fefferman et certaines de ses généralisations sont énoncés (sans démonstration) pour mettre en perspective quelques-uns des résultats obtenus. Pour un compte-rendu généraliste de la période 1970–1990, on peut consulter le « survey » de Forstnerič, *Proper holomorphic mappings : a survey (MR 94a :32042)*.

La raison en est que les méthodes mises en œuvre pour prouver la régularité C^∞ appartiennent plutôt à « l'analyse complexe dure », tandis que le passage de la régularité C^∞ à la régularité analytique fait intervenir et ce de plus en plus, des outils d'algèbre et de géométrie analytique locale.

Les auteurs étudient la régularité analytique (et aussi algébrique) des transformations $h : M \rightarrow M'$ dans un cadre général ; M et M' sont des sous-variétés réelles analytiques de \mathbf{C}^n , de codimension quelconque, h une application de classe C^∞ qui vérifie les équations de Cauchy-Riemann induites sur M . Aucune hypothèse de pseudoconvexité n'est faite, mais des hypothèses de nature bien plus faible, essentiellement optimales, de « non-dégénérescence » sur M, M' , et h . Des hypothèses sont bien sûr nécessaires, pour exclure les structures trop molles, par exemple holomorphes ou totalement réelles. Par exemple, on a la généralisation suivante du théorème (A) :

Théorème (BAOUENDI-JACOBOWITZ-TREVES 1985) *Soit D, D' deux domaines bornés à bord analytique et $h : D \rightarrow D'$ un isomorphisme. Si h et h^{-1} sont de classe C^∞ jusqu'au bord, h se prolonge holomorphiquement au voisinage de \overline{D} .*

Ce résultat est remarquable par sa généralité : on n'y fait aucune hypothèse de pseudoconvexité. D'autre part, on y suppose $h \in C^\infty(\overline{D})$; c'est un problème ouvert, de savoir si cette hypothèse est superflue (le cas $n = 2$ a été résolu par Diederich-Pinchuk (1995)).

4. Revenons au livre. Bien qu'il semble tendre vers ses derniers chapitres, les plus difficiles, des lectures partielles sont possibles. Il peut être utile de montrer lesquelles.

a) Les chapitres 1–4 forment une introduction à la géométrie des sous-variétés réelles de \mathbf{C}^n . Les notions fondamentales y sont définies : équations de Cauchy-Riemann induites, structures et fonctions CR (pour Cauchy-Riemann), forme de Levi, orbites CR ... La deuxième partie du chapitre 3 et le chapitre 4, plus techniques, déterminent des formes réduites des sous-variétés, utilisées dans les chapitres 12 et 13.

b) Le chapitre 5 présente les outils d'algèbres qui seront nécessaires en fin de parcours : propriétés des anneaux de séries formelles, la version algébrique du théorème des fonctions implicites, certains théorèmes du type théorème d'Artin . . .

c) Les chapitres 6, 7 et 8 sont largement indépendants des autres, tant par le sujet que par les méthodes utilisées. Avec comme prérequis les chapitres 1, 2 et le début du chapitre 3, on obtient une introduction à la théorie des fonctions CR et de leur prolongement holomorphe, avec de nombreux résultats, jusqu'à l'important théorème de Tumanov. La technique essentielle des disques complexes est exposée en détails.

Inversement, on peut ne pas lire les chapitres 6 à 8 et aborder la dernière partie du livre, qui traitent des transformations.

d) Le chapitre 9 expose un principe de réflexion, celui de l'article de 1985, et ses applications. La plus simple est une démonstration courte du théorème (A), mais la méthode est poussée très loin. Avec ce principe de réflexion comme seul outil « d'analyse », des calculs délicats et les méthodes algébriques introduites au chapitre 5, permettent d'ordonner l'infinité d'équations que vérifient les composantes d'une application CR $h : M \rightarrow M'$, et d'en tirer partie. Le résultat principal du chapitre est le suivant :

Théorème (BAOUENDI-ROTHSCHILD 1988) *Soit $D, D' \subset \mathbf{C}^n$ deux domaines bornés à bord analytique et $h : D \rightarrow D'$ une application holomorphe propre. Si $h \in C^\infty(\overline{D})$, h se prolonge holomorphiquement au voisinage de \overline{D} .*

Quand D et D' sont pseudoconvexes, on peut ne pas supposer $h \in C^\infty(\overline{D})$, grâce à des résultats énoncés, sans démonstration, dans le §9.10.

e) Les derniers chapitres concernent des progrès très récents, dont le point culminant est un théorème général d'algébricité, démontré dans le chapitre 13, qui étend le théorème (B) de Webster en toute codimension, sous des hypothèses optimales. Les chapitres 10–12 introduisent les outils nécessaires. Le chapitre 10 présente une généralisation des variétés de Segre. Le chapitre 11 étudie et compare plusieurs notions de (non-)dégénérescence, indispensables pour donner les meilleurs énoncés. Le chapitre 12 démontre un résultat de finitude du type suivant : sous certaines hypothèses, le N -jet d'un isomorphisme formel $h : M \rightarrow M'$ détermine cet isomorphisme ; de plus N ne dépend que de la dimension et la dépendance de h par rapport à son N -jet est analysée. Récemment, trop récemment pour qu'il en soit fait mention dans ce livre, ses auteurs ont obtenu de nouveaux résultats sur la convergence des transformations CR formelles, en utilisant les résultats de ces chapitres.

5. Le livre contient de nombreux résultats importants et difficiles, avec des démonstrations complètes. Pour l'essentiel, il est « autocontenu », les connaissances requises en analyse complexe sont réduites au minimum et les techniques auxiliaires, en provenance d'autres domaines, sont exposées en détails.

J'ai trouvé que l'effort didactique faiblissait à partir du chapitre 10, la présentation devant plus proche de celle des articles originaux, très récents, avec trop peu de motivations, compte-tenu de la complexité des notions introduites et des calculs faits. Ainsi, il aurait peut-être été bien d'introduire (dans le chapitre 10) les variétés de Segre classiques, avant leur généralisation et de montrer leur rôle, par exemple en démontrant le théorème d'algébricité dans un cas particulier.

Chaque chapitre est précédé d'un sommaire et suivi d'une demi-page de notes historiques et de références très utiles. J'ai regretté quelques absences, celle de Derridj (1985), qui a proposé, simultanément avec Baouendi-Jacobowitz-Treves, une version analogue du principe de réflexion, sans il est vrai en tirer des conséquences aussi générales. Il aurait fallu aussi citer l'article de Pinchuk (1974) *A boundary uniqueness theorem for holomorphic functions in several complex variables*, *Mat. Zametki (15) 205–212*, qui introduit une méthode de construction de disques partiellement attachés à une sous-variété réelle, analogue à la méthode utilisée dans la section §7.4 et présentée comme nouvelle.

J.-M. Trépreau, Université de Paris 6

Champs algébriques

G. LAUMON ET L. MORET-BAILLY
 Springer-Verlag, 1999

Quiconque a passé du temps à se familiariser avec la théorie des schémas de Grothendieck a dû ressentir un sentiment d'émerveillement en intériorisant la suite de ses définitions simples et belles qui réalisent le miracle de faire coïncider la voie abrupte du dépouillement abstrait qui rend possible la plus grande rigueur et où les horizons s'élargissent et le riche chemin de la pente naturelle où à chaque instant on a l'impression de toucher à la réalité même des choses. La série des [FGA] et des [EGA], pour ne parler que des textes fondateurs, a fait éclater les anciennes frontières du langage géométrique et lui a ouvert d'immenses domaines où toutes les intuitions qu'il porte ont désormais libre cours. La théorie des champs algébriques, qui remonte elle aussi à Grothendieck et dont les premières études sont dues à Deligne et Mumford d'une part, à M. Artin d'autre part, étend encore un peu plus ces domaines et la parution d'un premier livre qui en expose systématiquement les fondements est un événement important.

Beaucoup de schémas et à vrai dire tous les schémas dont l'étude est intéressante et riche, peuvent être définis par leurs points. Cela signifie qu'ils sont les espaces des paramètres de familles d'objets qu'il est naturel de considérer. Par exemple,

les « grassmanniennes » classifient les sous-espaces vectoriels, ou plus généralement les filtrations, d'un espace vectoriel donné ;

les « schémas de Hilbert » classifient les faisceaux quotients d'un faisceau cohérent donné sur un schéma ;

les « schémas de Picard » classifient les classes d'isomorphie de fibrés inversibles sur un schéma projectif donné ;

les « courbes modulaires » classifient les classes d'isomorphie de courbes elliptiques munies d'éventuelles structures de niveau ;

les variétés de Shimura de type « PEL » classifient des variétés abéliennes munies de certaines structures ; etc.

On voit déjà au travers de cette énumération que pour classifier des objets par des schémas, on est amené à considérer seulement leurs classes d'isomorphie et à faire fi de leurs automorphismes intérieurs et isomorphismes mutuels. Pourtant, si on veut recoller entre elles des familles de tels objets, il faut pouvoir fixer des isomorphismes. L'exemple le plus criant est fourni par les fibrés sur le schéma de base : localement et à isomorphisme près il n'y en a qu'un de chaque rang mais on sent bien que la théorie des fibrés ne s'arrête pas à cette constatation triviale, c'est qu'elle tient tout entière dans les isomorphismes de recollement. À la suite de Grothendieck (et Giraud), on décide donc de considérer non seulement les familles d'objets mais aussi leurs isomorphismes. C'est la théorie générale des champs qui est rappelée dans les premiers chapitres du livre de Laumon et Moret-Bailly.

Mais un schéma est plus qu'une famille de points (ou plus précisément un foncteur) ; par définition, il peut être représenté comme une réunion de schémas affines recollés au moyen de la topologie de Zariski. Et la richesse de la géométrie algébrique réside justement dans la confrontation de ces deux points de vue duaux. À la suite de l'article d'Artin, le chapitre 4 du livre définit un champ comme algébrique quand il peut être représenté à partir de schémas recollés au moyen de la topologie lisse ou, si l'on préfère, quand il s'écrit comme le quotient d'un schéma par une relation d'équivalence lisse. Par exemple, le quotient d'un schéma par n'importe quelle action d'un groupe algébrique est toujours bien défini comme champ algébrique. Leur définition apporte aux champs algébriques une bonne partie de la structure locale des schémas, ce que les chapitres 5 et 6 passent en revue. Le chapitre 7 définit des notions globales de séparation et propriété et en donne des critères valuatifs (donc fonctoriels) ; ces notions sont surtout pertinentes quand les groupes d'automorphismes des points sont finis et il faut savoir qu'en dehors de ce cas les champs algébriques ne sont (presque) jamais séparés. Le chapitre 8 caractérise les « champs algébriques de Deligne-Mumford » et les « espaces algébriques » (une notion un peu plus générale que celle de schéma) comme champs algébriques où les groupes d'automorphismes sont respectivement non ramifiés et triviaux.

On peut demander des critères qui permettent de vérifier qu'un champ est algébrique. Les chapitres suivants en fournissent deux très puissants dus à Artin (les théorèmes 10.1 et 10.10). Le premier dit qu'un champ représentable à partir de schémas recollés au moyen de la topologie plate (au lieu de lisse) est algébrique. On en déduit en particulier que si dans un champ algébrique le schéma en groupes des automorphismes des points est plat, alors le foncteur des classes d'isomorphie de ces points est représentable par un espace algébrique. Et tout champ algébrique s'écrit comme la réunion de strates localement fermées dont chacune est une « gerbe » sur un espace algébrique.

La dernière partie du livre est consacrée à la cohomologie des champs, principalement quasi-cohérente mais aussi à coefficients discrets. Le chapitre 12 définit le topo « lisse-étale » d'un champ algébrique ; il s'identifie au topo étale de l'espace algébrique simplicial associé à n'importe quelle présentation de ce champ. Cela permet au chapitre 13 de définir les foncteurs cohomologiques habituels entre catégories dérivées de Modules quasi-cohérents. Le chapitre 16 montre que les faisceaux de cohomologie d'un Module cohérent sur un champ algébrique de Deligne-Mumford propre sont eux-mêmes cohérents. Les fibrés affines ou projectifs sur les schémas se recollent facilement et le chapitre 14 étend ces notions aux champs algébriques. Le chapitre 17 résoud le problème plus difficile d'étendre des schémas aux champs la notion de complexe cotangent d'un morphisme, en recourant aux délicates techniques de « descente » (c'est-à-dire de recollement) dans les catégories dérivées.

Le chapitre 18 enfin aborde la cohomologie à coefficients discrets. Il définit les functorialités « faciles » et expose une technique de Bernstein et Lunts qui devrait permettre d'obtenir un formalisme complet des « six opérations », au moins pour une large classe de champs algébriques. Mais ceci serait le sujet d'un autre livre . . .

On le voit : le livre de Laumon et Moret-Bailly est relativement complet et systématique. Mais il n'est pas lourd et il reste accessible à toute personne qui est déjà familière avec les schémas. Écrit avec le soin scrupuleux habituel à ses auteurs, il est très clair dans son organisation d'ensemble comme dans son détail et il présente même un aspect ludique : n'est-il pas amusant de rencontrer des espaces de dimension négative ou d'avoir la possibilité d'ajouter un bord à un point ? Notre opinion est que tout mathématicien qui se sert de la géométrie algébrique devrait avoir lu ce livre et assimilé complètement au moins ses définitions principales. Comme nous l'avons dit, les champs rendent compte de beaucoup de phénomènes naturels mieux encore que les schémas. Et sans le langage des champs certains problèmes ne pourraient même pas être formulés, par exemple le « programme de Langlands géométrique » de Drinfeld où il s'agit de construire certains complexes de faisceaux ℓ -adiques sur le champ des fibrés sur une courbe. Notre expérience personnelle est que les champs peuvent être utiles même si l'on ne veut construire et étudier que des schémas : ainsi, on peut être amené à construire un schéma comme produit fibré de deux autres au-dessus d'un champ, ou bien on peut montrer qu'une variété est munie d'un morphisme lisse sur le « champ torique » quotient d'une variété torique par son tore ce qui implique (mais est plus fort et plus maniable car de nature globale) que ses singularités sont toroïdales.

Enfin, il faut savoir que la théorie des champs algébriques exposée dans ce livre, loin d'être proche de l'achèvement, est le premier cran d'une théorie beaucoup plus vaste et d'importance certainement capitale qui demande à être développée : celle des n -champs qui a fait l'objet de travaux mal connus de Grothendieck (et aussi de travaux de Breen et récemment de Simpson) et où il ne s'agit pas moins que de définir la cohomologie non-abélienne non plus seulement en degrés 0 et 1 mais en tous degrés . . .

L. Lafforgue, CNRS, Université d'Orsay

An introduction to harmonic analysis on semisimple Lie groups

V.S. VARADARAJAN

Cambridge studies in advanced mathematics 16. Cambridge University Press, 1999

Ce livre est une réédition, le texte est identique à celui de la première version parue en 1989 (seule la couverture est devenue souple).

A. Bouaziz a écrit un compte-rendu détaillé de ce livre dans la *Gazette* numéro 59 de janvier 1994. Je vais en rappeler succinctement le contenu.

Il retrace l'histoire et les grandes étapes du développement de l'analyse harmonique sur les groupes de Lie semi-simples réels. Pour un tel groupe G , l'objectif principal de cette analyse est la formule de Plancherel qui décrit la désintégration de la représentation régulière gauche dans $L^2(G)$ en terme de représentations unitaires et irréductibles de G . Une telle formule (qui généralise la théorie de Fourier classique sur le tore) fut tout d'abord établie dans les années 20 par Peter et Weyl pour les groupes compacts. Dans les années 30, les travaux de Haar et de von Neumann sur les algèbres d'opérateurs prouvent l'existence d'une formule de Plancherel pour une large classe de groupes. Harish-Chandra consacra une grosse partie de sa vie mathématique à donner explicitement la formule de Plancherel pour les groupes de Lie semi-simples réels.

Dans la première moitié de ce livre, V.S. Varadarajan décrit la formule de Plancherel sur les groupes compacts (en illustrant la théorie par $U(n)$) puis s'intéresse à la théorie des représentations (généralités puis construction de certaines représentations intervenant dans la formule de Plancherel).

La deuxième moitié du livre est consacré à la formule de Plancherel, tout d'abord sur les groupes semi-simples complexes (illustrés par $Sl(n, \mathbf{C})$) puis sur le groupe $Sl(2, \mathbf{R})$. Il traite ainsi sur ces exemples les travaux et résultats d'Harish-Chandra.

P. Harinck, CNRS, Université de Paris 7

Frobenius Manifolds, Quantum Cohomology and Moduli Spaces

Y. I. MANIN

American Mathematical Society, Colloquium Publications, vol. 47, 1999

Tels les trois Ivans des contes russes, les termes de ce titre ternaire ont chacun un rôle distinct dans ce livre, les défauts de l'un mettant en valeur les qualités des autres. Le thème général du livre, la cohomologie quantique des variétés algébriques complexes, est de nature assez combinatoire. Aussi, il peut paraître étonnant que le livre commence sur un chapitre de géométrie différentielle, centré sur l'introduction de la notion de structure de Frobenius sur une variété (C^∞ ou analytique, réelle ou complexe). Il s'agit de la donnée d'un produit \circ (commutatif et associatif) sur les champs tangents à la variété, ainsi que celle d'une forme bilinéaire non dégénérée g plate (appelée « métrique » pour aller plus vite), couplés par une relation de compatibilité que je ne préciserai pas ici. Cette notion, apparue à la fin des années 70 dans les travaux de K. Saito [3] sur les singularités de fonctions, a été amplement développée, suite à des considérations physiques, par B. Dubrovin [2] au début des années 90. Ce couplage, qui peut être présenté de différentes manières (par la théorie des déformations isomonodromiques notamment), se traduit par l'existence locale d'une fonction F sur la variété, appelée *potentiel* de la structure de Frobenius, telle que, dans des coordonnées plates, on ait, pour tous i, j, k , la relation

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k} = g(\partial_{t_i} \circ \partial_{t_j}, \partial_{t_k}).$$

L'associativité du produit \circ se traduit par une série d'équations aux dérivées partielles sur F , appelées *équations d'associativité*, ou aussi *équations WDVV*, du nom de quatre physiciens. Ces équations imposent des relations de récurrence sur les coefficients de Taylor de F (à l'origine des coordonnées par exemple). Les espaces de modules dont il s'agit sont ceux attachés à des courbes algébriques munies de n points, satisfaisant, comme il est d'usage dans ces questions, une condition de stabilité. Manin en explique la construction au chapitre V, mais présente dès le chapitre III les relations entre ces espaces lorsque n varie, reprenant notamment un article de Keel (1992). De fait, c'est bien la combinatoire de ces relations qui l'intéresse, puisqu'il montre comment celle-ci modèle les relations de récurrence WDVV, ce qui fait le lien entre structures de Frobenius et espaces de modules. Dans le gros chapitre III est aussi expliquée une autre construction de fonctions F satisfaisant les équations WDVV, due à Barannikov et Kontsevitch, adaptée à la construction d'une structure de Frobenius sur la cohomologie de variétés algébriques (vue elle-même comme une variété). Car c'est bien la cohomologie des variétés algébriques (une approche analogue existe pour les variétés symplectiques, voir par exemple [1]) qui est au centre des préoccupations de l'auteur. Il

s'agit de déformer la structure de produit (le cup-produit) sur cette cohomologie, de manière compatible à la dualité de Poincaré. La construction de cette déformation utilise les *invariants de Gromov-Witten*, obtenus au moyen d'espaces de modules d'applications de courbes dans la variété. La fonction génératrice donnant ces invariants satisfait les équations d'associativité (le cup-produit déformé est associatif). La notion de structure de Frobenius serait alors un outil adapté à l'expression du phénomène (peut-on l'appeler autrement ?) de symétrie miroir (pour lequel on trouvera une introduction dans [4]). Le livre de Manin essaye de mettre à la portée de non spécialistes (mais géomètres algébristes confirmés cependant) tout un domaine récent et très dynamique de la géométrie algébrique. Si l'auteur essaye de donner des démonstrations assez complètes dans les trois premiers chapitres, les trois autres font plus appel à des contributions extérieures au livre.

Références

- [1] M. AUDIN – « Cohomologie quantique », *Séminaire Bourbaki*, Astérisque, vol. 241, Société Mathématique de France, 1997, p. 29–58.
- [2] B. DUBROVIN – « Geometry of 2D topological field theory », *Integrable systems and quantum groups* (M. Francaviglia & S. Greco, édés), Lect. Notes in Math., vol. 1260, Springer-Verlag, 1996, p. 120–348.
- [3] K. SAITO – « Period mapping associated to a primitive form », *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **19** (1983), p. 1231–1264.
- [4] C. VOISIN – *Symétrie miroir*, Panoramas et Synthèses, vol. 2, Société Mathématique de France, Paris, 1996.

C. Sabbah, CNRS, École polytechnique, Palaiseau

Two and Three dimensional patterns of the face

P. L. HALLINAN, G. G. GORDON, A. L. YUILLE, P. GIBLIN, D. MUMFORD
A. K. Peters, 1999

Cet ouvrage propose diverses techniques de modélisation et reconnaissance de visages, en appliquant les méthodes bayésiennes introduites en traitement d'images par U. Grenander : construction d'un modèle a priori (modèle de visages) sur les données originales, puis d'un modèle d'acquisition et de dégradation, puis reconstruction par maximum a posteriori. Les auteurs présentent leur ouvrage comme un exemple de mise en œuvre complète de ce schéma.

Le texte s'articule sur deux parties, l'une consacrée aux données bidimensionnelles (images) et l'autre aux données 3D (surfaces). Il compile toute une série de travaux réalisés par les auteurs sur ce sujet au cours des dernières années. La présentation suit une logique applicative, au sens que les problèmes sont abordés dans l'ordre où les algorithmes pourront être appliqués dans la réalité. Les supports mathématiques apparaissent au fur et à mesure qu'ils deviennent nécessaires. Les développements sont illustrés par de nombreux schémas, et résultats expérimentaux.

L'aspect bidimensionnel profitant d'une plus grande accumulation de travaux passés, les auteurs proposent un panorama complet de la chaîne de traitements. L'effort de modélisation sur des images de visages porte d'une part sur les variations d'illumination et d'autre part sur les déformations élastiques des structures observables.

La variation d'illumination est étudiée par une analyse en composantes principales. Un soin particulier est apporté à la justification de cette approche, en particulier sur pourquoi les différents effets d'illumination se combinent d'une manière linéaire. Ceci se démarque de nombre d'études « d'eigenfaces » de la littérature, qui cherchent souvent à décomposer toutes la variabilité des visages à l'aide d'une analyse en composantes principales, y compris leurs déformations non-linéaires. Le résultat de cette étude fournit un petit nombre de composants (illumination élémentaires) dont les combinaisons permettent de synthétiser la quasi totalité du panel des éclairages possibles d'un visage.

Les modèles de déformations sont inspirés de la théorie de l'élasticité. Les auteurs, toutefois, ne cherchent pas à récupérer un modèle physique précis, mais cherchent plutôt à construire une énergie de déformation en suivant une démarche axiomatique, énonçant un

certain nombre de propriétés qui devront être satisfaites par cette énergie. Ces propriétés concernent en particulier le comportement limite relatif aux grandes déformations (compression et dilatation).

La réunion des modèles d'illumination et de déformation fournit un modèle complet de visages bidimensionnels. Les algorithmes de reconnaissance en sont déduits directement des principes bayésiens, comme il avait été annoncé par les auteurs. Une des originalités de l'approche est d'identifier une déformation élastique complète entre deux visages durant leur comparaison.

L'analyse de visages à partir de données 3D (acquises par un capteur laser, par exemple) est moins classique, moins développée dans la littérature. Cela explique que la solution proposée dans cet ouvrage est moins aboutie, sur le plan pratique et expérimental, que le cas bidimensionnel. Cette partie propose un contenu mathématique sensiblement plus avancé que la précédente. Plusieurs chapitres, en particulier, sont consacrés à la présentation de certains aspects de la théorie des singularités des surfaces, sans aucun accompagnement algorithmique ou expérimental, ce qui tranche avec le style adopté dans le reste de l'ouvrage. La théorie est utilisée tout d'abord pour introduire un certain nombre de types de contours particuliers susceptibles d'être tracés sur un visage (lignes de crêtes et lignes paraboliques). Ceci aboutit à ce que les auteurs appellent « l'empreinte digitale du visage », du plus bel effet graphique. La théorie est ensuite développée pour analyser comment cette empreinte digitale évolue lorsque la représentation 3D du visage varie en suivant une famille à un paramètre, correspondant en pratique aux interpolations entre un ellipsoïde et la surface effectivement mesurée. Les aspects pratiques qui en sont déduits, sont limités à la définition d'une algorithmique de comparaison, somme toute classique, puisque basée sur l'introduction d'un certain nombre de mesures caractéristiques pouvant être faites sur un visage et sur la comparaison de ces mesures d'un visage à un autre.

En conclusion, cet ouvrage propose un développement méthodologique crédible et opérationnel sur un sujet pratique précis, basé sur des analyses rigoureuses et sur l'emploi d'un arsenal de techniques mathématiques relativement important. Les auteurs le présentent comme un livre susceptible d'intéresser les mathématiciens comme un exemple d'application réelle, en vision artificielle, de certaines de leur théories et les ingénieurs comme un exemple d'approche mathématiquement rigoureuse d'un de leur problème les plus étudiés.

L. Younes

The Queen of Mathematics. A Historically Motivated Guide to Number Theory

JAY R. GOLDMAN

A. K. Peters, Wellesley, 1998

L'objectif de ce gros livre est parfaitement décrit par son sous-titre : c'est un panorama, à un niveau assez élémentaire (disons pour fixer les idées, celui de maîtrise ou du début d'un cours fondamental de 3e cycle), de thèmes classiques de la théorie des nombres, expliquant la nature des résultats espérés, quitte à renvoyer à des ouvrages plus spécialisés pour les démonstrations et utilisant l'histoire du domaine comme fil conducteur et outil pédagogique.

La première partie contient ainsi, comme on s'y attend, un aperçu des travaux de Fermat, Euler, Lagrange et Legendre, ainsi qu'un chapitre sur les fractions continues. La deuxième partie part des *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss pour balayer l'étude des congruences (dont la loi de réciprocité quadratique), la théorie des formes quadratiques binaires et le début des équations cyclotomiques, avec une petite section traitant en détail la constructibilité du polygone régulier à 5 côtés. Les troisième et quatrième partie abordent respectivement les corps de nombres et l'arithmétique des courbes en partant à peu près de zéro (l'auteur introduit par exemple les idéaux d'une part et la géométrie projective de l'autre) et en arrivant à une présentation explicite de la théorie des corps quadratiques sur \mathbf{Q} et à une esquisse du théorème de Mordell-Weil pour les courbes elliptiques. La dernière partie enfin évoque en trois sections à peu près indépendantes les questions de transcendance, la géométrie des nombres et les nombres p -adiques. De nombreux exemples numériques sont expliqués en détail (il n'y a en revanche pas d'exercices).

Le matériel est donc standard, l'originalité réside dans deux aspects : la rédaction très discursive, rendant sans doute l'ouvrage accessible à des non-spécialistes, même étudiants ; et surtout, celle tout particulièrement revendiquée par l'auteur, l'insistance sur l'histoire.

Bref, tout ceci semble une bonne idée et il n'y a pas de doute que certains chapitres du livre peuvent utilement servir, par exemple, à améliorer une leçon d'agrégation, tandis que les anecdotes abondantes et les commentaires historiques rendent la lecture plutôt allègre. Mais, mais, mais. . .

Le plus évident « mais » concerne justement l'approche historique. Les (bons) modèles ne manquaient pas, comme le *Number Theory : An Approach through History from Hammurapi to Legendre* d'André Weil, ou le *Fermat's Last Theorem. A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory* de Harold Edwards. Malheureusement, Goldman se situe à la fois trop loin et trop près de ses prédécesseurs. Trop près, parce qu'il en intègre sous forme de citations de longs morceaux, parfois plusieurs pages de suite (p. 243–248, par exemple). Trop loin, parce que ces ouvrages de synthèse semblent souvent lui avoir servi de seules sources historiques, sans consultation d'études historiques plus spécialisées, mais surtout sans consultation des textes originaux : lorsque l'auteur se met à condenser, à simplifier, voire à mélanger sans état d'âme apparent ces résumés mêmes, les catastrophes s'accroissent.

La naïveté historique de l'auteur est à vrai dire assez confondante. Le chapitre 3 s'ouvre sur le schéma suivant :

1601	Fermat	1665	1707	Euler	1783
			1624	Newton	1727

Que diable Newton vient-il faire dans cette galère ? Pas grand chose : « Although Newton bridges the mathematical gap between Fermat and Euler, he was not particularly interested in number theory and Euler was Fermat's true successor. Euler was phenomenal » (p. 24). Au tout début du livre, Newton intervient de la même façon, cette fois-ci « pour la perspective » (p. 1). Peut-être Newton est-il le seul nom susceptible d'être connu d'un étudiant en sciences anglophone ? D'autres candidats comme Leibniz et quelques Bernoulli, cités ailleurs dans le livre, auraient pourtant bien aidé à combler le dit trou, dont la profondeur et surtout la nature restent pour moi un mystère.

Presque chaque phrase à vocation historique devrait être réécrite. Je me contenterai ici de deux exemples supplémentaires.

« H. J. Smith and Felix Klein gave the first geometric theory of the reduction of quadratic forms », écrit l'auteur p. 175, sans références précises. De notoriété publique (e.g. : Dickson's *The History of the Theory of Numbers*, vol. II, p. 17 sq. ; *Encyclopédie des sciences mathématiques*, vol. III, p. 114 sq.), Gauss dans son commentaire de 1831 sur les travaux de Seeber avait déjà associé à une forme définie positive $ax^2 + 2bxy + cy^2$ (et à son opposée) une division du plan en parallélogramme de côtés \sqrt{a} , \sqrt{c} et d'angles égaux à $\arccos \frac{b}{\pm\sqrt{ac}}$; les sommets des parallélogrammes forment un réseau et les autres divisions analogues du plan définissant le même réseau correspondent à des formes équivalentes à la première ; Lejeune-Dirichlet a expliqué vers 1850 comment décrire la réduction sur cette représentation (les parallélogrammes correspondants ont leurs côtés inférieurs ou égaux aux diagonales). Tous ces travaux sont effectivement mentionnés par Henry John Stephen Smith dans son *Report on the Theory of Numbers to the British Association for the Development of Science* en 1863. Je ne sais pas si c'est à ce rapport ou aux autres travaux de Smith que Goldman fait allusion. Quoi qu'il en soit, plusieurs représentations géométriques de la réduction des formes ont été proposées tout au long du XIX^e siècle (dont celle qui associe à la forme définie positive $ax^2 + bxy + cy^2$ la racine de $az^2 + 2bz + c = 0$ de partie imaginaire positive, ce qui conduit à la décomposition du demi-plan de Poincaré sous l'action du groupe modulaire et à la notion de domaine fondamental, le seul point de vue expliqué dans le livre de Goldman) ; il s'agit d'une petite industrie à laquelle ont contribué, entre autres, Smith, Poincaré, Klein, Fricke, Hurwitz, Minkowski, Dedekind. Klein lui-même en a utilisé plusieurs, montrant en particulier comment représenter géométriquement, sur les réseaux introduits ci-dessus, la *composition des classes* de formes. Le résumé de Goldman prête donc pour le moins à confusion.

Passons aux deux pages qui couvrent les débuts des équations diophantiennes (p. 374–375). « The first systematic study, presented by Diophantus in his *Arithmetic* (circa 350 A.

D.) was primarily concerned with rational solutions of polynomial equations in two variables. Diophantus worked in a purely algebraic way, without any algebraic notation. What this means is that he solved special numerical equations, without any reference to special properties of the numbers involved and solved sufficiently many examples to make it clear that he understood the general methods we would today formulate with algebraic notation » (p. 374).

Passons sur la datation (erreur de frappe pour la date souvent citée de 250 A. D., elle-même fort peu sûre?) et sur la systématique de l'œuvre de Diophante, un des aspects les plus épineux et les plus violemment contestés de l'histoire des mathématiques de ces dernières décennies (cf. Weil : « il n'est pas facile de caractériser la répartition des problèmes entre les différents livres ou à l'intérieur des livres; ce n'est pas non plus nécessaire car nous ne pouvons être sûrs qu'elle remonte à Diophante »). Est-il vraiment possible de deviner à partir de cette présentation que Diophante utilise effectivement des symboles pour l'inconnue et ses puissances (les qualifier d'algébriques ou non exigerait une discussion détaillée de ce qu'on entend par cela, discussion présente dans les sources historiques utilisées par Goldman, mais totalement absente ici); que Diophante ne retient en général que les solutions rationnelles positives (une propriété plutôt spéciale des nombres s'il en faut et qui nécessite dans plusieurs cas des conditions particulières sur les nombres-coefficients!); et qu'en fait de polynômes à deux variables, le lecteur de Diophante se retrouve face à des questions du genre : « Partager un nombre donné en deux nombres et trouver un carré qui, diminué de chacun des nombres du partage, forme un carré » (Diophante, III, 20); « Trouver trois nombres tels que le cube de la somme de ces trois nombres, augmenté de chacun d'eux, forme un cube » (V. 15), Diophante s'arrangeant ensuite pour n'utiliser qu'une seule inconnue, quitte à poser d'office certaines relations entre les inconnues cherchées. L'historienne perverse peut trouver un certain plaisir à imaginer quelle suite de lectures partielles et de simplifications optimistes a produit les phrases incriminées, mais je doute que les utilisateurs visés s'y retrouvent.

Les erreurs ponctuelles ne manquent pas non plus : les lecteurs français verront ainsi apparaître, avec amusement ou agacement selon leur humeur du jour, un persistant théorème de Claude Chevally (p. xix, 121, 122, 456, 492, 499, 518) ...

Un autre « mais » concerne un certain flottement dans les énoncés mathématiques eux-mêmes, qui risque lui aussi d'embarrasser les novices. Un exemple typique, p. 413, concerne les courbes elliptiques définies sur \mathbf{Q} : après avoir expliqué (ch. 19) comment obtenir une équation cubique *affine* de forme standard, l'auteur entreprend de discuter la réduction de la courbe sur un corps fini, à partir de cette équation, en oubliant complètement le point à l'infini.

Bref, si le projet est sympathique et l'enthousiasme visible de l'auteur presque communicatif, le guide annoncé est assez touristique. Il peut sans doute être utile, mais il est recommandé de s'en servir avec circonspection.

C. Goldstein, CNRS, Université de Paris Sud

La pulsation mathématique; rigueur et ambiguïté, la nature de l'activité mathématique, ce dont il s'agit d'instruire.

RENÉ GUITART
L'Harmattan, 1999

Voilà bien un livre que tout mathématicien devrait se donner la peine de lire, bien qu'il ne soit pas d'un abord facile et qu'on y rencontre, soutenues avec force, bon nombre de thèses qui pour le moins ne vont pas dans le sens de ce qui se défend habituellement sur ces sujets.

Pourquoi je vous invite à « aller voir » et à persévérer dans l'approfondissement d'un texte aride où il faut souvent s'entêter à vouloir comprendre ce que l'auteur veut nous dire de profond (après plusieurs lectures je suis loin d'avoir tout compris), c'est parce que le peu que j'ai compris de cet essai très risqué de saisie sur le vif de l'activité mathématique (à ma connaissance personne n'a osé à ce point tenter une telle aventure) m'a formidablement enrichi dans la compréhension de notre activité de mathématicien, de professeur de mathématiques, et m'incite à être plus vigilant vis-à-vis de la pertinence de mon positionnement dans mon activité de didacticien des mathématiques.

Toute personne qui a pratiqué véritablement l'activité mathématique, qui « s'y est mis une fois », a ressenti confusément que faire des mathématiques, c'est bien entendu entrer dans l'abstraction, chercher à être rigoureux et logique, c'est vouloir savoir avec précision de quoi on parle, avoir des définitions claires et solides afin d'éviter d'entrer dans des cercles vicieux et d'échapper aux contradictions, etc. mais en même temps, chacun comprend aussi que faire des mathématiques, ce n'est pas que ça, « c'est faire ça et le contraire de ça » ! En pratique, on sent bien que l'activité très abstraite du mathématicien est sans cesse nourrie d'une pensée et d'images très concrètes, que la rigueur en mathématique c'est précisément de ne pas tout dire et de ne pas tout montrer et démontrer, qu'elle passe par du « su et de l'insu », du « dit et du non dit ». D'instinct on réalise que faire des mathématiques, ce n'est surtout pas non plus mettre en œuvre systématiquement les formalismes et les règles de la logique, c'est en même temps fixer les choses, les axiomes, les définitions, les noms de variables, les valeurs des paramètres, et néanmoins considérer que ce qui est a priori intangible est toujours révoquant quand cela devient nécessaire pour garder le sens ou donner un nouveau sens ; faire des mathématiques, c'est par le symbole « = » pratiquer le jeu du même et du différent, du fixe et du bouge, de la non contradiction et de l'affrontement des situations paradoxales.

Ce vécu profond de l'activité mathématique nous semble trop décousu, incohérent, instructible pour que nous tentions de le décrire et a fortiori d'en instruire ; d'où l'idée pour certains que les mathématiques ne s'enseignent pas — c'est un art qui se pratique ou au mieux se montre (c'est paradoxalement d'ailleurs la thèse défendue à certains endroits par l'auteur). Pour d'autres, la grande majorité des professeurs d'aujourd'hui — y compris dans le supérieur — la thèse implicite est que ce cœur même de l'activité mathématique est réservé à une élite, aux nobles, aux bien-nés, aux nantis des activités intellectuelles et que, pour la grande majorité des élèves et des étudiants, ce dont on doit instruire n'est surtout pas ce savoir-faire risqué et utopique appelé ici « la pulsation mathématique » ; pour les tenants de cette thèse, ce qu'il faut enseigner c'est au contraire cette mathématique scolaire totalement « transposée » et réorganisée pour être apprise, activité où le risque et le doute sont exclus, où « la force de l'esprit de l'élève n'est pas convoquée », car il serait dangereux, inefficace, voire nuisible d'entraîner la masse dans ce tourbillon d'attitudes contradictoires que semble requérir l'activité mathématique véritable.

L'apport extraordinaire de l'auteur dans ce livre est qu'au cours de ces trois cents pages il s'oblige à identifier, à fonder (il permet au lecteur d'identifier et de fonder peu à peu) la structure de cet apparent désordre, il lui donne une cohérence et une fonctionnalité au niveau de la formation de l'esprit, il nous montre en quoi il est odieux sous cet éclairage de vouloir réserver ce savoir-faire à quelques-uns et il montre pourquoi en instruire tous nos élèves à tous les niveaux est premier, pourquoi l'enseignement des concepts, des formules, des méthodes et des calculs, si importants et si nécessaires soient-ils, doit néanmoins être considéré comme second, doit s'effacer ou être au service de l'instruction de ce savoir-faire fondamental : la pulsation mathématique, structuration cohérente d'attitudes d'apparences contradictoires, le fixe et le bouge, le su et l'insu, le dit et le non dit, le montré et le caché, etc.

Reprenant et prolongeant le projet de Descartes, René Guitart nous propose de saisir l'activité mathématique de la façon suivante :

Faire des mathématiques, c'est prendre le risque de faire de son non doute le synonyme de vérité.

C'est personnellement tout le bonheur que les mathématiques m'ont apporté (et j'ai toujours eu le sentiment que c'est ce qu'elles apportent fondamentalement à tous ceux qui en font) : la découverte de la force de l'esprit, ces moments où l'activité mathématique nous installe dans la position où le non doute ou l'évidence (i.e. « le moment où la question du doute a disparu, s'est résorbée intégralement ») peut être posée comme la garantie du vrai (c'est vrai, non parce qu'on me le montre, parce qu'on me le dit, parce que c'est écrit, non, c'est vrai, parce que mon esprit me montre que ça ne peut être autrement).

La position humaniste qui nous est proposée à ce niveau est alors « le fait que l'on peut savoir penser, que penser est une technique humaine, qu'il est possible de mettre à la disposition de chacun comme un pouvoir personnel ». La thèse fondamentale défendue par l'auteur est alors que « la croyance du professeur en matière intellectuelle est qu'il y a force de l'esprit, et que sa destination personnelle est de mettre cela à la disposition de l'élève. Sa position éthique est de maintenir décidément que tout le reste est secondaire ».

L'auteur aborde bien évidemment le problème de la didactique des mathématiques ; la critique sans complaisance des travaux de la communauté française, rarement inutilement polémique, se consacre au problème de fond qui me paraît le plus central : la didactique des mathématiques, en se voulant science (i.e. assertions avérées, vérifiables expérimentalement) ne se condamne-t-elle pas, notamment avec le concept de transposition didactique, à passer à côté de l'essentiel, ne se trouve-t-elle pas obligée du coup de justifier, de normaliser, de pérenniser en le rendant nécessaire ce que l'enseignement dans sa majorité réussit le mieux mais qui est en réalité son échec profond, i.e. arriver à enseigner des pratiques scolaires très éloignées de l'activité mathématique ?

Du coup, la didactique ne finit-elle pas (parce que ça rentre mal dans les canons de sa recherche en tant que science) par oublier de chercher l'essentiel : ce qui pourrait permettre au professeur de réussir à instruire ses élèves de ce savoir-faire fondamental qu'est la pulsation mathématique.

Autant on peut être réservé sur les solutions didactiques que l'auteur avance et qui sont, me semble-t-il pour l'essentiel, de l'ordre de la démonstration — « si le professeur pratique véritablement cette pulsation mathématique devant ses élèves, ils vont être entraînés, ils vont, par imitation, s'y mettre eux aussi » — réservé, car précisément les éléments qui me paraissent les plus solides en didactique tendent à nous montrer que l'injonction paradoxale « faites comme moi » n'entraîne le plus souvent que ceux qui étaient déjà prêts, autant la proposition de faire réfléchir l'ensemble de la communauté des mathématiciens à la nécessité d'une réorientation de nos choix pédagogiques et la demande faite à la communauté des didacticiens de s'interroger sur la signification et la portée de ses choix de recherche me paraissent très pertinentes et fondées. Je crois personnellement à la pertinence de bon nombre d'outils de la didactique pour aider le professeur à mieux enseigner les mathématiques qu'il comprend, mais je pense aussi comme l'auteur que cette pertinence peut devenir perverse si on se trompe sur les priorités au niveau de ce qu'on pense devoir enseigner.

Le livre de René Guitart est à mon avis capital car de façon non réductrice et non naïve il pose la question de ce qui est fondamental dans l'activité mathématique, et par suite de ce qui doit s'effacer sans disparaître pour que l'essentiel reste premier dans l'enseignement, et il nous donne de nombreuses raisons de comprendre pourquoi une idéologie des inclus, une fausse idée de la démocratie et de l'humanisme, éventuellement prônées par les plus hautes instances de l'Éducation nationale nous poussent dans l'action à inverser dramatiquement les priorités.

C'est à mon avis la dignité, l'utilité, l'éthique des intellectuels que nous sommes en tant que professeurs mathématiciens que de savoir résister aux idéologies perverses, que d'avoir assez de force d'esprit pour se poser la question des priorités et de se battre pour qu'elles soient respectées.

C'est en tout cas la dignité, la force et l'intérêt de ce livre ; bien que et parce que je ne partage pas toutes ses thèses, je remercie son auteur de l'éclairage qu'il peut nous apporter si on ne se prive pas de sa lecture, en tout cas je le remercie de ce qu'il m'a apporté et qui m'aide à cheminer, à penser, à repenser (car pouvant mieux nommer) ce qu'il y a de plus intime et de plus fondamental dans l'activité qui nous préoccupe ici : « faire des mathématiques ».

M. Legrand, Université de Grenoble²

Théorie des situations didactiques

TEXTES RASSEMBLÉS ET PRÉPARÉS PAR N. BLACHEFF, M. COOPER, R. SUTHERLAND,
V. WARFIELD
Édition La pensée sauvage

Bien que de nature très différente, ce livre entre en résonance avec celui de René Guitart, « La pulsation mathématique », cette double lecture montre mieux ce qu'ils apportent complémentairement de fondamental.

² Les notes de lectures de Marc Legrand sont parues (sous une forme un peu différente) dans le numéro 39 de la revue repère IREM

La théorie des situations est basée sur le principe suivant : « savoir des mathématiques, ce n'est pas seulement apprendre des définitions et des théorèmes, . . . Une bonne reproduction par l'élève de l'activité scientifique exigerait qu'il agisse, qu'il formule, qu'il prouve, qu'il construise des modèles, des langages, des concepts et des théories, qu'il échange avec d'autres, qu'il reconnaisse celles qui sont conformes à la culture, qu'il emprunte celles qui sont utiles, etc. Pour rendre possible une telle activité, le professeur doit donc imaginer et proposer aux élèves des situations qu'ils puissent vivre et dans lesquelles les connaissances vont apparaître comme la solution optimale et découvrable aux problèmes posés ».

Guy Brousseau oppose ainsi à l'enseignement dogmatique traditionnel où pour l'essentiel on montre à l'élève ce qu'il doit apprendre et appliquer, un enseignement par adaptation, i.e un enseignement où l'élève placé dans des situations problématiques ad hoc doit se saisir du savoir pour s'adapter aux difficultés et problèmes qu'il rencontre. Le but de ce procédé indirect est de fournir à l'élève beaucoup plus de chances de donner du sens au savoir puisque ce dernier lui apparaît alors comme réponse à des questions qu'il a été amené à se poser.

Ce livre de trois cent cinquante pages rassemble des textes fondamentaux écrits par Guy Brousseau entre 1970 et 1990. La première moitié est à mon sens une réussite totale car, en introduction, l'approche de la théorie sur un exemple bien choisi permet à tout lecteur, qu'il soit familier ou non avec le vocabulaire de la didactique, de pressentir très simplement mais avec force quels sont les ressorts principaux, quelle est la philosophie qui structure la théorie des situations. Comme au cours des deux chapitres suivants sont repris et explicités de façon claire et assez détaillée les concepts fondamentaux qui étaient apparus en filigrane dans l'introduction (le principe d'apprentissage par adaptation, le phénomène de la transposition didactique, le contrat didactique, les situations didactiques et a-didactiques, leur dévolution aux élèves, la notion de situation fondamentale et d'obstacles épistémologiques), le lecteur qui prend le temps de revenir sur certains paragraphes et de les confronter à son expérience de mathématicien, d'élève et de professeur, ne peut rester indifférent au fait que sont là mis en forme de façon lucide et structurée des phénomènes qu'il a sûrement rencontrés et des explications à des faits didactiques qu'il a vécus fortuitement sans forcément pouvoir les nommer, les mettre en cohérence, les réorganiser en vue d'une action d'enseignement. Je ne suis certainement pas un lecteur objectif de ce livre puisque j'ai appris à connaître viscéralement cette théorie en la travaillant quotidiennement depuis une vingtaine d'années comme outil permettant de réaliser l'enseignement des mathématiques dans le secondaire ou le supérieur sous forme de débat scientifique ; mais si cette familiarité me cache la difficulté qu'il y a à lire les textes de Brousseau, elle pourrait aussi me les faire apparaître comme un peu usés et dépassés, eh bien non justement ! malgré cette familiarité, je reste subjugué en relisant ce texte par la justesse, la pertinence et la profondeur du regard qu'il nous permet de porter sur le problème de l'enseignement des mathématiques. Je suis subjugué car bien que tout cela soit en germe depuis trente ans dans la pensée de Brousseau et parte d'une analyse quasi exclusivement centrée sur l'enseignement primaire, je trouve en essayant de relire ces textes avec un œil neuf, qu'à part quelques éléments mineurs, tout ce qui est dit là s'avère aujourd'hui comme totalement pertinent pour analyser et organiser l'enseignement des mathématiques au collège, au lycée, en DEUG, en licence ou en préparation à l'agrégation. Et du coup . . . , j'ai le sentiment d'un immense gaspillage en constatant qu'il y a là, accumulé dans les 150 premières pages de ce livre, un trésor inestimable de compréhension des phénomènes didactiques, que ce trésor est à la disposition de tous depuis des années disséminé dans diverses publications, et que loin d'être pillé, il reste de façon très regrettable totalement ignoré ou rejeté par la plupart des mathématiciens, y compris par ceux qui souffrent le plus de constater que ce qu'on enseigne, ce qu'ils enseignent (ou plus exactement ce qui est retenu par les élèves ou les étudiants de ce qu'ils enseignent) n'est pas du tout ce qu'ils souhaiteraient qu'ils en fassent. C'est à mon sens un grand gâchis car il me semble que la majorité des mathématiciens aiment les mathématiques précisément parce que ce qu'ils en font pour eux n'est pas ce que l'école en fait pour l'élève : quand ils font des mathématiques pour eux-mêmes, ils se questionnent, ils doutent, ils conjecturent, ils osent travailler l'in vraisemblable, ils s'intéressent à leurs erreurs, ils ne se cachent pas leurs contradictions ; or, si quelques-uns arrivent à faire partager une certaine admiration, un certain enthousiasme à leurs interlocuteurs en leur montrant ce qu'il font, très peu arrivent comme René Guitart à mettre en mot le propre de leur activité, et je ne crois pas mentir en disant qu'une proportion infime arrive à faire partager à la majorité

de leurs interlocuteurs ce savoir-faire qui les comble de bonheur et que René Guitart appelle la pulsation mathématique.

Ils n'y arrivent pas, non par manque de désir ou de travail, mais parce que ce savoir-faire mathématique que certains possèdent au plus haut degré ne leur confère pas de facto le savoir-faire didactique qui leur permettrait de faire faire des mathématiques à ceux qui sont en face d'eux et qui ne sont pas forcément nés mathématiciens.

J'ai été illuminé à la fin des années 70 quand j'ai découvert derrière le jargon de la didactique (qui m'énervait beaucoup à l'époque car je le trouvais souvent inutilement prétentieux et... ça ne s'arrange pas) les idées principales de la théorie des situations. J'ai été illuminé car, au delà des mots, c'est une approche totalement différente des problèmes d'enseignement que représente cette théorie, une approche qui prend directement en compte le désir fondamental que nous avons tous que nos élèves, nos étudiants se mettent à faire des mathématiques eux aussi, mais qui, contrairement à beaucoup de pseudo-théories post soixante-huitardes, n'est pas une réaction purement idéologique et volontariste face à l'échec de nos enseignements, c'est une analyse en profondeur pour une action véritable : au lieu de se contenter des injonctions paradoxales « réfléchissez, soyez rigoureux, faites preuve de bon sens et de curiosité, imitez-moi », cette théorie s'appuie précisément sur les résistances que la plupart des élèves ont naturellement à entrer dans une attitude mathématicienne, pour les dépasser. C'est une modélisation de l'enseignement qui permet à la fois de porter un regard plus objectif sur la réalité de ce qui passe ou pourrait se passer dans un cours, tout en ne perdant pas de vue l'objectif fondamental qui est : que les élèves comprennent, qu'ils apprennent à comprendre, c'est-à-dire à questionner, à donner du sens. En clair, cet immense désir que nous avons tous de faire de l'enseignement des mathématiques un acte qui éveille l'intelligence de l'élève, la théorie des situations le prend directement en compte avec force et pertinence ; en un certain sens elle l'effectue.

Je ne peux ici en quelques lignes résumer sans la dénaturer le fond de cette théorie (c'est très bien fait dans les 20 premières pages avec l'exemple introductif), je ne souhaite pas non plus faire du prosélytisme, car c'est précisément une des vertus de la recherche en didactique que de nous aider à prendre conscience que tout ce qui est effet de mode, tout ce qui se base sur un volontarisme généreux mais aveugle — car ne voulant tenir compte des difficultés — est tôt ou tard voué à l'échec ; enfin, je n'ai pas d'actions dans la communauté des didacticiens ni ne suis idolâtre du maître. Ce que je me dois néanmoins de dire au professeur de mathématique sincère qui souffre de ne pouvoir faire partager dans l'enseignement ce qui lui paraît essentiel, c'est qu'il y a dans les cent cinquante premières pages de ce livre des éléments de savoir décisifs qui, s'ils ne fournissent aucune recette miracle pour mieux enseigner, peuvent — si nous les ruminons suffisamment longtemps dans une certaine honnêteté intellectuelle — nous aider peu à peu à opérer une véritable révolution copernicienne dans notre façon d'envisager les problèmes d'enseignement, révolution des mentalités qui se traduira à terme par de vrais changements dans notre façon d'enseigner, révolution qui nous permettra d'accepter ce qui est très difficile pour un mathématicien au travail : occuper une grande place et néanmoins ne plus tenir le premier rôle sur la scène du théâtre mathématique que nous organisons dans nos cours et nos TD, car dans ce nouveau théâtre beaucoup plus de nos interlocuteurs pourront passer de la position de spectateurs à la position d'acteurs.

En relisant la dernière partie de ce livre, j'ai cru déceler des passages qui, pris d'une certaine façon, peuvent alimenter la peur, voire l'horreur que suscite chez certains tout ce qui s'apparente de près ou de loin avec ce type de recherches. Quand Brousseau souligne que le professeur de mathématiques ne peut (pour une question de temps et d'énergie) tout inventer lui-même et affirme alors qu'il appartient à la recherche de mettre à la disposition de ce professeur une panoplie de situations qui pourront l'aider à ne pas priver la plupart de ses élèves de la possibilité de faire eux aussi des mathématiques, je crois qu'il a profondément raison (les bonnes situations, celles qui permettent à beaucoup d'élèves de s'impliquer et de comprendre sont encore assez rares et très longues à construire) ; quand, reprenant cette idée, il déclare alors qu'il appartient à la recherche en didactique d'écrire le corps du texte de la pièce que l'acteur professeur devra jouer, il se met à faire peur, très peur !

Cette déclaration fait peur à tort si on l'interprète dans le sens précédent, elle fait peur à juste titre s'il se profile à l'horizon une sorte de didactique officielle, une suprématie ou un diktat du didacticien qui, en tirant les ficelles, retirerait au professeur sa responsabilité

de mathématicien. Cela fait d'autant plus peur que l'on constate au fil des années que les didacticiens ne se sont pas empressés dans leur grande majorité de chercher à construire un choix suffisant de situations fondamentales, ni à inventer une didactique de la didactique qui permettrait au professeur non chercheur en didactique de comprendre assez bien les ressorts de ces situations pour pouvoir s'en servir en toute indépendance, i.e. en gardant le contrôle épistémologique, en ayant la liberté de les transformer sans les travestir, en ayant la possibilité de les changer sans sombrer dans l'incohérence.

Pour être tout à fait honnête, je me sens néanmoins tenu d'écrire ce que Guy Brousseau n'ose pas, ne peut peut-être pas dire : vu la difficulté que représente la mise en œuvre du changement de point de vue qu'introduit la théorie des situations et vu (en dehors d'une naïveté navrante) le peu d'espoir de voir brutalement et spectaculairement les choses changer du jour au lendemain du côté de l'élève (Brousseau s'en explique très honnêtement), le plus gros obstacle à la prise en considération des changements que cette théorie induit est à mon avis d'ordre socio-culturel et éthique.

Si on ne considère pas comme fondamental et crucial pour tout homme de pouvoir penser à la première personne (je pense que . . . je soutiens que . . .) et si on ne considère pas que cela s'apprend (par exemple en apprenant à faire des mathématiques), si on n'estime pas indispensable à la force d'une démocratie que beaucoup de citoyens aient la possibilité de penser la complexité, de la contrôler, de pouvoir critiquer par la raison les solutions qui leur sont proposées (je ne pense pas que . . . parce que . . .) et si on ne considère pas que cela s'apprend (par exemple en apprenant à faire des mathématiques), des propositions d'enseignement comme celles que suggère la théorie des situations sont des utopies totalement irréalistes puisque leur coût est extrêmement important et leurs effets réels ne seraient attendus qu'après des nantis intellectuellement, des riches de l'esprit qui peuvent se débrouiller sans.

La théorie des situations a comme base idéologique le désir d'une certaine confraternité dans le partage du sens du savoir, la volonté que le plus grand nombre puissent faire véritablement des mathématiques quand ils apprennent des mathématiques et ce même si, bien évidemment, très peu d'élèves, voire d'étudiants sont initialement préparés à cela et deviendront (là n'est pas la finalité de cette théorie) des spécialistes de cette discipline ; sommes-nous si nombreux à désirer cela assez intensément pour être prêts à y sacrifier ce que la théorie des situations semble exiger ?

*M. Legrand, Université de Grenoble*³

³ Les notes de lectures de Marc Legrand sont parues (sous une forme un peu différente) dans le numéro 39 de la revue repère IREM