LIVRES

Sur les œuvres complètes de Witt

Gesammelte Abhandlungen von Ernst Witt (Œuvres de Ernst Witt)
Edité par I. Kersten, avec un essai de G. Harder sur les vecteurs de Witt
Springer-Verlag, Berlin, 1998

Ce volume contient tous les articles de Witt, quelques fac-similés (Witt aimait les démonstrations d'une page, comme celle qu'il donne du théorème des nombres premiers, p. 397), ainsi que quelques articles non publiés (dont certains reconstitués à partir de notes manuscrites). De nombreux commentaires de l'éditrice et de ses collègues mettent les articles en perspective. Certains, comme celui de U. Rehmann sur la contribution de Witt à la classification des algèbres de Lie simples, sont particulièrement instructifs. Les textes de Witt sont en allemand, sauf deux en espagnol. La loi du marché fait que la plupart des commentaires sont écrits (ou traduits) en anglais.

Un complément utile au volume est l'article d'Ina Kersten dans *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **95** (1993). Elle y passe en revue les contributions de Witt, et évoque sa personnalité.

Witt publia ses principaux articles entre sa vingt-troisième et sa trentième année, entre 1934 et 1941. La plupart de ces articles sont devenus des classiques. Ces résultats s'insèrent dans les travaux algébriques et arithmétiques de l'école allemande des années vingt et trente (Artin, Schreier, Brauer, Hasse, E. Noether, H. L. Schmid, F. K. Schmidt, Tsen, Arf, Teichmüller).

Les résultats obtenus par Witt après la guerre sont moins impressionnants, mais ils témoignent encore d'une grande ouverture d'esprit et d'un sens aigu de la démonstration élégante.

À un titre ou un autre, le lecteur algébriste a rencontré des résultats de Witt. Mais on peut gager que tout comme nous, qui connaissions bien certains de ses travaux, il sera surpris de découvrir dans combien de domaines Witt a laissé des traces et il appréciera l'élégance de ses rédactions (et de la langue), qui n'ont guère vieilli.

Voici, sommairement regroupés, les principaux domaines auxquels Witt a contribué :
1) Théorie du corps de classes, géométrie algébrique en caractéristique positive (matrice de Hasse-Witt), cohomologie galoisienne (particulièrement en caractéristique positive).
2) Corps locaux (invention des vecteurs de Witt).
3) Formes quadratiques sur un corps arbitraire (classification, théorème de simplification de Witt).
4) Courbes algébriques réelles.
5) Algèbres de Lie et systèmes de Coxeter (théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt ; classification des algèbres de Lie simples).
6) Groupes finis et combinatoire (groupes de Mathieu et systèmes de Steiner), réseaux unimodulaires.

En préparant ce rapport, nous avons parcouru de nombreux articles et ouvrages. Il n'est pas question ici d'en faire un bilan systématique. Nous renvoyons le lecteur à l'article d'Ina Kersten cité plus haut et aux divers commentaires inclus dans les Œuvres. Nous nous contenterons ici de rappeler les principales contributions de Witt et de donner de brèves indications sur l'influence qu'ont eue ces contributions. Cette influence a été importante.

Cela tient d'une part à la profondeur des résultats, d'autre part à la perfection de l'exposé (« umfassend und in gewisser Weise abschließend », comme l'écrit P. Roquette). Plusieurs des articles de Witt servirent de référence pendant de nombreuses années.

Pour citer un article, nous utilisons la numérotation adoptée dans les Œuvres.

1) Théorie du corps de classes, géométrie algébrique en caractéristique positive, cohomologie galoisienne (particulièrement en caractéristique positive)

Le résultat de Witt le plus connu dans ces domaines se trouve dans **14** (1936), *Zyklische unverzweigte Erweiterungskörper vom Primzahlgrade p über einem algebraischen Funktionenkörper der Characteristik p* (travail commun avec Hasse), où est introduite la « matrice de Hasse-Witt », qui permet de déterminer le groupe des $\mathbf{Z}/p$-revêtements non ramifiés d'une courbe projective et lisse X définie sur un corps k de caractéristique p. L'interprétation moderne de cette matrice a été donnée par Serre, dans l'article où il introduit la cohomologie à valeurs dans des faisceaux de vecteurs de Witt (Serre, *Œuvres*, article **38** (1958)). Considérons la suite dite d'Artin-Schreier sur le faisceau structural $\mathcal{O}_X$ de la courbe. Lorsque k est séparablement clos, le groupe $H^1_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/p)$ des $\mathbf{Z}/p$-revêtements non ramifiés apparaît comme le noyau de $\mathfrak{p} = \text{Frob}^* - \text{id}$ agissant sur $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ (cohomologie étale ou cohérente). La matrice de Hasse-Witt est l'application additive définie par Frob^* sur le k-vectoriel $H^1(X, \mathcal{O}_X)$, lequel est de dimension le genre g de X. Cette application est p-linéaire. Le noyau de $\mathfrak{p}$ est un groupe $(\mathbf{Z}/p)^\rho$ avec $1 \leqslant \rho \leqslant g$ (le résultat est plus précis). Le cas $g = 1$ avait été considéré antérieurement par Hasse. L'étude des revêtements non ramifiés de groupe $\mathbf{Z}/p^n$ pour $n > 1$ (Schmid et Witt, **15** (1937)) requiert l'usage des vecteurs de Witt (**23**, voir ci-dessous). Ce fut d'ailleurs là leur première application. Les mêmes arguments valent en dimension arbitraire (Serre, *Œuvres*, article **38** (1958) ; cf. Milne, *Étale Cohomology*, p. 127-128). L'usage de la cohomologie à valeurs dans les faisceaux de vecteurs de Witt a connu des développements extrêmement importants : voir Illusie, *Ann. Sc. E.N.S.* **12** (1979) 501-561.

Dans **8** (1934), *Riemann-Rochscher Satz und Z-Funktion im Hyperkomplexen*, Witt établit, sur une courbe projective et lisse C sur un corps k, un théorème de Riemann-Roch pour des cas particuliers de ce que l'on appellera plus tard des fibrés vectoriels sur C (l'article de Witt a été réexaminé de ce point de vue par Brzezinski, *Math. Ann.*, **276**). La recherche d'un théorème de Riemann-Roch pour de telles entités avait à l'époque fait l'objet de quelques travaux, en particulier de Weil (*Œuvres Scientifiques*, articles **1935a**, **1938c** et Commentaires). Lorsque k est un corps fini et A une algèbre simple centrale sur le corps $K = k(C)$ des fonctions rationnelles sur C, Witt définit une fonction zêta attachée à A. En utilisant son théorème de Riemann-Roch, il établit l'équation fonctionnelle de cette fonction zêta. Witt en déduit une démonstration (dans le cas fonctionnel) de l'énoncé suivant de la théorie du corps de classes : Sur le corps K des fonctions rationnelles d'une courbe sur un corps fini, une algèbre simple centrale qui en chaque complétion de K devient une algèbre de matrices est elle-même une algèbre de matrices. Sur les corps de nombres une telle démonstration avait été donnée par K. Hey en 1929 ; pour une version plus récente, voir A. Weil, *Basic Number Theory* (1967).

En utilisant les propriétés de la fonction zêta, Witt obtient également (sans argument spécifique pour la p-torsion) la description du groupe de Brauer d'un corps de fonctions d'une courbe sur un corps fini en termes d'invariants locaux dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, de somme nulle.

L'article **10** (1935), *Der Existenzsatz für abelsche Funktionenkörper*, complète les travaux de Herbrand et Hasse en théorie du corps de classes, dans le cas fonctionnel. Il s'agit ici du « théorème d'existence », dont la p-partie n'était pas alors connue. La théorie d'Artin-Schreier, formalisée ici, et le théorème de Riemann-Roch sont les outils. On note au passage une démonstration de l'analogue additif $H^i(G, K^+) = 0$ du théorème 90 de Hilbert pour K/k une extension galoisienne de groupe G, du moins pour $i = 1, 2$, seuls cas utiles ici (à l'époque on parlait de systèmes de facteurs, c'eût été plus compliqué à écrire pour $i \geqslant 3$). Dans **11** (1936, non publié) Witt traite la question de l'équation fonctionnelle des fonctions L, question mentionnée dans **10**.

L'article **20** (1936), *Konstruktion von galoisschen Körper der Charakteristik p zu vorgegebener Gruppe der Ordnung p^f*, concerne les extensions de groupe $\mathbf{Z}/p^n$ d'un corps k de caractéristique p. Le Corollaire 1, chap. II, 2.2, du livre de Serre, *Cohomologie galoisienne*, Springer LNM **5** (1994) disant que le plus grand pro-p-quotient du groupe de Galois absolu est un pro-p-groupe libre, et la remarque subséquente sur le rang de ce groupe en termes de $k/\mathfrak{p}(k)$, en sont une version à peine modernisée. Les ingrédients de la démonstration sont les mêmes : annulation des groupes $H^1(g,k_s^+)$, $H^2(g,k_s^+)$ (cf. **10**), donc de $H^2(g,\mathbf{Z}/p)$ via la suite d'Artin-Schreier (ici k_s est une clôture séparable de k et g le groupe de Galois de k_s sur k).

Cet article laissait ouverte la question d'un analogue pour $H^1(k,\mathbf{Z}/p^n), n \geqslant 2$, de la formule $k/\mathfrak{p}(k) \simeq H^1(k,\mathbf{Z}/p)$ déduite de la suite d'Artin-Schreier. Pour k parfait, l'article **23** (1937) sur les vecteurs de Witt résoud ce problème (**23**, §5).

Dans **22** (1958), *p-Algebren und Pfaffsche Formen*, Witt montre, « auf völlig neue Weise », que la partie p-primaire du groupe de Brauer d'un corps k de caractéristique p non parfait peut s'exprimer en termes de différentielles de Kähler. Un tel résultat suit aussi des travaux de Cartier (1958), comme le remarquera K. Kato (1980). Ce dernier établira en 1982 la généralisation de ce résultat aux groupes de cohomologie supérieure. Il donnera aussi une description très précise de la partie p-primaire de la cohomologie d'un corps local, lorsque le corps résiduel, non parfait, est de caractéristique p.

L'article **9** (1935), *Über ein Gegenbeispiel zum Normensatz*, a été souvent cité. Il commence (§1) par une démonstration du fait que toute courbe C (géométriquement intègre) sur un corps F fini possède un diviseur de degré 1 (un théorème dû à F. K. Schmidt (1931)). La démonstration de Witt est plus algébrique. Elle utilise des arguments généraux sur la cohomologie galoisienne des courbes sur un corps quelconque. L'hypothèse de finitude de F est utilisée ainsi : elle assure la surjectivité de la norme sur les extensions de F, et elle assure la finitude du groupe des classes de degré nul.

Le §2 de l'article expose ce qu'on appellerait maintenant la théorie des variétés de Severi-Brauer (formes tordues de l'espace projectif) en dimension un : correspondance entre classes de k-isomorphie d'algèbres de quaternions et de coniques.

Notant $k(C)$ le corps des fonctions d'une conique C sur un corps k (car.$(k)\neq 2$), le noyau de l'application de groupes de Brauer $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(k(C))$ est d'ordre au plus 2, engendré par la classe de l'algèbre de quaternions attachée à C.

Parmi les travaux qui prolongèrent cette partie, citons tout d'abord la thèse de F. Châtelet (*Ann. Sc. E.N.S.*, 1945), à qui l'on doit la théorie des variétés de Severi-Brauer en dimension quelconque, puis des travaux d'Amitsur (1955) et de Roquette (1963). Ces variétés ont joué un rôle considérable chez Merkur'ev et Suslin (1982), et des généralisations devraient continuer à jouer un tel rôle, comme dans les travaux en cours de Rost et de Voevodsky.

C'est pour son §3 que cet article est souvent cité : Witt exhibe une conique C sur le corps des rationnels $\mathbf{Q}$, de corps des fonctions $K = \mathbf{Q}(C)$ et un élément non-nul du groupe de Brauer $\mathrm{Br}(K)$ (provenant en fait de $\mathrm{Br}(\mathbf{Q})$) d'image nulle dans $\mathrm{Br}(K_v)$ pour tout complété K_v de K (en une valuation v de K). Ceci peut être vu comme le premier d'une série d'exemples. Pour des courbes de genre plus grand que un avec un point rationnel, on obtient de tels exemples au moyen d'éléments non-triviaux du groupe de Tate-Shafarevich.

Comme le montra Kato (*Crelle*, 1986), pour K un corps de fonctions de d variables sur un corps de nombres k, le groupe de cohomologie pour lequel il doit y avoir un principe local-global est le groupe $H^{d+2}(K,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(d+1))$. Pour $d=0$, ce groupe est le groupe de Brauer de K. Pour les courbes ($d=1$), cette conjecture est prouvée par Kato dans l'article cité.

2) Théorie des corps locaux (invention des vecteurs de Witt)

Cette section des Œuvres regroupe deux articles :

23 (1937) *Zyklische Körper und Algebren der Characteristik p vom Grad p^n (Struktur diskret bewerteter Körper mit vollkommenen Restklassenkörper der Characteristik p).*

24 (non publié, 1969) *Vektorkalkül und Endomorphismen der Einspotenzreihengruppe.*

Le travail **23** est à la base de très importants travaux de géométrie arithmétique contemporaine. L'introduction est très instructive, elle décrit les contributions antérieures d'Artin, Artin-Schreier, Albert, Hasse, F. K. Schmidt, H. L. Schmid, Teichmüller, Witt. Witt définit les composantes fantômes (*Nebenkomponenten*) et établit les propriétés fondamentales d'intégralité des formules d'addition et de multiplication sur les vraies composantes (*Hauptkomponenten*). Pour tout anneau commutatif unitaire A, ces formules définissent une structure d'anneau sur l'ensemble $W(A)$ des suites $(x_0,x_1,...,x_n,...)$, avec $x_i \in A$. Soit p un nombre premier ; supposons A de caractéristique p. Soit $F : A \to A$ l'application qui à $(x_0,x_1,...,x_n,...)$ associe

$(x_0^p, x_1^p, ..., x_n^p, ...)$. Witt introduit l'opération de *Verschiebung* (qui a gardé ce nom), envoyant $(x_0, x_1, ...)$ sur $(0, x_0, x_1, ..)$. Il établit les formules $p.x = VFx = FVx$ (pour tout $x \in W(A)$) et $V^ix.V^jx = V^{i+j}(F^jx.F^iy)$. Il suppose ensuite que A est un corps de caractéristique p, soit $\mathfrak{k}$. Il montre qu'alors $W(\mathfrak{k})$ est un anneau local intègre, de corps résiduel $\mathfrak{k}$, muni d'une valuation (indice du premier vecteur non nul) induisant une topologie pour laquelle $W(\mathfrak{k})$ est complet. Si de plus $\mathfrak{k}$ est parfait ($\mathfrak{k} = \mathfrak{k}^p$; à l'époque un tel corps est appelé *vollkommen*, alors que ce que nous appelons complet est appelé *perfekt*!), alors $W(\mathfrak{k})$ est un anneau de valuation discrète absolument non ramifié, i.e. d'idéal maximal engendré par p, et de corps des fractions de caractéristique nulle.

Witt décrit ensuite le résultat de Teichmüller : pour tout anneau de valuation discrète R complet, de corps résiduel $\mathfrak{k}$ parfait de caractéristique p, il existe un unique système de représentants $S \subset R$ satisfaisant $S^p = S$, multiplicativement clos. Si R est de caractéristique p, alors S est additivement clos : c'est alors un corps de représentants, et R s'identifie à l'anneau des séries formelles en une variable sur $\mathfrak{k}$.

Si R est de caractéristique nulle, $W(\mathfrak{k})$ se plonge naturellement dans R et fait de ce dernier une extension totalement ramifiée (Eisenstein) de $W(\mathfrak{k})$.

Au §5, Witt étudie les extensions cycliques de degré p^n d'un corps k de caractéristique $p > 0$. Soit $W_n(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n.

Le noyau de l'application $\mathfrak{p} = F - 1 : W_n(k) \to W_n(k)$ s'identifie à $W_n(\mathbf{F}_p) = \mathbf{Z}/p^n$. De la suite exacte

$$0 \to \mathbf{Z}/p^n \to W_n(k_s) \to W_n(k_s) \to 0$$

et de $H^1(k, W_n(k_s)) = 0$ (version généralisée de Hilbert 90 additif) Witt déduit l'isomorphisme $W_n(k)/\mathfrak{p}(W_n(k)) \simeq H^1(k, \mathbf{Z}/p^n)$, ce qui est la généralisation cherchée de l'isomorphisme d'Artin-Schreier (cas $n = 1$).

Au §6, Witt étudie les algèbres simples centrales de degré p^n d'un corps k de caractéristique p. En substance, il définit l'accouplement $k^* \times H^2(k, \mathbf{Z}) \to \mathrm{Br}(k)$, plus précisément pour tout n l'accouplement $k^* \times H^1(k, \mathbf{Z}/p^n) \to \mathrm{Br}(k)_{p^n}$, à valeurs dans le sous-groupe des éléments de p^n-torsion du groupe de Brauer. Que cet accouplement soit surjectif (toute p-algèbre est semblable à une somme d'algèbres cycliques) sera montré par Teichmüller (1936).

L'article **24** traite des « grands vecteurs de Witt », découverts semble-t-il indépendamment par Witt et par plusieurs autres auteurs (sous le nom d'« anneau universel », voir l'introduction du livre de Demazure-Gabriel).

L'essai de Harder décrit les principaux développements auxquels l'article de Witt a donné lieu. Nous nous contenterons ici de mentionner les noms de Cohen, Lazard, Dieudonné, Cartier, Manin, Serre, Barsotti, Grothendieck, Berthelot, Ogus, Illusie, Messing, Fontaine (dont les — gros — anneaux de périodes constituent un développement formidable des constructions de Witt), ses élèves, Kato et ses élèves. Les développements de la cohomologie p-adique ces dernières années (cf. *Astérisque* **223** (1994)) ne sauraient être résumés en quelques mots.

3) Classification des formes quadratiques sur un corps arbitraire

L'article **1** (1937), *Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern*, a fait couler beaucoup d'encre. Il met en place la théorie des formes quadratiques sur un corps k quelconque ($\mathrm{car}(k) \neq 2$). Il établit le théorème de simplification de Witt, et le théorème de structure : toute forme est somme d'une forme anisotrope, d'une hyperbolique et de son noyau. Witt montre que deux formes diagonales isomorphes le sont par une suite de transformations n'affectant que deux coordonnées à la fois. Il définit le groupe de Witt des formes quadratiques et le munit d'une structure d'anneau. A toute forme quadratique sur un corps k on savait associer son discriminant à valeurs dans $k^*/k^{*2} = H^1(k, \mathbf{Z}/2)$. Généralisant ce que Minkowski (sur $\mathbf{Q}$) et Hasse (sur un corps de nombres quelconque) avaient fait, E. Artin avait défini un second invariant, à valeurs dans la 2-torsion $H^2(k, \mathbf{Z}/2)$ du groupe de Brauer $\mathrm{Br}(k)$. C'est une variante de cet invariant que l'on trouve, sous le nom d'invariant de Hasse, de Hasse-Witt ou de Clifford, dans la littérature (voir T.Y. Lam, *The Algebraic Theory of Quadratic Forms*, p. 122). Cet invariant était défini en termes d'une diagonalisation d'une forme. Dans son article, Witt définit directement ce qu'il appelle l'algèbre de Clifford d'une forme quadratique sur un corps quelconque, en étudie le comportement sur une somme orthogonale et établit le lien avec l'invariant proposé par Artin.

Dans la suite de l'article, Witt passe en revue la théorie des formes sur un corps local et sur un corps de nombres (son article servira par la suite de référence, quand bien même les résultats dans ce cas sont essentiellement dus à Minkowski et Hasse) et termine par un joli théorème sur les formes quadratiques sur les corps de fonctions d'une variable sur les réels (voir **4** ci-après).

À la fin des années 60, Witt reviendra sur ce sujet. Il donnera des démonstrations simplifiées de résultats de Pfister sur les formes multiplicatives (**6**, voir F. Lorenz, Springer LNM **130**) et du théorème de norme de Knebusch (**7**).

Parmi les développements ultérieurs, citons :

1) La notion de groupe algébrique anisotrope : A Witt-type theorem for the semisimple groups, p. 43 de l'article de J. Tits, *Classification of algebraic semisimple groups*, 33-62, in *Algebraic groups and discontinuous subgroups*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol IX, Amer. Math. Soc. 1966.

2) La « théorie algébrique des formes quadratiques », principalement sur un corps : Formes multiplicatives (Pfister, aussi Witt), théorèmes de norme de Knebusch et de Scharlau, théorème d'Arason-Pfister selon lequel l'intersection des puissances de l'idéal fondamental $I(k) \subset W(k)$ (idéal des classes de formes de rang pair) est nulle, suite exacte de Milnor (et Tate) calculant le groupe de Witt du corps $k(t)$ des fractions rationnelles en une variable. On consultera le livre de Lam, déjà cité, et le livre de W. Scharlau pour les développements principaux antérieurs aux travaux fondamentaux de Merkur'ev et Suslin.

3) La recherche des invariants supérieurs sur un corps k : Liens entre la K-théorie de Milnor de k, l'anneau de Witt de k et la cohomologie galoisienne à coefficients $\mathbf{Z}/2$ de k (questions posées dans un article de Milnor). Travaux de Arason, Merkur'ev, Suslin, Rost, résultats annoncés par Voevodsky *et al.*

4) Définition des groupes de Witt et de L-théorie des anneaux et des schémas, étude de ces groupes.

4) Courbes algébriques réelles

Les contributions de Witt se trouvent dans les articles **1** (cité ci-dessus) et **12** (1934), *Zerlegung reeller algebraischer Funktionen in Quadrate. Schiefkörper über reellem Funktionenkörper*. Le sujet avait été considéré au dix-neuvième siècle par Hurwitz, Klein, Weichold, Harnack (inégalité $s \leqslant g+1$ pour le nombre s de composantes connexes réelles d'une courbe réelle de genre g). Hilbert (dix-septième problème) avait soulevé la question des sommes de carrés dans les corps de fonctions. Après les travaux de Hilbert et de Landau, le travail d'Artin et Schreier sur les corps réels clos et la caractérisation des sommes de carrés dans un corps comme éléments totalement positifs avait mené au brillant résultat d'E. Artin en 1926 : si une fonction rationnelle f sur une variété irréductible réelle X ne prend que des valeurs positives sur l'ensemble $X(\mathbf{R})$ des points réels de X, alors f est une somme de carrés dans le corps des fonctions $\mathbf{R}(X)$.

En Italie, Comessatti avait obtenu des résultats intéressants dans d'autres directions (variétés abéliennes réelles, surfaces rationnelles réelles). On consultera à ce sujet l'article de C. Ciliberto et C. Pedrini, Annibale Comessatti and real algebraic geometry, *in* Algebra e geometria (1860-1940) : il contributo italiano, Brigaglia, A. (ed.) *et al.*, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. **36** (1994), 71-102.

En termes modernes, Witt exploite d'une part les résultats de Weichold, d'autre part le théorème de Tsen et la cohomologie galoisienne. Notons $C/\mathbf{R}$ une courbe algébrique réelle, projective, lisse, géométriquement connexe, et $\mathbf{R}(C)$ son corps des fonctions rationnelles. Witt obtint les résultats suivants :

1) Toute fonction rationnelle qui est positive sur $C(\mathbf{R})$ est somme de deux carrés.

2) Si l'on se donne une décomposition de $C(\mathbf{R})$ comme union finie d'intervalles deux à deux disjoints (aux extrémités près), et si l'on se donne sur chaque intervalle un signe ($\pm$), il existe une fonction rationnelle qui prend sur ces intervalles ces signes (là où elle est définie). Parmi les conséquences de ce résultat, citons : Pour la jacobienne J d'une courbe C telle que $C(\mathbf{R})$ ait $s \geqslant 1$ composantes connexes, les groupes $\hat{H}^0(\mathbf{C}/\mathbf{R}, J(\mathbf{C}))$ et $\hat{H}^1(\mathbf{C}/\mathbf{R}, J(\mathbf{C}))$ ont le même ordre 2^{s-1}.

3) Pour qu'une forme quadratique en au moins trois variables sur $\mathbf{R}(C)$ soit isotrope, il faut et il suffit que, sur un ensemble dense de points $P \in C(\mathbf{R})$, la forme évaluée en P soit isotrope.

Là encore, l'influence de Witt fut importante. Parmi les directions qui furent explorées, citons :

1) Etude, pour un corps formellement réel k, de l'application signature (Sylvester) $W(k) \to \mathrm{Cont}(X, \mathbf{Z})$, où X est l'espace des ordres du corps k muni d'une topologie convenable et $\mathrm{Cont}(X, \mathbf{Z})$ l'espace des applications continues de X à valeurs dans $\mathbf{Z}$ (travaux de Becker, Bröcker (*Stabilitätsindex*), Prestel, Arason, Elman, Lam).

2) Généralisations des résultats de Witt aux corps de base réels clos (Geyer, Pfister, Delfs-Knebusch).

3) Sommes de carrés dans les corps de fonctions (Ax, Pfister). C'est un résultat de Pfister (1967) que toute somme de carrés dans un corps de fonctions de d variables sur $\mathbf{R}$ (et plus généralement sur un corps réel clos) est somme d'au plus 2^d carrés. Des extensions aux sommes de puissances n-ièmes sont dues à Becker.

4) Etude des « applications cycles » allant du groupe de Chow d'une variété X algébrique réelle dans l'homologie de $X(\mathbf{R})$.

5) Fibrés vectoriels sur une variété algébrique réelle et fibrés topologiques induits sur l'espace des points réels.

6) Séparation des composantes connexes par les fibrés quadratiques (question de Knebusch résolue par Mahé).

7) Cohomologie étale des variétés réelles (voir C. Scheiderer, *Real and étale Cohomology*, Springer LNM **1588**).

8) Etude des espaces (principaux) homogènes sous un groupe linéaire sur un corps k lorsque la dimension cohomologique de $k(\sqrt{-1})$ est 1 ou 2.

9) Interprétation de l'énoncé $\hat{H}^0(\mathbf{C}/\mathbf{R}, J(\mathbf{C})) \simeq \hat{H}^1(\mathbf{C}/\mathbf{R}, J(\mathbf{C}))$ comme analogue réel du théorème de dualité de Tate (1957) pour les variétés abéliennes sur un corps p-adique (voir l'étude subséquente de Lichtenbaum sur la cohomologie des courbes sur les corps p-adiques).

Terminons par une question intéressante, soulevée par Pfister : Soit $\mathbf{R}(X)$ le corps des fonctions d'une $\mathbf{R}$-surface algébrique X sans point réel. On sait que toute forme quadratique en au moins 7 variables sur le corps $\mathbf{R}(X)$ possède un zéro non-trivial. Est-ce vrai pour toute forme en au moins 5 variables ?

5) Algèbres de Lie et systèmes de Coxeter

Witt semble avoir donné, parallèlement à Jacobson, les premiers exemples d'algèbre de Lie non standard en caractéristique p (voir article **30**, p. 276). C'est un sujet qui a connu de nombreux développements (p-algèbres de Lie).

Dans **25** (1937), *Treue Darstellung Liescher Ringe*, Witt introduit d'abord l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie sur un corps — qu'il caractérise par sa propriété universelle — et établit le théorème maintenant connu sous le nom de théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt. Ensuite, il étudie l'algèbre de Lie libre à q générateurs L_q et son algèbre enveloppante A_q. Il démontre que l'espace des éléments homogènes de degré n de L_q est de dimension

$$\psi_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) \cdot q^{\frac{d}{n}},$$

où μ est la fonction de Möbius, et que A_q est une algèbre libre à q générateurs. Dans la dernière partie de son article, s'inspirant des travaux de Magnus, il applique ces résultats à l'étude des quotients $F^{(n)}/F^{(n+1)}$ où F est le groupe libre à q générateurs et $F^{(2)} = [F, F]$, $F^{(3)} = [F, F^{(2)}]$, *etc.* Il démontre que $F^{(n)}/F^{(n+1)}$ est un groupe abélien libre de rang ψ_n, que l'intersection de tous les $F^{(n)}$ est réduite à l'élément neutre, et que le centre de $F/F^{(n+1)}$ est $F^{(n)}/F^{(n+1)}$.

Il reprendra ces questions dans **26** (1953), *Treue Darstellung beliebiger Liescher Ringe*, où il démontre l'existence d'une Ω-algèbre enveloppante A pour tout algèbre de Lie L sur un anneau commutatif Ω et l'injectivité de $L \to A$ pour une classe d'anneaux Ω qui inclut les anneaux principaux. Ce résultat a aussi été démontré par Širšov, qui a également donné un contre-exemple à l'injectivité dans le cas général. Dans **29** (1956), *Die Unterringe der* *freien Lieschen Ringe*, il étudie les générateurs et relations d'une sous-algèbre de Lie U d'une Ω-algèbre de Lie L donnée par générateurs et relations. Il arrive à déterminer, sous certaines conditions (toujours satisfaites lorsque Ω est un corps), un ensemble de générateurs et relations pour U. En particulier, si L est libre, U est aussi libre, ce qui est l'analogue, pour les algèbres de Lie sur un corps, du théorème de Schreier sur les groupes. Si Ω est l'anneau des entiers, il démontre que toute sous-algèbre U homogène est libre, pourvu que L/U soit un groupe abélien libre ou que L soit de génération finie et L/U sans torsion.

Il n'est pas opportun, ici, de s'étendre sur le développement des algèbres enveloppantes. Pour en avoir une idée il suffira de consulter, par exemple, le livre de J. Dixmier *Algèbres enveloppantes* (Gauthier-Villars, 1974). Les relations entre les quotients de la suite centrale descendante et les algèbres de Lie ont été étudiées dans la thèse de Lazard (*Ann. Sci. ENS* **71** (1954)) et ensuite, entre autres, par des mathématiciens russes, comme le montre la bibliographie du livre de J.A. Bahturin *Lectures on Lie Algebras*, Berlin, 1978.

L'article **27** (1937), *Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Liescher Ringe* fait suite à une série de travaux antérieurs : Killing, Elie Cartan, Weyl, Schouten, van der Waerden, Coxeter. La démarche de Witt se retrouvera dans les rédactions de Tits et de Bourbaki sur les systèmes de racines.

Van der Waerden avait montré que la classification des algèbres de Lie simples complexes est équivalente à celle des systèmes de racines réduits, ou plutôt montré qu'à un système de racines donné correspondait au plus une algèbre de Lie simple complexe. Coxeter avait étudié et classifié les groupes qui portent son nom. Witt mit tout ensemble. Tout d'abord il donne une démonstration élégante des résultats de Coxeter. Ensuite il classifie des « diagrammes de vecteurs » qui sont des généralisations des systèmes de racines réduits (on omet la condition $s_\alpha(\beta) - \beta \in \mathbb{Z}\alpha$). À ceux-ci il associe un groupe de Coxeter, auquel il associe, comme Coxeter, des *Figuren* (une variante évidente des diagrammes dits maintenant de Coxeter, donnant une présentation des groupes de Coxeter). Il classifie ces *Figuren.* Il y en a de deux types, celles correspondant à un groupe fini (il retrouve la liste de Coxeter) et celles correspondant à un groupe infini : la liste qu'il obtient est entièrement nouvelle. Se servant de résultats de E. Cartan et H. Weyl, il associe à toute algèbre de Lie simple complexe un *Vektordiagramm.* Il donne ensuite la liste des *Figuren* qui peuvent correspondre à de tels diagrammes. Enfin, il établit l'existence d'algèbres pour chaque type de diagramme. Witt fut ainsi le premier à utiliser des diagrammes pour classifier les algèbres simples. Le travail de Dynkin (années 1944/1947) est indépendant mais postérieur. Le travail de Witt concerne aussi des groupes de Coxeter infinis.

6) Théorie des groupes finis (groupes de Mathieu et systèmes de Steiner), théorie des réseaux unimodulaires

En 1861, Émile Mathieu avait publié la construction de son groupe M_{12} et annoncé sans démonstration l'existence de M_{24}. Cette découverte ne semble pas avoir soulevé beaucoup d'intérêt chez les contemporains, bien que Jordan donne les générateurs de M_{12} dans son *Traité des substitutions* et que Frobenius, dans son article sur les caractères des groupes plusieurs fois transitifs, parle de M_{24} comme s'il s'agissait d'un groupe bien connu. La première construction digeste des groupes de Mathieu est sans doute celle de **32** (1938), *Die 5-fach transitiven Gruppen von Mathieu*. Dans cet article, Witt démontre d'abord un critère pour construire un groupe t-transitif sur $s+t$ éléments, à partir d'un groupe 2-transitif sur $s+2$ éléments. Ensuite il applique ce critère au groupe $SL(3, \mathbb{F}_4)$ qui agit de façon doublement transitive sur les 21 points de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_4)$ et obtient un groupe M_{24} qui agit de façon quintuplement transitive sur un ensemble de 24 points. Il déduit facilement de la simplicité de $SL(3, \mathbb{F}_4)$ celle de M_{24}. La construction de M_{12} est basée sur le même principe.

Dans ce même article il montre comment on peut associer à un groupe t-transitif sur n points des systèmes de Steiner du type $S(t, m, n)$. Il s'agit de construire un système de $\binom{n}{t}/\binom{m}{t}$ blocs à m points de telle façon que tout ensemble de t points soit contenu dans un unique bloc. En utilisant ce résultat général, il associe à M_{24} un système de Steiner $S(5, 8, 24)$ et à M_{12} un $S(5, 6, 12)$. Pour terminer il démontre que M_{24} et M_{12} sont, respectivement, le groupe des automorphismes des systèmes $S(5, 8, 24)$ et $S(5, 6, 12)$ qu'il a construits.

L'article **33** (1938), *Über Steinersche Systeme*, publié dans le même journal à la suite de **32**, traite des systèmes de Steiner. Il contient, entre autres, la démonstration de l'unicité de $S(4, 5, 11)$, $S(5, 6, 12)$, $S(4, 7, 23)$, et $S(5, 8, 24)$ et les deux principales conjectures sur les systèmes de Steiner :

(a) Les $S(2, q^2, q)$ et les $S(2, q^2+q+1, q+1)$ n'existent que si q est une puissance d'un premier.

(b) Tout $S(q^2, q, 2)$ (respectivement tout $S(q^2+q+1, q+1, 2)$) est un plan affine (respectivement projectif) sur $\mathbb{F}_q$, les blocs étant, dans les deux cas, les droites.

Ces conjectures sont encore ouvertes.

Ces articles ont eu une influence considérable. Celui sur les groupes de Mathieu est resté une des plus agréables introductions au sujet. Les groupes de Mathieu ont été mis en relation avec les codes de Golay (M_{24}, par exemple, est le groupe d'automorphismes du code binaire étendu de Golay) et les systèmes de Steiner ont été étudiés dans le cadre plus général des « block designs » (on demande que t points appartiennent exactement à un nombre fixé λ de blocs). Toutefois les systèmes particuliers étudiés par Witt restent, dans toute théorie, des singularités d'une envoûtante beauté.

Il faut féliciter l'éditrice du livre d'avoir mis tant de soin dans la publications des papiers inédits. À propos des systèmes de Steiner, elle nous révèle que Witt, en étudiant le système $S(5, 8, 24)$, découvrit, en 1940, le réseau de Leech (étudié par ce dernier en 1967) et détermina l'ordre de son groupe d'automorphismes. Il en interrompit l'étude parce qu'il ne contribuait qu'en très petite mesure à la densité de Minkowski-Siegel des réseaux unimodulaires de dimension 24.

Dans **37** (1941), *Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades*, Witt étudie les classes de formes unimodulaires paires définies positives en dimension 16. Il décrit celles qu'aujourd'hui on note d'habitude E_8^2 et D_{16}. Il calcule l'ordre de leurs groupes d'automorphismes et démontre, à l'aide de la formule « des masses » de Minkowski-Siegel, qu'elles sont les seules. Il trouve aussi une condition pour qu'une forme modulaire de degré 2 soit identiquement nulle et utilise ce résultat pour démontrer que non seulement tous les entiers naturels sont représentés le même nombre de fois par E_8^2 que par D_{16}, mais que ceci vaut également pour toutes les formes binaires. Le même résultat pour les formes ternaires sera démontré indépendamment par Igusa et Kneser en 1967.

Une conséquence intéressante de l'existence de ces deux formes est la remarque, faite par Milnor en 1964, que les variétés riemanniennes $\mathbf{R}^{16}/E_8^2$ et $\mathbf{R}^{16}/D_{16}$ sont isospectrales pour le laplacien, mais ne sont pas isométriques.

Dans ce même travail, Witt dit avoir trouvé plus de 10 classes de formes unimodulaires paires positives définies de dimension 24. Il ajoute que la détermination de leur nombre exact semble être un problème difficile. En effet, ce problème ne sera résolu qu'en 1973, par Niemeier. Il est impossible de s'étendre sur les développements de ces questions. Le lecteur pourra se référer au livre de Conway et Sloane, (*Sphere Packings, Lattices and Groups*, Grundlehren **290**, Springer-Verlag) qui décrit aussi les liens avec les codes autocorrecteurs.

Un autre article délicieux est **36** (1955), *Über die Kommutatorgruppe kompakter Gruppen*, dans lequel Witt démontre que dans tout groupe compact qui possède un sous-groupe abélien d'indice fini, le sous-groupe des commutateurs est fermé. La démonstration n'est pas difficile, mais l'exemple qu'il donne, d'un groupe compact avec un groupe dérivé non fermé, est un bijou.

J.-L. Colliot-Thélène, CNRS/Université de Paris-Sud
M. Ojanguren, Université de Lausanne

Philosophie des mathématiques et de la modélisation (du chercheur à l'ingénieur)
N. Bouleau
l'Harmattan, 1999

Ce livre foisonnant suit assez fidèlement le programme annoncé dans le titre et le sous-titre. L'auteur donne tout d'abord une description bien venue de l'activité du mathématicien. Il essaye ensuite de faire sentir la différence entre ce que sont les mathématiques pures et appliquées (l'auteur préfère les appeler mathématiques mixtes suivant en cela Francis Bacon). Il se termine après un long détour philosophique et historique par des réflexions sur l'utilité des mathématiques pour les ingénieurs et comment elles devraient leur être enseignées.

Le passé de l'auteur, ingénieur, mathématicien pur frotté aux applications, urbaniste et enseignant, et son intérêt pour la philosophie et l'histoire des mathématiques, lui permettent de dresser un vaste panorama sur les buts des mathématiques (inventer des concepts simplificateurs et unificateurs), sur leur utilité, sur la signification des résultats (en particulier sur les nombreuses interprétations possibles d'une théorie), sur la modélisation mathématique (hiérarchie des modèles, modèles concurrents, importance des hypothèses à la base du modèle,...) et sur l'apport de l'informatique. Il insiste sur l'importance du passage des « mathématiques modernes » des année 1960 aux « mathématiques post-modernes » et estime que les débats actuels sur l'utilité des mathématiques sont biaisés par la méconnaissance de cette évolution chez les décideurs et les citoyens, au passage il procède à une réhabilitation de Bourbaki qu'il distingue du bourbakisme.

Un livre qui se prête à plusieurs lectures. On peut le lire en mathématicien pour avoir une vue d'ensemble sur l'évolution de sa discipline d'un point de vue philosophique. On peut le lire en honnête homme pour comprendre les buts et les méthodes des mathématiciens purs et appliqués. On peut aussi le lire en citoyen pour saisir l'apport des mathématiques pures à la science et la technologie, pour percevoir l'utilisation omniprésente des modèles mathématiques par les décideurs et les ingénieurs et pour découvrir les dangers d'une modélisation débridée non soumise à la discussion et à la critique.

D. Barsky, CNRS/Université de Paris-Nord

Petits problèmes de géométries et d'algèbre
F. Sauvageot
Collection scopos, vol. 7, Springer, 2000

Face à la tentation de reproduire ici l'avant-propos de l'auteur et au risque de le paraphraser, j'en extrais cette phrase : *Il ne s'agit donc ni d'un livre d'exercices, ni d'un livre de cours, mais plutôt d'un manuel pour « apprendre des mathématiques »*.

Le livre présente vingt-neuf *petits problèmes* – le choix de ce terme au lieu de celui d'*exercices* est on ne peut plus judicieux, même s'il s'agit de sujets d'oraux posés au concours d'entrée à l'École normale supérieure de Cachan – et un problème, sujet d'écrit du même concours en 1995 (complété par deux parties non posées alors).

Les petits problèmes sont regroupés en six thèmes (exemple : *Problèmes de densité*). Pour chacun un petit préambule permet de mettre en perspective les problèmes proposés, aussi bien du point de vue historique que de celui des buts, méthodes et modes de raisonnement en mathématiques. Suivent des énoncés appétissants, certains de quelques lignes (*Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et à valeurs positives. À quelle(s) condition(s) $g = \sqrt{f}$ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?*), d'autres plus longs qui introduisent les outils de la démonstration, comme « Le théorème de Brouwer en dimension 2 » qui procède par découpage d'un triangle équilatéral en n^2 triangles équilatéraux puis coloriage des sommets.

Après avoir erré quelque temps et avoir pris connaissance des indications en fin de volume, comme le suggère l'auteur, ou plus vite pour ceux que la curiosité rend impatients, on se reporte aux solutions. Elles sont complètes et claires, et leur rédaction est tout simplement accueillante : le lecteur est guidé tout au long du raisonnement et découvre que ses connaissances mathématiques lui permettent vraiment de résoudre les jolis problèmes posés. (Noter que les connaissances requises sont celles d'un programme de classes préparatoires ou de *deug* bien assimilé et qu'elles sont entièrement exploitées : c'est bien l'utilisation des concepts et résultats découverts dans ces classes qui mène à la solution.)

La plupart des solutions sont complétées par des commentaires qui sont autant de passerelles vers les mathématiques de la recherche car ils les « racontent » ; c'est une invitation au voyage, avec références à la clé. Les commentaires du petit problème 6, « Transcendance de e », donnent une démonstration de la transcendance de π. Ceux du petit problème 4, « Théorème de Fermat pour les polynômes », donnent, pour la bonne bouche, la résolution dans le cas $n = 3$ du théorème de Fermat telle que l'a donnée Gauss.

En plus de tout ceci, ce qui fait de cet ouvrage un *manuel pour apprendre des mathématiques*, c'est la grande variété des méthodes utilisées et leur décloisonnement : algèbre, analyse, géométrie, arithmétique s'enrichissent de leur interaction. Ainsi le treizième petit problème, « Polygones à sommets entiers », est résolu grâce à l'étude des propriétés arithmétiques de $\mathbb{Z}[i]$. Le deuxième, « Résolution des équations de degré 4 », est basé sur l'étude de l'intersection de deux coniques et la recherche de coniques dégénérées dans un faisceau de coniques ; ne pas manquer les commentaires : ils décrivent la méthode fort élégante de résolution des équations de degré 3 qui a obtenu le prix Fermat junior il y a quelques années.

Quant au problème, il est en lui-même un modèle de décloisonnement : il s'agit d'une démonstration du « grand théorème de Poncelet » utilisant les fonctions elliptiques. On y rencontre donc équations différentielles, géométrie plane, algèbre linéaire...

S'il est destiné en premier lieu aux étudiants des classes préparatoires, qui y trouveront aussi quelques conseils relatifs aux épreuves orales, ce livre réjouira tout amoureux des mathématiques : pour le plaisir !

C. Blondel, CNRS/Université de Paris 7

La collection SCOPOS dirigée par J.-M. Ghidaglia (de chez Springer), est précisément destinée à publier des livres de travail sur les mathématiques (ainsi que la physique et l'informatique). À partir de questions posées au concours d'entrée de l'ENS Cachan, soit à l'oral soit à l'écrit, les étudiants sont amenés à mettre en place des raisonnements qui allient réflexion théorique et calculs. Le numéro 4 de cette collection est écrit par J.-M. Ghidaglia et est consacré à l'analyse : *petits problèmes d'analyse.* On y trouve 40 questions d'oral regroupées par thèmes : inégalités fonctionnelles, fonctions implicites, équations différentielles, séries de Fourier... et 4 « vrais » problèmes. Dans les solutions, l'auteur a essayé de prévenir les erreurs éventuelles des étudiants, en expliquant à l'aide de contre-exemples ce dont il faut se méfier. Les commentaires à la fin de chaque démonstration, révèlent les énoncés mathématiques (généraux) qui sont à l'origine de la question. Les candidats aux concours de recrutement de professeurs auront grand intérêt à s'exercer avec ce livre comme avec celui qui est recensé ci-dessus.

Exercices de Probabilités
M. Cottrel, V. Genon-Catalot, C. Duhamel, T. Meyre
Cassini, Paris, 1999

Ce recueil d'exercices recouvre le programme de probabilités de la maîtrise de mathématiques : formalisme de la théorie des probabilités, lois de probabilités usuelles, différents types de convergence, espérances conditionnelles, vecteurs aléatoires gaussiens, martingales à temps discrets et chaînes de Markov.

Chaque chapitre débute par un rappel de cours et comporte une vingtaine d'exercices variés : applications, contre-exemples, démonstrations de résultats importants... Les corrigés des exercices sont détaillés et souvent enrichis d'une deuxième solution ou de remarques d'ordre général.

Cet ouvrage permet donc aux étudiants de maîtrise et aux agrégatifs ayant choisi l'option de probabilités d'acquérir une bonne pratique et d'approfondir leurs connaissances sur les notions fondamentales de la théorie des probabilités. Les premiers chapitres peuvent également servir de référence aux étudiants de licence ayant suivi un cours de théorie de la mesure et d'intégration, ainsi qu'à ceux qui préparent le CAPES.

M. Pelletier, Université de Versailles-Saint Quentin

New Directions in Dirichlet Forms
J. Jost, W.S. Kendall, U. Mosco, M. Röckner, K.T. Sturm
Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, AMS, 1998

La théorie des formes de Dirichlet trouve son origine dans l'utilisation de méthodes liées à l'*énergie* en théorie classique du potentiel. C'est ainsi que Gauss, guidé par le modèle électrostatique, avait introduit l'énergie d'une « mesure » μ comme $E(\mu) = \int U^\mu d\mu$ où U^μ est le potentiel engendré par μ. Un peu plus tard, Riemann introduisait l'*intégrale de Dirichlet* $I(f) = \int |\nabla f|^2 dx$ pour résoudre le *problème de Dirichlet* par une méthode de minimisation. Les deux intégrales précédentes sont liées (à constante multiplicative près et sous des hypothèses de régularité) par l'égalité : $I(U^\mu) = E(\mu)$. Les méthodes d'énergie en théorie du potentiel ont été ensuite utilisées de façon systématique, dans des cadres de plus en plus généraux, dans les travaux de O. Frostman (1935), H. Cartan (1945) et J. Deny (1950). C'est en 1958-1959 que A. Beurling et J. Deny ont introduit, dans deux articles fondamentaux, une théorie axiomatique de l'intégrale de Dirichlet basée sur la remarque que, si φ est une fonction lipschitzienne de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de rapport 1, $I(\varphi \circ f) \leqslant I(f)$. Cette propriété de l'intégrale de Dirichlet d'être diminuée par les contractions est l'un des axiomes fondamentaux de la théorie de Beurling et Deny des *espaces de Dirichlet*. Ils ont montré qu'elle suffisait pour retrouver, via la théorie des espaces de Hilbert, de nombreuses propriétés de la théorie classique du potentiel. Une nouvelle impulsion décisive a été donnée par la théorie probabiliste des espaces de Dirichlet, dans la lignée des travaux de G.A. Hunt, E.B. Dynkin,... Elle est dûe, pour l'essentiel, à M.L. Silverstein (1976) et à M. Fukushima (1971). La théorie générale des formes de Dirichlet, sous son double aspect analytique et probabiliste, est exposée de façon magistrale dans le livre de M. Fukushima, *Dirichlet forms and Markov processes*, paru en 1980 et qui a fait l'objet d'une édition augmentée, avec la collaboration de Y. Oshima et M. Takeda, en 1994. À partir de 1975, et surtout après la parution du livre de Fukushima, les idées et les méthodes de la théorie des formes de Dirichlet ont été appliquées avec succès dans des domaines très variés, notamment en dimension infinie (théorie des champs, espace de Wiener, analyse stochastique), dans l'étude des équations aux dérivées partielles dégénérées à coefficients irréguliers ou dans celle des opérateurs pseudo-différentiels, en théorie de l'homogénéïsation...

Le livre *New Directions in Dirichlet Forms* fait le point sur de nouveaux champs d'application de la théorie des formes de Dirichlet. Il est constitué de cinq exposés basés sur des mini-cours donnés dans le cadre d'une école d'été qui s'est tenue à Anogia (Crète) en 1997.

Dans « Nonlinear Dirichlet Forms », J. Jost présente des travaux récents motivés par la théorie des applications harmoniques entre variétés. Celles-ci peuvent être définies comme minimisant une intégrale de Dirichlet dont l'axiomatisation conduit à une théorie des *formes* *de Dirichlet non linéaires.* Ces formes, sous des hypothèses adéquates de convexité et de courbure négative, conservent une partie des propriétés des formes classiques. Par exemple, la méthode de Crandall et Liggett de construction de semi-groupes peut être adaptée. On peut ainsi démontrer, dans des cadres généraux contenant celui de la géométrie riemannienne, des résultats d'existence et de régularité de fonctions minimisantes.

Dans le deuxième exposé intitulé « From stochastic parallel transport to harmonic maps », W.S. Kendall entend montrer comment développer le calcul stochastique sur les variétés sous forme intrinsèque et utiliser ce calcul pour étudier l'influence de la géométrie sur le comportement des processus. L'aspect proprement « formes de Dirichlet » n'est pas véritablement présent dans ce texte qui débute par un exposé général et très bien fait sur plusieurs aspects fondamentaux de la géométrie différentielle stochastique telle qu'elle s'est développée au cours de ces vingt dernières années. À la base, figure la théorie du développement stochastique défini en utilisant le transport parallèle stochastique et qui permet notamment de définir la notion de martingale sur les variétés et de donner une *formule d'Itô géométrique.* D'autres outils probabilistes (convergence de martingales, méthode de couplage) permettent à l'auteur de donner des exemples de résultats d'analyse et géométrie pouvant être obtenus par cette approche probabiliste, en particulier dans la théorie des fonctions harmoniques entre variétes pour lesquelles il montre des théorèmes du type théorème de Liouville ou de Picard ainsi que des résultats concernant la résolution du problème de Dirichlet.

U. Mosco, dans son exposé intitulé « Dirichlet forms and self-similarity », développe une théorie des *fractals variationnels*, c'est-à-dire des structures fractales auto-similaires homogènes sur lesquelles est définie une forme de Dirichlet locale ayant les propriétés d'auto-similarité correspondantes. Le problème de l'existence d'une telle forme est un problème difficile qui n'est pas abordé dans ces notes. Il faut signaler que parmi les méthodes analytiques ou probabilistes de construction, la principale consiste à approximer le fractal par des structures discrètes, voire finies ; or c'était précisément l'idéee originale de Beurling et Deny d'approximer toute forme de Dirichlet par des formes sur les ensembles finis, ce qu'ils ont appelé « le cas élémentaire ». La théorie des fractals variationnels exposée dans ces notes a plusieurs points communs avec celle de l'homogénéïsation. Différentes notions de dimension sont définies, notamment une *dimension homogène* (ou *intrinsèque*) qui permet de donner une formule asymptotique du type de celle de H. Weyl sur le spectre du générateur de la forme ainsi que des propriétés de plongement du type Morrey-Sobolev.

Dans « Stochastic analysis on configuration spaces : basic ideas and recent results », M. Röckner brosse un tableau des résultats qu'il a obtenus avec divers collaborateurs au cours des dernières années sur l'*espace des configurations* d'une variété riemannienne X, c'est-à-dire sur l'espace Γ des mesures de Radon ponctuelles sur X. Le point central est l'étude de formes de Dirichlet sur Γ du type $\int \langle \nabla^\Gamma F, \nabla^\Gamma G \rangle d\mu$ où μ est une mesure sur Γ et ∇^Γ un gradient défini par « relèvement ». Les résultats les plus complets sont obtenus quand μ est une mesure de Poisson d'intensité proportionnelle à la mesure de volume de la variété ou une intégrale de telles mesures. Dans ce cas, la forme est associée à une diffusion conservative qui peut être vue comme un processus constitué d'une infinité de browniens de la variété indépendants. L'auteur étudie plus généralement le cas où μ est une mesure de Gibbs associée à un potentiel d'interaction. Dans ce cas aussi, il établit le lien avec les systèmes infinis de particules.

Le dernier exposé, « The geometric aspect of Dirichlet forms », est dû à K.T. Sturm. Il y montre notamment différentes utilisations de la notion de *distance intrinsèque* associée à une forme de Dirichlet (notion introduite par Biroli et Mosco (1991)). Un résultat typique est le suivant : soit $v(r) = m(B_r(x_0))$ où m est la mesure de référence et $B_r(x_0)$ la boule intrinsèque de centre x_0 et de rayon r. Alors, si $\int_1^\infty [v'(r)]^{-1} dr = +\infty$, la forme est récurrente. L'exposé contient beaucoup d'autres résultats et estimations, notamment en termes de *fonctions d'exhaustion* et s'achève par l'étude détaillée de plusieurs exemples significatifs.

En conclusion, ce livre correspond bien à son titre. Il montre comment la théorie des formes de Dirichlet, développée à l'origine pour éclairer la théorie du potentiel, s'est révélée bien adaptée à l'étude de domaines nouveaux et comment ces nouveaux champs d'application ont conduit en retour à un renouvellement de la théorie, de ses concepts et de ses outils fondamentaux. De plus, écrit de façon vivante, sa lecture en est agréable et stimulante.

F. Hirsch, Université d'Evry-Val-d'Essonne

Partial Differential Equations
L.C. Evans
Graduate Studies in Mathematics Vol. 19, édité par l'AMS

Auriez-vous osé traiter, dans un seul ouvrage, du thème des équation aux dérivées partielles dans son ensemble, c'est-à-dire des EDP linéaires et non-linéaires, des relations avec le calcul des variations, l'optimisation et le contôle, des systèmes de lois de conservation et des ondes de choc, des méthodes d'analyse fonctionnelle et des espaces de Sobolev. Le tout accessible au niveau licence et s'appuyant sur les approches les plus récentes à ce vaste sujet qui progresse rapidement dans de multiples directions. Relever ce défi est impossible si vous n'avez pas élaboré vos propres principes généraux sur les développements modernes et les fondements historiques de ce domaine. Ces principes, L.C. Evans les énonce clairement à travers des choix explicites. Tout d'abord, cet ouvrage traite des EDP comme un sujet unifié des mathématiques et les notations sont consistantes à travers le texte, parfois en contradiction avec les conventions de certains domaines. Le second principe est que les solutions représentent bien la question centrale du sujet et on peut l'aborder du point de vue des formules de représentations aussi bien que par des théories d'existence. Un autre principe fort est que les solutions généralisées sont inévitables pour les équations non-linéaires (un chapitre important est ainsi consacré aux ondes de choc par exemple) et forment donc un sujet fondamental. Enfin, les EDP ne sont pas une branche de l'analyse fonctionnelle, bien que certaines EDP posent naturellement des questions en terme d'espaces de Banach ou d'analyse convexe. Ceci dit cet ouvrage est constitué de notes de cours, il est donc destiné aux enseignants et étudiants. Son contenu et son style correspondent bien à cet objectif.

Ainsi, il est très significatif qu'une première partie du livre est entièrement consacrée aux formules de représentations des solutions et différentes méthodes permettant de « calculer » des solutions particulières (y compris les méthodes de Fourier), d'obtenir des formules asymptotiques. Une seconde partie traite des espaces de Sobolev et des applications aux équations linéaires (elliptiques du second ordre y compris la théorie spectrale, d'évolution parabolique ou hyperbolique). Viennent ensuite les EDP non-linéaires. Cette troisième et dernière partie est considérée par l'auteur comme la matière la plus moderne du livre. Elle contient une introduction au calcul des variations (jusqu'au « mountain pass lemma »), aux théorèmes de point fixe et méthodes de monotonie, aux équations de Hamilton-Jacobi, à la théorie du contrôle et aux lois de conservation. Des choix drastiques ont donc été effectués, il ne s'agit pas, pour l'auteur, de faire une encyclopédie.

Chacun des onze chapitres se termine par quelques exercices ainsi que par quelques références récentes complémentaires. On voit donc que, même s'il contient une matière neuve et utile aux chercheurs, ce livre est avant tout destiné à l'enseignement : la clarté est toujours privilégiée plutôt que des versions pointues des résultats et théorèmes (auxquelles on peut facilement arriver via les références, quoique de nombreux sujets abordés dans cet ouvrage progressent toujours). Les démonstrations sont toujours complètes et, quelque soit le sujet recherché, les notations sont toujours simples et accessibles directement.

Il s'agit de toute évidence d'un ouvrage de référence qui a sa place dans toutes les bibliothèques de mathématiques d'enseignement et de recherche.

B. Perthame, ENS, Paris

Fine regularity of solutions of elliptic partial differential equations
J. Malý & W.P. Ziemer
Mathematical Surveys and Monographs, Volume 51, AMS, 1998

Second order equations of elliptic and parabolic type
E.M. Landis
Translations of mathematical monographs, volume 171, AMS, 1998

Second order elliptic equations and elliptic systems
Y.Z. Chen & L.C. Wu
Translations of mathematical monographs, volume 174, AMS, 1998

Trois livres de l'A.M.S. traitant de sujets voisins ont été publiés presque simultanément. Le livre de Y.Z. Chen et L.C. Wu est le plus abordable des trois et fournit une introduction très complète et très agréable à lire à la théorie classique des équations elliptiques. Il reprend la théorie depuis son point de départ (théorème de Lax Milgram, principe du maximum, théorie de Schauder, estimations L^p) avant d'expliquer les estimations de De Giorgi-Nash-Moser et leurs applications aux équations quasilinéaires sous forme divergence. La première partie se termine sur le principe du maximum d'Alexandroff Bakelman Pucci et les estimations de Krylov Safonov. Une seconde partie étudie les systèmes elliptiques et leurs théories L^2, Schauder et L^p.

Le livre de E.M. Landis est la transcription de notes d'un cours donné en 1968, cours antérieur en particulier aux travaux de Krylov et Safonov. Certaines parties du livre sont donc dépassées, mais on peut y trouver une approche non traditionnelle des équations elliptiques (construction de fonctions barrières particulières, utilisation de la capacité pour les équations qui ne sont pas sous forme divergence).

Le dernier livre se concentre sur les problèmes de régularité et développe des articles récents de R. Gariepy, W.P. Ziemer, T. Kilpeläinen et J. Malý. Il débute par un chapitre conséquent de rappels sur les espaces de Sobolev, la fonction maximale, le théorème de Rademacher avant de détailler dans le second chapitre les notions de $p-$capacité, de sur-solution, de potentiels de Green et de critère de Wiener pour le Laplacien en passant par les résultats de De Giorgi Nash. La suite du livre est consacrée à l'étude de principes de maximum faibles, d'inégalités de Harnack faibles et d'estimations par des moyennes intégrales de solutions d'équations quasilinéaires.

E. Grenier, ENS Lyon

Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants
E. Rio
Mathématiques et Applications, 31, Springer, 1999

La statistique des séries chronologiques se développe en raison de l'utilisation de modèles de suites de variables aléatoires dépendantes dans des domaines variés tels la biologie, l'économie, la finance. Tout résultat de statistique asymptotique est construit à partir de conditions de dépendance précises. Quand on désire considérer des statistiques robustes, il y a lieu de ne pas se limiter à l'étude du simple modèle de référence mais de considérer des classes de modèles très larges. Les propriétés de mélange donnent un cadre agréable pour de telles études car beaucoup de modèles de séries chronologiques satisfont de telles conditions. Un avantage des conditions de dépendance faible est leur totale hérédité au travers de fonctionnelles mesurables. Durant les dernières années, la théorie des processus mélangeants a été transfigurée par le travail d'Emmanuel Rio. En particulier une nouvelle inégalité de covariance ainsi qu'un lemme de couplage, très originaux et puissants, lui ont permis d'envisager des énoncés optimaux. Cette littérature, pourtant fondamentale, est souvent peu accessible aux statisticiens. L'objet de l'ouvrage d'Emmanuel Rio est de transmettre les techniques les plus modernes et les plus performantes de la théorie des suites mélangeantes de manière progressive possible sans, toutefois, en farder les difficultés. De très nombreux résultats nouveaux y sont prouvés sans oublier leur illustration par des énoncés statistiques. L'ouvrage est divisé en 9 chapitres qui traitent des thèmes suivants.

(1) L'inégalité de covariance de Rio pour des variables fortement mélangeantes, qui s'écrit en termes de quantiles, donne d'abord lieu à des estimées de variance pour des sommes de variables aléatoires mélangeantes. D'autres conditions de mélange sont aussi envisagées en même temps que des applications à l'estimation fonctionnelle.

(2) Les moments d'ordre entier de telles sommes sont ensuite considérés. Des théorèmes limites en loi sont ainsi accessibles via la « méthode des moments ».

(3) Des inégalités maximales donnent lieu à des énoncés puissants de lois fortes de grands nombres.

(4) Le théorème central limite est ensuite obtenu sous des conditions (quasi-)optimales.

(5) Les méthodes de couplage sont ensuite exposées en détails. Elles permettent de reconstruire des variables aléatoires proches de celles initialement considérées par des variables aléatoires indépendantes.

(6) Une nouvelle inégalité de type « Nagaev-Fuk » permet d'accéder à la loi du logarithme itéré sous les conditions assurant le théorème de limite central.

(7) Des utilisations de ces méthodes constituent la fin de l'ouvrage.

Le théorème centrale limite fonctionnel est ensuite traité, d'abord pour la fonction de répartition empirique, puis pour la mesure empirique sous des conditions entropiques. Un dernier chapitre traite l'exemple le plus important de suites mélangeantes, celui des suites markoviennes. Sans donner une revue de modèles mélangeants, l'auteur lie de manière originale et puissante les différentes propriétés de mélanges utilisables dans ce cadre (il y montre par exemple l'équivalence du mélange fort et de l'absolue régularité). Enfin des appendices précisent des résultats de base utiles, en probabilité, ou sur les inégalités standards relatives aux suites indépendantes, facilitant ainsi l'usage de techniques mises en œuvre dans le corps du texte (notions de dualité, espace d'Orlicz, calcul fonctionnel sur les quantiles). Ces annexes permettent ainsi une lecture autonome du texte pour un lecteur non spécialisé.

Ce texte, écrit en français, est l'outil pratique (et inévitable) de toute personne soucieuse d'obtenir des énoncés de nature asymptotique sous des hypothèses de dépendance faible. Ecrit de manière précise et assez dense, ce livre est remarquablement bien construit et sa lecture est facilitée par des appendices utiles et clairs.

P. Doukhan, Université de Cergy-Pontoise

Un nouveau mensuel pour jeunes futurs scientifiques
Cosinus
Edition Faton

À quel âge peut-on commencer à s'intéresser à la science en général et aux mathématiques en particulier ? Comment peut-on éveiller chez les jeunes l'esprit scientifique ? Il semble admis que l'esprit de finesse, plus traditionnellement lié aux disciplines littéraires soit plus naturel que l'esprit de géométrie, alors que les formes géométriques figurent naturellement dans l'univers qui nous entoure ! L'inspiration et la créativité en littérature seraient-elles innées alors que la construction et l'inventivité en sciences résulteraient de processus d'initiation et de formation ? Si l'apprentissage de la lecture est l'un des premiers à faire l'objet d'un enseignement de base, la plupart des systèmes éducatifs introduisent l'éveil de l'esprit scientifique beaucoup plus tard même si tous les enfants apprennent très tôt à compter ; apprendre à lire serait plus proche de la littérature qu'apprendre à compter ne le serait des mathématiques. Actuellement, l'univers des émotions l'emporte sur le monde de la rationalité, même si nous savons aujourd'hui qu'il n'existe pas de frontières nettes entre les deux. Il est clair que de nos jours, dans les médias quels qu'ils soient, la science passe bien après la littérature. Cependant notre environnement quotidien baigne dans la science : les communications seraient-elles aussi développées si la théorie du signal ne bénéficiait pas de l'apport des ondelettes ? Cette introduction veut saluer le lancement d'un nouveau mensuel : « Cosinus » dont le premier numéro porte la date du 1er novembre 1999. Le public visé : « à partir du collège ». Le sommaire du numéro 1 donnera une idée des contenus développés dans les disciplines qui sont clairement répertoriées sur la première page de couverture : Maths, Physique, Chimie, Astronomie, Biologie, Sciences de la Terre ; ce premier numéro est le reflet du souci des fondateurs de ratisser large les domaines de la science. Dans le détail quels sont les articles signalés sur la première page de couverture :

— les maths !

— les métiers de la science

— France, terre des dinosaures

— Voir venir la foudre

— Pourquoi l'école empêche de dormir.

Si on se limite à la partie mathématique, on relève plusieurs articles signés J.-M. Kantor qui développe des sujets qui le passionnent :

— l'astuce du futur prince des mathématiciens, consacré à Gauss

— Un métier : professeur de mathématiques ; dans cette rubrique est expliquée simplement la méthodologie qui conduit au choix de la carrière de mathématicien

— Kepler et l'empilement des boulets de canons, problème dont une solution vient d'être découverte récemment et qui a fait l'objet d'un exposé de J. Oesterlé au séminaire Bourbaki

— La longueur d'une géodésique

— Pascal et la naissance des probabilités, cet article est accompagné d'une lettre de Pascal à Fermat.

Le langage utilisé est simple et accessible à de jeunes enfants, le vocabulaire nouveau ou technique fait l'objet d'un glossaire qui figure à côté de chaque article. Pour un jeune esprit ce mensuel est riche en connaissances et données nouvelles, mais un moins jeune le lira avec plaisir, il y prendra autant de plaisir qu'à la lecture des bandes dessinées qu'il déroberait au plus jeune ou qu'il achète en cachette !

L'année 2000, Année Mondiale des Mathématiques, est une bonne occasion de redonner un peu de dynamisme à la formation scientifique qui n'a pas actuellement la faveur du grand public, même si le prestige des grande écoles scientifiques attirent toujours les meilleurs esprits. Mais pourquoi ces futurs cadres de la nation éprouvent-ils la nécessité de compléter leur formation scientifique par un passage obligé à l'ENA ? Au cours de ces derniers siècles des scientifiques se sont engagés dans des actions politiques avec comme seul bagage leur formation ; Fourrier, Painlevé, Borel, Hadamard, pour ne citer que quelques mathématiciens, ont été fortement impliqués dans la vie politique de leur époque. Il faut souhaiter que Cosinus participe à l'éveil des jeunes aux sciences tout en gardant une large ouverture sur le monde contemporain au sens large. Le style littéraire des articles à fort contenu scientifique que l'on trouve dans Cosinus peut contribuer à créer une nouvelle génération d'honnête homme.

L'analyse précédente concernait le numéro 1, depuis les numéros 2 et 3 ont été publiés ; pour ces derniers la présentation par grandes rubriques a été conservée, l'équilibre entre les différentes disciplines respecté. Toutefois il faut souligner une déception pour la partie mathématique du numéro 2 : l'article sur les caractères de divisibilité manque de clarté et de rigueur, il comporte des erreurs dues sans doute à l'usage de métaphores inadaptées aux calculs mathématiques. Il ne faut pas oublier que ce mensuel s'adresse à de jeunes lecteurs et que des connaissances acquises, surtout si elles ne sont pas correctes, peuvent avoir des conséquences graves tant au plan méthodologique qu'au plan éthique. Par contre le numéro 3 est de bonne facture et peut-être même de meilleure qualité que les précédents. À l'avenir ce magazine pour jeunes corrigera sans doute ses erreurs de jeunesse !

G. Tronel, Université de Paris 6

Deux et deux font-ils quatre ? sur la fragilité des mathématiques[1]

D. NORDON

Pour la science, 1999

« Notre société attache plus de prix à l'acquisition de connaissances qu'à la réflexion sur le savoir [...] »

[1] Texte paru dans la *Quinzaine littéraire* 01-15 décembre 1999

« Il existe pourtant un bon moyen de ne pas se laisser écraser par un savoir : c'est d'affirmer que nous en connaissons bien assez pour avoir le droit de critiquer [...] »

Serait-ce du Montaigne ? Cela aurait pu l'être. Non, C'est du Nordon. Un récent petit livre *Deux et deux font-ils quatre ?* met immédiatement le lecteur à l'aise : un constat, puis une méthode que l'auteur suivra tout au long de ces neufs chapitres dans lesquels il va analyser ces maths d'un point de vue qui n'est pas tout à fait celui du philosophe, ni du sociologue, ni même celui du mathématicien... On va « mélanger les genres » et même y inclure des nouvelles dont le but est d'apporter un éclairage souriant, voire peut-être un semblant de réponse aux questions débattues.

Première question : qu'est-ce que l'évidence ? Première réponse : ce n'est pas simple. Pour parodier Edgar Morin, on pourrait parler de la non-évidence de l'évidence. Nordon argumente et on se rend compte que rien n'est absolument évident, on s'interroge sur le rez-de-chaussée fuyant sur lequel on voudrait fonder les maths.

Autres questions : les vérités mathématiques sont-elles immuables ? Sont-elles universelles ? Non, répond l'auteur aux deux questions. Puis de poursuivre ses interrogations. Qu'est-ce que le vrai ? Qu'est-ce que la rigueur ? Qui sont les mathématiciens ? Les professeurs sont-ils des robots à dire des mathématiques aux étudiants ? Ne seraient-ils pas des acteurs qui, au travers des mathématiques, montrent leur propre personnalité ? Ne seraient-ils pas des interprètes ? Ce thème est développé dans l'un des chapitres « Paradoxes sur les professeurs » dont le titre rappelle le « Paradoxe sur le comédien » de Diderot.

On arrive au bout de ce livre, avec le sentiment que les maths ne sont pas un domaine étranger, ni même étrange. Comme l'annonce l'auteur dès la fin de son introduction, « ce livre va considérer les mathématiques d'un point de vue "littéraire" ».

M. Mendès-France, Université de Bordeaux