Jürgen Moser (1928–1999)

Déclin des Mathématiques (après la mort de Jürgen Moser)

« Les nombres, les rangées, les séries – le cauchemar et la malédiction se faisaient les bourreaux de la pensée pure... » Vladmimir Nabokov, Ada ou l'ardeur, III, 1.

« An astronomer must be a cosmopolitan, because ignorant statesmen cannot be expected to value their services ». Tycho Brahe (cité par Arthur Koestler, Les Somnambules)

Jürgen Moser, disparu le 19 décembre 1999, est né en 1928 à Königsberg. Il a participé à 14 ans à la guerre, dans les batteries antiaériennes. Son éducation mathématique s'est faite en grande partie en Amérique, surtout avec Carl Siegel (qui m'a dit en 1968 que Moser a été le rare exemple d'un étudiant américain capable de comprendre Henri Poincaré).

L'institut Courant à New York (dont Moser a été le directeur de 1967 à 1970) fut un centre mathématique exceptionnel, préservant miraculeusement l'unité entre les mathématiques pures et appliquées (Courant, John, Nirenberg, Moser, Lax, Moravetz...).

L'équilibre entre analyse, géométrie et théorie des nombres est manifeste dans les travaux de Moser et sert à résoudre des problèmes ayant des applications directes en physique, astronomie et technique des accélérateurs et des tokamaks. C'est un phénomène qu'on rencontre rarement de nos jours.

A partir de 1980, Moser a habité à Zürich (en Suisse) et volait beaucoup en paraplane, mais il est toujours resté très lié à l'institut Courant.

Les travaux les plus célèbres de Moser se situent dans le prolongement des *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* de Poincaré.

En suivant Poincaré, George Birkhoff a formulé le problème le plus simple de la stabilité. Considérons une application du plan dans lui-même ayant un point fixe et préservant les aires. Supposons que la linéarisée de cette application au point fixe soit une rotation du plan (d'angle incommensurable à π). Considérons la suite des images d'un point voisin du point fixe par les itérations de l'application.

Question : Est-ce que les points de cette suite restent voisins du point fixe ?

C'est sûrement le cas si l'application est simplement une rotation : tous les points de la suite sont situés sur un petit cercle centré au point fixe. Mais dans le cas général, le problème est plus difficile tout en ressemblant aux problèmes classiques de la mécanique céleste : la Lune va-t-elle tomber sur la Terre, ou bien restera-t-elle pour toujours sur son orbite au voisinage de la Terre ?

En combinant

(a) une méthode d'Andrei Kolmogorov, élaborée pour l'étude des systèmes hamiltoniens comme ceux de la mécanique céleste,

(b) la technique de lissage, inventée par John Nash, Moser a démontré en 1962 la stabilité dans le problème de Birkhoff pour les applications différentiables à un ordre fini (333 dans les premiers articles de Moser, mais réduit actuellement à l'ordre 3). Ce résultat, présenté par Moser au congrès international des mathématiciens à Stockholm était complètement inattendu : Kolmogorov conjecturait :

– La stabilité dans le cas analytique,
– l'instabilité dans le cas générique.

Peu de temps après, les épigones américains de Moser ont publié des articles qui « généralisent » les résultats de Moser dans le cas analytique. Mais Moser a immédiatement arrêté ces tentatives de lui attribuer les résultats de Kolmogorov (1954). C'est sa méthode qu'il a développé.

Le premier travail de Moser en 1961 où il a combiné les méthodes de Kolmogorov et de Nash était déjà tout à fait remarquable. Il a considéré le problème classique de la réalisation d'une métrique riemannienne sur une variété lisse comme l'image réciproque par un plongement lisse dans l'espace euclidien de la métrique induite sur la sous-variété image.

Pour ce faire, Moser a déformé une sous-variété réalisant une métrique approximant la métrique donnée par la méthode de Kolmogorov. Cette construction abîme la sous-variété : elle devient moins lisse. La méthode de Nash la rend plus lisse, l'approximation de la métrique restant améliorée par rapport à l'approximation initiale. En itérant cette construction, Moser obtient la sous-variété voulue (dans un espace euclidien de dimension suffisamment grande) comme limite des approximations précédentes.

Le problème des déformations isopérimétriques (lisses ou analytiques) d'une surface lisse ou analytique de l'espace euclidien de dimension trois (par exemple d'un tore) reste, semble-t-il, ouvert, en dépit de l'importance évidente de ce problème en ingénierie, par exemple dans la construction d'appareils cosmiques avec parties non convexes. Les constructeurs ont fabriqué des coques non convexes qu'on peut expérimentalement déformer, mais l'analyse mathématique de cette situation rencontre les mêmes difficultés d'arithmétique diophantienne et d'analyse que les problèmes de Birkhoff de la mécanique céleste. Le rôle des résonances de la mécanique céleste est joué ici par la possibilité de lignes asymptotiques brisées fermées sur la partie hyperbolique de la surface. La présence de telles résonances rend possible la déformation en première approximation. Mais pour en déduire une déformation finie, il reste à surmonter des difficultés plus grandes que celles avec lesquelles Moser a lutté (avec succès)

Parmi le grand nombre de résultats mathématiques de Moser, un des plus simples à formuler est son théorème remarquable de stabilité des formes de volume et des structures symplectiques.

Considérons deux domaines plans de même aire bornés chacun par une courbe lisse fermée. Il existe un difféomorphisme préservant les aires et transformant ces domaines l'un en l'autre. Le théorème de Moser est une extension de ce résultat aux variétés de dimension arbitraire munies d'éléments de volume, ou bien de 2-formes fermées non dégénérées, appelées structures symplectiques.

Naturellement les deux variétés considérées sont supposées être difféomorphes et on suppose que les conditions topologiques nécessaires évidentes aient lieu : les variétés sont de même volume et les intégrales des 2-formes le long des surfaces correspondantes sont égales.

La méthode homotopique utilisée par Moser pour la démonstration de son théorème est très puissante et on l'a ensuite utilisé dans un grand nombre de travaux consacrés à des objets de nature tout à fait différente, par exemple dans la théorie des applications différentiables, où John Mather a utilisé la méthode de Moser pour ses extensions des théorèmes de René Thom.

Les résultats de Moser en théorie des systèmes hamiltoniens complètement intégrables sont, eux aussi, d'une grande beauté. Je veux souligner sa géométrisation et symplectisation de la théorie des coordonnées elliptiques de Jacobi. Il a transformé des centaines de pages de calculs aveugles en des raisonnements simples et naturels de la géométrie projective et de la géométrie symplectique des espaces de droites. Cette théorie de Moser ouvre une voie vers l'exposé de la théorie intrinsèque des coordonnées elliptiques, en permettant de passer des ellipsoïdes en espaces euclidiens en dimension finie aux opérateurs symétriques dans les espaces de dimension infinie. Il me semble que la théorie correspondante des équations aux dérivées partielles complètement intégrables, tout en étant la version de dimension infinie de l'intégration par Jacobi des équations des géodésiques des ellipsoïdes de dimension finie, n'a pas été construite ni dans le cas des spectres discrets, ni dans celui de spectres continus. Les formules algébriques de la théorie de Jacobi doivent fournir des relations intégrales analytiques qui ne semblent pas être écrites dans la théorie de transformation d'Hilbert.

Un des traits de caractère de Moser a toujours été sa passion pour la culture européenne (non-américaine), pour l'urbanisme médiéval des petites villes d'Europe Centrale qui lui donnait une inspiration mathématique originale. Son respect profond des valeurs humaines universelles (qui disparaissent malheureusement aujourd'hui dans le monde mathématique) ; le respect des grands problèmes, le goût pour les idées plutôt que pour les machines, pour les « Colomb » plutôt que pour les « Amerigo », tous ces traits de caractère faisaient de Moser un point singulier de notre monde mathématique.

Vladimir Arnold

Nous avons le regret de vous annoncer le décès de Pierre Dugac mathématicien, historien des mathématiques et membre correspondant de l'Académie des sciences survenu le 7 mars 2000.