LIVRES

Les Sciences au lycée, Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger
SOUS LA DIRECTION DE B. BELHOSTE, H. GISPERT ET N. HULIN
Vuibert-INRP, Paris, 1996

Le retard pris dans la recension de cet ouvrage a un bon côté, puisque la question de la réforme de l'enseignement des mathématiques acquiert en 1999 une actualité brûlante avec la création d'une commission chargée d'une nouvelle réforme, la commission présidée par J.-P. Kahane[1]. Sciences au Lycée fournit une mise en perspective historique bien utile des enjeux de la prochaine réforme. On a tendance à oublier que la grande réforme des mathématiques modernes des années soixante et soixante-dix n'est qu'une étape dans un siècle de réformes, commençant avec celle de 1902. C'est de tout ce siècle qu'il s'agit ici, analysé par divers auteurs, mathématiciens et physiciens, historiens des sciences ou de l'éducation, acteurs de la réforme des années 1960...

Sciences au Lycée est un livre d'une grande richesse auquel il est impossible de rendre justice dans le cadre limité d'un compte rendu. Nous n'en donnerons qu'un aperçu, n'évoquant de manière un peu plus détaillée que certaines contributions, et en premier celle d'Antoine Prost, grand spécialiste de l'histoire de l'éducation, et dont on se souvient du rôle qu'il a joué au ministère de l'éducation nationale ou à Matignon dans les années 1980. Après avoir rappelé la distinction entre « réforme » et « changement », Prost définit les conditions d'une réforme : — une volonté explicite et argumentée de provoquer des changements significatifs dans les contenus et les méthodes d'enseignement — l'existence d'un débat, ainsi que l'intervention d'une pluralité d'acteurs : scientifiques, pédagogues, politiques. Il classifie les réformes en deux catégories : les réformes « scientifiques », et les réfomes « politiques » selon que l'initiative en revient aux uns ou aux autres. Tandis que les dernières sont motivées par des considérations politiques (par exemple la réforme des seconds cycles en 1965 avec la création des baccalauréats de techniciens), les premières ont pour objectif de réduire l'écart entre la science scolaire et les savoirs savants — le meilleur exemple étant de son point de vue la réforme des mathématiques de la fin des années 1960.

Pour qu'une telle réforme « marche » (et la réforme des mathématiques modernes a « réussi », contrairement à ce qui s'est passé dans d'autres cas, comme la réforme de l'enseignement de l'histoire à la fin des années 1970 : la volonté de réforme des mathématiques a en effet été effectivement suivie par des changements réels dans l'enseignement — c'est naturellement une autre question de savoir si c'était bien cette réforme-là qu'il fallait faire), il faut qu'il y ait accord entre les acteurs. Et c'est en effet ce qui s'est passé pour la réforme impulsée par la commission présidée par André Lichnérowicz : les savants avaient le soutien des enseignants regroupés au sein de l'Association des professeurs de mathématiques, et d'une manière générale, les sciences bénéficiaient d'une légitimité forte, le gaullisme y voyant un élément de la grandeur nationale et de l'indépendance de la France.

Un certain nombre de textes du livre traitent des mathématiques en particulier : André Revuz, un des grands artisans de la réforme des mathématiques modernes, évoque dans son texte ce qu'il appelle la « prise de conscience bourbakiste » et le rôle qu'a joué cette prise de conscience dans la réforme. L'historien des sciences Michel Armatte analyse la manière dont la réforme s'est mise en place et fait le lien entre mathématiques modernes et structuralisme. Jean-Pierre Kahane tente de comprendre le mouvement des mathématiques depuis les années 1950. Une phrase de son texte permettra peut-être de saisir certaines des préoccupations du président de l'actuelle commission de réforme : « Les mathématiques apparaissaient hier comme science des structures, celles d'aujourd'hui comme science d'interactions et science des modèles. Elles étaient hier plus existentielles, aujourd'hui et demain sans doute, informatique

[1] *Gazette* n° 82 article de R. Langevin

aidant, plus constructives. » Rudolf Bkouche, pour la géométrie et Michèle Artigue, pour l'analyse, étudient l'évolution des programmes au XXème siècle, depuis la réforme de 1902 jusqu'à nos jours. Dans la réforme de 1902, la géométrie était une science expérimentale. Le point de vue structural qui triomphe dans les années 1960 relègue la géométrie élémentaire à être un chapitre de l'algèbre linéaire. Cette évolution, les débats qui l'accompagnent ainsi que les questions épistémologiques qu'elle pose sont analysés en détail dans l'article de Bkouche. L'analyse pose d'autres questions : analyse rigoureuse, analyse expérimentale ou analyse algébrisée ? L'analyse détaillée des programmes et de leurs motivations fournit un élément de réponse, utilement complété par une réflexion sur ce qui se passe effectivement dans l'enseignement des concepts de l'analyse lorsqu'ils sont fondés, comme c'est le cas aujourd'hui, après la contre-réforme, sur une approche expérimentale et numéricienne. Michel Trabal apporte le regard du sociologue à une analyse détaillée de la réforme des mathématiques modernes, de ses motivations intellectuelles ainsi que du contexte général (compétences des enseignants, débats avec les physiciens etc.) dans lequel la réforme a lieu.

Un des aspects les plus frappants, trente ans plus tard, est l'illusion démocratique des partisans de la réforme. Ils étaient convaincus que les mathématiques modernes, précisément parce qu'elle étaient structurales, sauraient déjouer les handicaps culturels des élèves issus des milieux populaires — contrairement au français, au latin, ou aux mathématiques classiques.

L'évolution parallèle de la physique et de son enseignement sont un des autres objectifs du livre. Nicole Hulin en dresse les grandes étapes, Samuel Joshua étudie le cas de l'électrocinétique, Edith Saltiel dissèque l'enseignement du principe d'inertie à diveres époques, Claudette Balpe s'intéresse à l'introduction des « exercices pratiques » dans l'enseignement de la physique en 1902, alors qu'elle était enseignée jusque là de manière uniquement dogmatique et déductive. Enfin, Jean-Claude Martinand se penche sur la commission Lagarrigue (l'analogue de la commission Lichnérowicz pour la physique).

Les quelques pages écrites par le philosophe Dominique Lecourt sur Auguste Comte apportent un éclairage intéressant sur les principes philosophiques qui ont fondé l'éducation sous la IIIème République. Lecourt nous rappelle que la conception de Comte ne place nullement les mathématiques au dessus de toutes les sciences : si l'apprentissage des mathématiques constitue « la base normale de toute éducation logique », la géométrie étant « le berceau de la positivité rationnelle », le « berceau ne saurait constituer un trône ». En effet, du fait de l'extrême simplicité des phénomènes géométriques, le point de vue des mathématiques reste « abstraitement universel », et les mathématiciens ont tort de vouloir « gouverner les recherches ». A cet éclairage, l'historien des sciences Michel Atten ajoute une analyse fine sur les rapports entre physique et mathématiques en France au XIXème siècle et au début du XXème. Enfin, la dernière partie du livre donne un aperçu des réformes dans les autres pays à diverses époques : Allemagne, Etats-Unis, Italie, URSS, Belgique.

Les lecteurs mathématiciens professionnels regretteront peut-être que certains des débats internes à la communauté mathématique au moment de la réforme des mathématiques modernes n'aient pas été véritablement abordés. La démission en 1971 d'un certain nombre de membres de la commission Lichnérowicz n'est qu'évoquée, sans qu'on sache qui était concerné et pourquoi. Les objections soulevées par Jean Leray à la primauté de l'algèbre linéaire dans l'enseignement de la géométrie ne sont pas abordées. Mais l'ensemble constitue un travail remarquable, dont chaque article est enrichi d'une bibliographie considérable, un ouvrage de référence indispensable pour qui veut comprendre les enjeux des réformes passées ou futures.

M. Andler, Université de Versailles-Saint-Quentin

Modern Computer Algebra
J. von zur Gathen et Jüregen Gerhard
Cambridge University Press, 1999

Comme les auteurs l'indiquent dans l'Introduction, le but de leur ouvrage est triple : donner les informations mathématiques utilisées, analyser le coût asymptotique des algorithmes présentés et proposer des méthodes asymptotiquement rapides. Ils atteignent parfaitement ce triple objectif. Ceci distingue ce livre des précédents portant sur le même sujet qui soit privilégient le point de vue mathématique, soit s'adressent avant tout aux utilisateurs.

Cet ouvrage momumental — il comporte plus de sept cents pages — est subdivisé en cinq thèmes principaux, chacun étant repéré par le nom d'un grand mathématicien : Euclide, Newton, Fermat, Gauß et Hilbert. La partie « Euclide » porte bien sûr sur l'algorithme d'Euclide et donne aussi des informations très détaillées sur le calcul modulaire. La section « Newton » contient la présentation d'algorithmes rapides pour les opérations arithmétiques, la FFT, l'interpolation, ... L'arithmétique : tests de primalité, factorisation des entiers et l'application à la cryptographie (méthode RSA) est la partie « Fermat ». Les chapitres relatifs à Gauß sont : factorisation des polynômes dans les corps finis, le lemme de Hensel, recherches de petits vecteurs dans les réseaux (méthode LLL) et applications. La dernière partie, « Hilbert », contient l'étude des bases de Gröbner, de la sommation numérique, de l'intégration symbolique et d'applications.

Chaque chapitre comporte de nombreux exemples très instructifs, le pseudo-code des algorithmes présentés, des exercices ainsi que des notes historiques et bibliographiques d'un grand intérêt. Le coût des algorithmes est étudié en détail et les auteurs donnent des remarques sur leur efficacité et leurs limites actuelles.

Le style est clair et précis. Le niveau de présentation me semble tout a fait adapté à nos étudiants de second cycle.

La typographie et la qualité des illustrations sont remarquables.

Pour conclure, il s'agit d'un travail d'une qualité exceptionnelle, qui est une source inégalée d'informations sur l'état de l'art dans le Calcul Formel — puisque c'est ainsi qu'on l'appelle chez nous.

M. Mignotte, Université Louis Pasteur, Strasbourg

Series in Applied Mathematics
Editeurs P.-G. Ciarlet et P.-L. Lions
North Holland/Gauthier-Villars, 1999

Cette collection (chez North Holland/Gauthier-Villars) publie des textes en Mathématiques Appliquées comme des cours de troisième cycle, des séries de conférences sur un thème ou des versions préliminaires d'ouvrages plus élaborés. Elle est dans la lignée de l'ancienne collection « Recherches en mathématiques Appliquées » (chez Masson) où ont été publiés une quarantaine d'ouvrages. Trois volumes sont actuellement parus. Le premier est une introduction à la théorie linéaire des coques rédigé par P. G. Ciarlet. Il rassemble les outils mathématiques nécessaires à une écriture rigoureuse des modèles tridimensionnels de coques en coordonnées curvilignes, et présente de manière unifiée divers résultats d'existence sur les modèles bidimensionnels linéaires. La dernière partie de l'ouvrage aborde la justification asymptotique de ces modèles. Le second volume édité par P. A Raviart contient une série de cours donnés en 1994 sur les aspects physiques et mathématiques des modèles de collision dans les plasmas et gaz raréfiés. Associés à d'autres intervenants A. Decoster, B. Perthame et P. A. Markowich développent successivement les modèles fluides pour les plasmas, les opérateurs de collision pour l'équation de Boltzmann et les aspects quantiques intervenant dans la modélisation des semi-conducteurs. Enfin le troisième ouvrage de C. Bernardi, M. Dauge et Y. Maday traite de l'approximation spectrale de problèmes d'équations aux dérivées partielles dans des domaines tridimensionnels axisymétriques. L'analyse mathématique et numérique est détaillée ainsi que des applications aux équations de Laplace, Stokes et Navier et Stokes.

P. Witonmsky, IMAG, Grenoble

Éléments de géométrie, actions de groupes
R. Mneimné
Nouvelle bibliothèque mathématique, Cassini, 1997

Le livre de Rached Mneimné que Cassini nous propose depuis 1997 devrait remplir de bonheur bien des lecteurs. Sous un titre anodin (ou sybillin, comme on voudra), c'est d'un traité d'algèbre linéaire qu'il s'agit.

Je précise. Il s'agit d'une synthèse originale (et que je trouve très réussie) entre les « basses » mathématiques, celles qu'on enseigne en DEUG et les « hautes », celles qu'on utilise pour démontrer ses propres théorèmes.

J'ai parlé de traité, mais il s'agit *vraiment* d'un livre. Ce n'est pas la suite convenue « définition-théorème-démonstration » dont nous avons hélas tant l'habitude, mais bien un texte écrit, discursif, voire digressif, constitué d'une foule d'exemples et de liens entre ces exemples

— d'opérations de groupes, on s'en doute — si j'ai bien compris, l'algèbre linéaire, c'est l'opération du groupe linéaire[2] sur les matrices, il y a donc un chapitre assez avancé sur les classes de similitude,

— de foules de « petits » groupes (ils opèrent partout)

— de toutes sortes de matrices 2×2 avec par exemple

- dans le groupe symétrique ou ailleurs, $GL(2, \mathbb{F}_q)$ et ses potes $SL(2, \mathbb{F}_q)$ et $PSL(2, \mathbb{F}_q)$
- le birapport et $PSL(2, \mathbb{R})$, $PSL(2, \mathbb{C})$
- les classes de similitude dans les matrices 2×2 réelles et les quadriques affines.

La « note » (dans ce livre, les chapitres s'appellent des notes) sur le birapport est remarquable. Je ne pense pas que les lectrices et lecteurs s'initieront au birapport en la lisant, une familiarité — et peut-être même un peu plus — avec le sujet est nécessaire. Par contre, la lecture de ce chapitre leur permettra de faire le lien entre le birapport et différents classiques de la géométrie plane (le théorème de Pascal, le groupe circulaire), ce qui, certes n'est pas très original comme je le présente mais l'est assez comme Mneimné le présente dans le livre.

Mon goût personnel m'aurait poussée vers un peu plus d'applications à la géométrie euclidienne (la plupart des problèmes d'angles et de cocyclicité sont justiciables d'un traitement par le birapport[3] qui leur ôte une partie de l'ennui qu'ils semblent porter en eux).

Il est clair que le goût de Mneimné le pousse plutôt vers la géométrie algébrique et surtout les groupes algébriques. Qui s'en plaindrait ? Toutes les manipulations faites aveuglément sur les matrices sont des opérations algébriques et si ceci a aussi des conséquences sur la topologie et la géométrie des ensembles de matrices, disons-le !

À qui s'adresse ce livre ? À nous, d'abord. J'ai appris beaucoup en le lisant, en l'ouvrant au hasard ou en utilisant l'index de façon systématique pour explorer de façon transversale[4] une notion élémentaire (je vous conseille d'essayer avec le « rang »).

À nos étudiants un peu avancés ou un peu curieux, ensuite. Je l'ai d'ailleurs découvert, quelques mois après sa parution grâce à un agrégatif (d'ailleurs agrégé depuis) qui me l'avait signalé comme « plein de trucs utiles pour nous ». Depuis, j'essaie de convaincre ses successeurs que c'est *le* livre d'algèbre linéaire dont ils ont besoin. Il est clair que l'organisation synthétique du matériau dans ce livre est particulièrement adaptée à ces étudiants. L'auteur est, on le sait[5], un vieux routier de la préparation à l'agrégation, il ne s'en cache d'ailleurs pas. Oui, c'est un livre que les agrégatifs devraient utiliser, même si, ou parce que, le chapitre sur les classes de similitude est bien ambitieux.

L'éditeur Je ne résiste pas à une remarque[6] sur *Cassini*. Il ne me semble pas qu'un machin bachotant étiqueté « Préparation à l'agrégation » puisse être d'une quelconque utilité à un futur enseignant, même si celui-ci prépare un concours. Ce dont ces étudiants ont besoin, c'est d'ouvrages de mathématiques, qui les aident à enrichir, organiser et synthétiser leurs connaissances.

---

[2] Hélas, nos étudiants arrêtent d'étudier l'algèbre linéaire après avoir aveuglément jordanisé des matrices en deuxième année de DEUG... juste avant qu'on veuille bien leur dire ce qu'est une opération de groupe, dans un contexte disjoint.

[3] Voir par exemple le théorème des six birapports de Perrin et ses applications, qu'on ne trouve que dans les meilleurs livres de géométrie.

[4] Ce langage technocratique, pour me donner l'occasion de signaler que je suis en désaccord avec la définition de la transversalité que donne Mneimné à la page 59.

[5] On sait qu'il est déjà le co-auteur d'un grand classique, « le » Mneimné-Testard.

[6] « remarque[...] que nous introduisons ici parce qu'elle est irrésistible », comme dit Saramago.

Le livre de Mneimné est cela, je l'ai dit. J'ai le plaisir d'ajouter que, chez *Cassini*, c'est presque une règle (voir aussi [2]). En plus, les livres y sont bien relus, la typographie est très agréable et soignée... j'ai eu bien du mal à trouver une faute[7] dans le Mneimné.

Références

[1] R. Mneimné et F. Testard – Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques, Méthodes, Hermann, 1986.

[2] F. Rouviere – Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation, Cassini Paris, 1999.

M. Audin, Université Louis Pasteur et CNRS, Strasbourg

Integrable systems, Twistors, loop groups and Riemann surfaces
N. Hitchin, G. Segal, R. Ward
Oxford Sience Publications

C'est un petit livre consacré à quelques aspects des systèmes intégrables. Il est constitué des rédactions de trois cours donnés par les auteurs lors d'une école d'été à Oxford en 1997. Les textes portent sur surfaces de Riemann et systèmes intégrables (Hitchin), diffusion inverse (Segal) et twisteurs (Ward)[8].

Les systèmes intégrables sont un sujet assez étonnant. Ce sont des systèmes différentiels (équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles)

– nombreux au sens de la taxinomie : beaucoup d'entre eux sont répertoriés (voir la liste p.3 du livre en question et celle, plus perecquienne de [2])
– mais néanmoins fort rares, au sens ou presque aucun système différentiel n'est intégrable.

Ils se trouvent à l'un des carrefours où se rencontrent les avenues « géométrie algébrique », « représentations », « systèmes dynamiques », « algèbres de Lie affines », « groupes quantiques » ... C'est dire que les points de vue d'où l'on peut les regarder sont nombreux et variés. On est, dans ce livre, très nettement du côté de la géométrie algébrique. Le cours de Hitchin est d'ailleurs composé de vingt-six pages d'introduction aux surfaces de Riemann et aux fibrés en droites « contre » seize d'applications aux systèmes intégrables.

L'introduction. L'accès au sujet est souvent ardu pour les néophytes. Le point de départ de la plupart des textes publiés est une matrice R satisfaisant une équation de Yang-Baxter (modifiée !) dans une algèbre de lacets, à partir de laquelle un théorème d'Adler-Kostant-Symes permet de construire des systèmes intégrables. C'est ce qui lie cette théorie à celle des représentations, mais aussi à la géométrie algébrique puisque le paramètre de lacet, vu comme un point de la droite projective, introduit des courbes algébriques, revêtements de ladite droite.

Une exception notable est un article ancien, lumineux, inspiré, mais peu cité de Griffiths [3] [9] qui dégraisse considérablement cette approche. Le point de vue est direct. Il part d'un système de la forme

$$\frac{dA}{dt} = [A, B]$$

où A et B sont des matrices. Il est clair qu'un tel système décrit des variations *isospectrales* de la matrice A, les coefficients de son polynôme caractéristique sont des constantes. Si en plus, les coefficients de A sont des polynômes en une variable, son polynôme caractéristique est un polynôme en deux variables, donc l'équation d'une courbe algébrique — la courbe spectrale.

Voilà pour les valeurs propres de A. Ses vecteurs propres permettent, eux, de considérer le système différentiel comme une équation différentielle sur la jacobienne de ladite courbe. Et Griffiths de donner une condition cohomologique sur la matrice B, nécessaire et suffisante pour que les solutions soient linéaires.

---

[7] Mais j'y suis arrivée, l'auteur peut me contacter.

[8] Ce dernier est fort court, je ne vois rien à en dire, je n'en parlerai donc pas plus.

[9] Il n'est d'ailleurs pas cité non plus dans le livre en question !

Ce point de vue dégraissé de Griffiths (ne pas passer des journées entières dans les algèbres de lacets et partir de l'équation de Lax), est particulièrement bien adapté aux besoins d'une exposition efficace du sujet. C'est le point de départ de [2] et c'est avec plaisir que je l'ai retrouvé dans l'introduction de Hitchin à ce petit livre — malgé l'irritation causée par la remarque faite dans la note précédente.

Le cours de Hitchin. C'est, je l'ai dit, surtout une introduction aux courbes et fibrés en droites. La partie la plus intéressante est la section 5, consacrée aux équations de Lax sur des matrices polynomiales. Hitchin y donne une condition suffisante sur la matrice B pour que les solutions soient linéaires. Le résultat lui-même est un classique de la théorie [5] et un cas particulier du théorème de Griffiths évoqué plus haut. La démonstration est très jolie et assez élémentaire pour ne pas décourager les étudiants : il s'agit de calculs cohomologiques mais la courbe spectrale est ici plongée dans une surface (une idée de Adams, Harnad et Hurtubise), ce qui permet de tout écrire de façon très explicite. Un petit regret : le résultat qui est finalement le cœur du texte et la raison d'être des pages de géométrie algébrique qui le précèdent (si la matrice B est de telle forme, alors le système est linéarisé...) n'est pas énoncé explicitement.

Le cours de Segal. Il est consacré à la diffusion inverse. C'est une introduction efficace et bien écrite à l'utilisation des groupes de lacets pour l'étude de certains systèmes intégrables en dimension infinie (travaux déjà anciens de Wilson et de Segal lui-même notamment). Cette fois, les systèmes mis sous forme de Lax sont des systèmes d'équations aux dérivées partielles — par exemple l'équation de Korteweg-de Vries :

$$-4\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Les équations de Lax ne mettent plus en relation des matrices mais des opérateurs différentiels, par exemple, pour KdV :

$$\frac{dL}{dt} = [L, P] \text{ avec } L = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + u$$

et la « mise sous forme de Lax » (d'ailleurs inventée e dimension infinie), c'est-à-dire dans ce cas la recherche de P,

$$P = 4\frac{d^3}{dx^3} - 3u\frac{d}{dx} - 3\frac{d}{dx}u \text{ pour KdV,}$$

se fait parmi les opérateurs pseudo-différentiels formels (séries formelles en $(d/dx)^{-1}$). Ici aussi le spectre de L est constant au cours du temps. Toutefois, il est clair que la notion de spectre dépend des conditions (au bord) imposées aux solutions. De même, en général, s'il y a un analogue de la courbe spectrale, c'est une courbe de genre infini.

Segal explique ici pourquoi la diffusion inverse requiert la solution du problème de Riemann-Hilbert : il s'agit de factoriser un lacet

$$g : S^1 \to GL(n; \mathbb{C}) \text{ avec } g(1) = \mathrm{Id}$$

en produit $g = g_- g_+$ de restrictions d'applications holomorphes, respectivement sur le disque unité et sur son complémentaire. L'application g décrit un fibré de rang n sur la droite projective complexe et une factorisation en serait une trivialisation analytique. On sait que le groupe des lacets de $GL(n; \mathbb{C})$ s'étudie *via* son action sur la grassmannienne infinie des sous-espaces fermés du Hilbert des applications L^2 de S^1 dans $\mathbb{C}^n$ — une excellente occasion de recommander la lecture de [4]. Au lieu de considérer le cercle S^1 comme l'équateur de la droite projective, on peut le considérer comme bord d'un disque dans une surface de Riemann plus générale. On voit ainsi se profiler une relation entre la grassmannienne infinie et les jacobiennes de courbes qui permet d'arriver à un théorème de linéarisation analogue à celui évoqué dans le cours de Hitchin : certaines orbites de dimension finie des flots de KdV sont des jacobiennes de courbes.

Références

[1] M. Adler & P. van Moerbeke – « Completely integrable systems, euclidean Lie algebras and curves, et Linearization of hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory », *Advances in Math.* **38** (1980), p. 267–317 et 318–379.

[2] M. Audin – *Spinning tops, a course on integrable systems*, Cambridge University Press, 1996, Traduction en russe, Regular and chaotic dynamics, Moscou, 1999.

[3] P. A. Griffiths – « Linearizing flows and a cohomological interpretation of Lax equations », *Amer. J. of Math.* **107** (1985), p. 1445–1483.

[4] A. Pressley & G. Segal– *Loop groups*, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1986, Oxford Science Publications.

[5] A. G. Reiman – « Integrable hamiltonian systems connected with graded Lie algebras », *J. Soviet Math.* **19** (1982), p. 1507–1545.

M. Audin, Université Louis Pasteur et CNRS, Strasbourg

Séries de Fourier et Ondelettes
J.-P. Kahane et P.-G. Lemarié-Rieusset
Cassini, 1999

Ce livre est divisé en deux parties indépendantes qui se distinguent très nettement l'une de l'autre, tant par leur contenu que par leur style. La première partie, écrite par J.-P. Kahane, est consacrée aux séries de Fourier et à leur influence sur le développement des mathématiques, dans une perspective historique qui s'étend de la fin du XVIII^{e} siècle jusqu'à la période contemporaine. La seconde partie, écrite par P.-G. Lemarié, couvre en détail la théorie des ondelettes dans ses divers aspects : représentations continues, analyses multi-résolution et bases d'ondelettes, algorithmes rapides apparentés.

Avant de détailler séparément ces deux contributions, il convient de faire quelques remarques sur l'intérêt d'une telle juxtaposition. Depuis les années 1980, la théorie des ondelettes apparaît comme un carrefour naturel où se croisent et dialoguent des scientifiques de disciplines variées : physique théorique, analyse harmonique, théorie de l'appproximation, analyse numérique, traitement du signal et de l'image, statistiques. Une telle situation ne reflète pas seulement la multiplicité des applications de ces nouvelles méthodes d'analyse, mais aussi l'influence des utilisateurs de telles applications, qu'ils soient mathématiciens, ingénieurs ou physiciens, sur le développement de nouveaux champs théoriques. Dans cette perspective, il est intéressant de se pencher sur l'histoire des séries de Fourier et sur la démarche originale de celui dont elles ont hérité le nom. La décomposition systématique des fonctions périodiques en série trigonométriques est introduite dans un but appliqué précis : obtenir un moyen de calcul et d'approximation efficace des solutions d'équations modélisant la diffusion et l'équilibre de la chaleur. L'approche de Fourier, sévèrement critiquée par ses contemporains pour son manque de rigueur mathématique, marque cependant l'apparition de la notion de « fonction arbitraire » et contient en germe le développement de l'analyse du XIX^{e} siècle, au travers des questions qu'elle soulève. Depuis un demi-siècle, cette approche trouve un nouvel écho au travers des applications multiples des séries de Fourier au calcul scientifique et au traitement du signal, et des questions théoriques liées au développement d'outils plus sophistiqués, tels que les ondelettes, pour ces applications.

La première partie consacrée aux séries de Fourier revêt donc un caractère historique, mais il s'agit d'une histoire « vivante », dans laquelle l'auteur n'hésite pas à faire des sauts dans l'actualité en nous faisant percevoir l'impact de problématiques anciennes sur la recherche contemporaine. Les huit premiers chapitres nous font ainsi revivre le développement de l'analyse moderne et ses étapes les plus marquantes, les séries de Fourier servant de « fil directeur » à cette belle présentation. On voit ainsi se profiler les concepts rigoureux de convergence, d'intégration, de théorie des ensembles et d'analyse fonctionelle, à travers les extraits d'oeuvres classiques, souvent méconnues des mathématiciens : outre le mémoire fondateur sur la théorie analytique de la chaleur, on trouve la reproduction de l'article de Dirichlet portant sur le problème de la convergence ponctuelle des séries de Fourier, du mémoire de Riemann qui plante les bases de sa théorie de l'intégration et du premier article de Cantor sur la théorie des ensembles. Les trois chapitres suivants donnent un apercu des résultats relatifs à certains développements du XX^e siècle : séries de Fourier lacunaires et aléatoires, structures algébriques de l'analyse harmonique, martingales, espaces de Hardy et étude du mouvement brownien. Enfin, le dernier chapitre revient sur l'utilisation des séries de Fourier pour le calcul des équations aux dérivées partielles et en traitement du signal.

Cette partie de l'ouvrage peut être conseillée à un public relativement large. Si les spécialistes en analyse auront plaisir à redécouvrir dans un contexte historique détaillé les outils qu'ils manipulent, la présentation n'en reste pas moins accessible aux mathématiciens spécialisés dans d'autres domaines, ainsi qu'aux physiciens et ingénieurs, qui seront guidés dans la découverte de résultats profonds par l'histoire et par l'intuition plutôt que par de longs dévelopements techniques. La lecture des huit premiers chapitres serait de plus très profitable aux étudiants en deuxième cycle de mathématiques.

La deuxième partie, consacrée aux ondelettes, traite en détail de sujets d'actualité scientifique et est par nature, plus technique que la première. Les deux chapitres introductifs constituent une transition douce dont le style est encore proche de celui de la première partie : l'auteur nous propose un apercu historique des développements essentiels de la théorie des ondelettes depuis le début des années 1980, et une présentation intuitive des différentes formes que peuvent avoir ces outils : transformées continues, *frames* redondants, bases orthonormales et bi-orthogonales. Une telle mise au point est fort utile car le mot « ondelette » peut désigner des objets sensiblement différents lorsqu'on le rencontre dans la littérature scientifique actuelle. Les six chapitres qui suivent constituent en quelque sorte le cœur de cette deuxième partie. On y trouve tout d'abord la construction et les propriétés de base de ces différents outils, en suivant une progression naturelle - des transformées continues jusqu'aux décompositions discrètes par l'étude des opérations d'échantillonage et par l'introduction de la notion d'analyse multirésolution - que l'on retrouve dans certains autres ouvrages sur les ondelettes. L'approche de l'auteur possède néammoins de nombreux aspects originaux, tels que la mise en valeur du « lemme des vaguelettes » qui joue un rôle important dans la preuve de multiples résultats de stabilité, ou encore l'étude fine de la structure d'espaces invariants par translations discrètes dans la construction des bases d'ondelettes. Cette dernière approche permet de montrer que l'introduction du concept d'analyse multirésolution est à peu près inévitable pour pouvoir aboutir à de telles bases. Le sixième chapitre est entièrement consacré aux résultats fondamentaux concernant l'utilisation des bases d'ondelettes en vue de l'analyse de la régularité globale ou locale d'une fonction et de la caractérisation des espaces fonctionnels classiques. Outre leur attrait théorique, ces résultats constituent la base de l'analyse des méthodes utilisant les ondelettes dans des domaines appliqués tels que la compression des données, l'estimation statistique, la simulation numérique. Les quatre derniers chapitres sont consacrés à un survol de certaines généralisations des constructions précédentes, des aspects numériques à travers la description de plusieurs algorithmes qui peuvent être vus comme les briques de bases dans des applications spécifiques, et de quelques utilisations des ondelettes en analyse.

En conclusion, cette deuxième partie donne une vue d'ensemble de la théorie des ondelettes, sans pour autant négliger les preuves complètes de chaque résultat. Les utilisateurs potentiels, mathématiciens, physiciens ou ingénieurs, y trouveront les fondements théoriques nécessaires pour mieux évaluer la pertinence de ces outils puissants dans leurs applications.

A. Cohen, Université de Paris 6

Wavelets – A primer
C. Blatter
AK Peters, 1998

Des notes d'un cours d'initiation aux ondelettes, Christian Blatter a tiré un petit livre au ton enthousiaste et chaleureux destiné à guider les premiers pas dans ce domaine d'un lecteur peu averti des subtilités (ou des lourdeurs) mathématiques. D'où le refus d'utiliser la théorie des distributions ou les espaces de Sobolev et la volonté d'introduire le plus simplement l'espace L^2 et la transformation de Fourier.

Cette saine volonté de simplicité connaît quelques dérapages surprenants (par exemple l'invocation – totalement inutile – du théorème de Carleson sur la convergence presque partout des séries de Fourier d'une fonction de carré intégrable pour démontrer le théorème d'échantillonnage de Shannon), mais dans l'ensemble le pari a été suffisamment réussi pour que les éditions AK Peters traduisent en anglais l'ouvrage initialement paru en allemand aux éditions Vieweg.

L'ouvrage malheureusement souffre d'un manque de rigueur ou d'exigence, qui conduit à énoncer quelques théorèmes faux ou maladroits, assez caractéristiques des erreurs communément répandues au sujet des ondelettes.

Ainsi, une erreur classique est de croire (ou d'énoncer) que sous certaines conditions l'équation à deux échelles $\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\ \varphi(2x-k)$ n'a qu'une seule solution $\varphi \in L^2$ (théorème 6.4 p. 162), alors que l'unicité ne vaut que pour $\varphi \in L^1 \cap L^2$ et $\int \varphi\ dx = 1$.

Plus grave et tout aussi classique est de croire (ou d'imprimer) que la condition $|Wf(a,b)| \leqslant C\ |a|^{\alpha+1/2}$ sur les coefficients d'ondelettes $Wf(a,b) = \langle f|\frac{1}{\sqrt{a}}\psi(\frac{x-b}{a})\rangle$ caractérise les fonctions α-höldériennes (définies par $|f(x)-f(y)| \leqslant C'|x-y|^\alpha$) pour $\alpha \in]0,1]$ (théorème 3.12 p. 84) ; or, c'est faux pour $\alpha = 1$, cela caractérise les fonctions de la classe de Zygmund ($|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)| \leqslant C|h|$) et c'est un problème classique de l'analyse harmonique réelle qui joue un rôle important en EDP (via la théorie des flots quasi-lipschitziens).

Une erreur, d'ordre historique cette fois, est d'attribuer à A. Haar en 1910 la volonté de construire la premiére base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. La lecture des articles allemands ou magyars de Haar dans ses oeuvres complètes permet de vérifier immédiatement que Haar ne s'intéressait qu'à $L^2([0,1])$ et que son but était (seulement ?) de construire une base hilbertienne telle que les sommes partielles du développement de toute fonction continue convergent uniformément vers cette fonction, au contraire des bases issues de problèmes de Sturm–Liouville (également étudiées par Haar dans le même travail).

Il n'y a pas d'autres erreurs majeures dans le texte, mais quelques maladresses qui me laissent perplexe. Par exemple, le théorème 5.8 p. 131 étudie la question suivante : soit $\varphi \in L^2$ telle que la famille $\varphi(x-k), k \in \mathbb{Z}$, soit orthonormale et telle que $\varphi(x/2)$ appartienne au sous–espace fermé V_0 engendré par cette famille ; alors les espaces V_j engendrés par les familles $\varphi(2^jx-k), k \in \mathbb{Z}$ sont emboîtés ($V_j \subset V_{j+1}$) et la question est d'assurer $\cap_j V_j = \{0\}$ (propriété de séparation) et $\cup_j V_j$ dense dans L^2 (propriété de complétude). Le théorème 5.8 énonce qu'il y a séparation dès que $|\varphi(x)| \leqslant C\frac{1}{1+x^2}$ et que sous cette hypothèse il y a complétude si et seulement si $|\int \varphi(x)\ dx| = 1$. En fait, il y a toujours séparation et la complétude (qui n'est pas toujours vraie) est assurée dès que $\varphi \in L^1$. Où est alors le problème avec le théorème 5.8 ? L'hypothèse $|\varphi(x)| \leqslant C\frac{1}{1+x^2}$ est naturelle dans le contexte de la théorie des ondelettes, elle permet de rendre élémentaire la démonstration de la propriété de séparation par des "inégalités de Bernstein" (inégalités $L^2 - L^\infty$) d'usage constant dans ce cadre. En revanche, la "condition" $|\int \varphi(x)\ dx| = 1$, si elle est en fait toujours vérifiée, n'atténue en rien la (relative) technicité de la propriété de complétude et la démonstration mi-savante ne sert à mon avis qu'à dérouter le lecteur sans lui donner la compréhension du phénomène étudié.

Ces défauts pourraient être amplement compensés par la modestie et la vivacité générale de l'exposition, si le livre ne souffrait pas d'un manque d'exemples - aussi bien de construction d'ondelettes orthonormales (absence des *coiflets* et des paquets d'ondelettes, présentation minimale des ondelettes de Daubechies, absence des ondelettes multivariées) que d'applications (le lecteur refermera le livre sans bien voir à quoi servent ces constructions).

Pierre Gilles Lemarié-Rieusset, Université d'Evry

Random Matrices, Frobenius Eigenvalues, and Monodromy
N. M. Katz et P. Sarnak
Colloquium Publications, 45, Am. Math. Soc., 1999

Le point de depart de cet ouvrage est le phénomène de *corrélation des paires* pour les zéros de la fonction Zeta de Riemann découvert par Montgomery dans les années 70 : soient $\cdots \leqslant \gamma_{-1} < 0 < \gamma_1 \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n \leqslant \ldots$ la suite des parties imaginaires des zéros de Zeta ($\gamma_{-i} = -\gamma_i$).

On commence par renormaliser cette suite en posant pour $i \geqslant 1$ $\hat{\gamma}_i := \gamma_i \log \gamma_i / 2\pi$ de sorte que l'espacement entre $\hat{\gamma}_i$ et $\hat{\gamma}_{i+1}$ vaut 1 en moyenne. Supposant l'hypothèse de Riemann, Montgomery pu calcuter la distribution limite pour la corrélation des paires de $\hat{\gamma}_i$ pour certaines fonctions test : plus precisement, il obtint que l'égalité

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant N} f(\hat{\gamma}_j - \hat{\gamma}_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(1 - (\sin \pi x / \pi x)^2) dx$$

est valable pour toute fonction f dont la transformée de Fourier est à support compact contenu dans l'intervalle $]-1,1[$. Il a également conjecturé que l'intervalle $]-1,1[$ peut être remplacé par tout intervalle borné (c'est la conjecture de corrélation des paires) ; cette conjecture fut par la suite confirmée numériquement par Odlyzko. Elle a évidemment des conséquences directes sur la distribution des nombres premiers, mais la formule ci-dessus a ceci de vraiment remarquable (comme l'a noté Odlyzko), que la densité limite $(1 - (\sin \pi x / \pi x)^2)$ est précisement celle calculée par les physiciens pour la corrélation des paires d'angles des valeurs propres de matrices aléatoires, unitaires et de rang tendant vers l'infini. Ce phénomène n'est pas limité à la seule fonction zeta : en effet, dans [Duke Math. J. 81 (1996), no. 2, 269–322], Rudnick et Sarnak donnèrent une vaste généralisation du résultat de Montgomery pour les fonctions L de formes automorphes sur $GL_n(\mathbf{Q})$ (à nouveau en faisant des restrictions sur le support de la transformée de Fourier des fonctions test), intégrant ainsi la conjecture de corrélation des paires à un vaste ensemble de conjectures que Katz et Sarnak désignent génériquement sous le nom de « lois de Montgomery-Odlyzko » [Bull. AMS, vol. 36, no. 1,1–26]. Schématiquement ces lois prédisent que les zéros non triviaux d'une fonction L sont tous sur la droite critique (hypothèse de Riemann généralisée) et suivent les même lois de répartitions que les (angles des) valeurs propres d'une matrice aléatoire de rang tendant vers l'infini (on peut bien sûr donner une formulation précise : on renvoie pour cela à loc. cit.). Ces conjectures sont sans doute très profondes : ainsi un résultat récent de Iwaniec, Luo et Sarnak établit que des formes faibles des lois de Montgomery-Odlyzko pour les fonctions L de caractères de Dirichlet impliquent l'existence de régions sans zéros *uniformes* (ie. de la forme $\{s \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, s > \sigma\}$ avec $1/2 < \sigma < 1$) pour les fonctions L de formes modulaires, cuspidales, de poids assez grand. Cependant, bien que des résultats profonds de théorie analytique des nombres autant numériques que théoriques viennent étayer ces lois, on ne dispose pour l'instant d'aucun moyen pour les attaquer sérieusement. L'objet du présent livre est d'établir, en toute généralité, que les lois de Montgomery-Odlyzko sont valides pour des familles de fonctions L attachées à des objets géométriques définis sur les corps finis. Cela est accompli en deux parties utilisant des méthodes très différentes, suivant une stratégie décrite en détail dans l'introduction.

La première partie du livre (Chapitres 1 à 8) est consacrée à une présentation systématique et unifiée de la théorie des matrices aléatoires, sur chacune des cinq familles de groupes classiques compacts $G(N) = U(N)$, $USp(2N)$, $SO(2N)$, $O_-(2N+1)$, $O_-(2N+2)$. La théorie des matrices aléatoires provient de la physique mathématique et remonte à Wigner (voir Mehta [Random Matrices, Second edition, Acad. Press, 1991] pour une référence classique) ; on y étudie diverses mesures attachées aux valeurs propres d'une matrice de $G(N)$, une des plus simples étant la mesure sur $\mathbf{R}$ qui calcule les espacements (normalisés) entre les angles de deux valeurs propres consécutives, elle est définie pour $A \in G(N) = U(N)$ (nous ne considèrerons que le cas du groupe unitaire dans cette revue) par

$$\mu(A, G(N), 1) := \frac{1}{N} \sum_{i=1\ldots N} \delta_{\frac{N}{2\pi}(\theta_{i+1} - \theta_i)}$$

où les angles $\theta_1 \leqslant \cdots \leqslant \theta_N \in [0, 2\pi[$ sont les arguments des valeurs propres de A. Plus généralement, les auteurs considèrent d'autres mesures d'espacement, $\mu(A, G(N), c)$, vivant sur $\mathbf{R}^r$ et paramétrées par un vecteur de décalage $c \in \mathbf{Z}^r$. Equippant $G(N)$ de sa mesure de Haar on considère alors $A \to \mu(A, G(N), c)$ comme une variable aléatoire à valeurs dans l'espace des mesures sur $\mathbf{R}^r$ et on étudie alors les propriétés de l'espérance $\mu(G(N), c) = \int_{G(N)} \mu(A, G(N), c) dA$. Utilisant dans ce cadre très général, certaines méthodes typiques des matrices aléatoires (formules d'intégration de Weyl, polynômes orthogonaux et et déterminants de Fredholm) les auteurs montrent que, pour N tendant vers $+\infty$, les mesures $\mu(G(N), c)$ convergent faiblement vers une mesure *universelle* $\mu(univ, c)$; en particulier — et c'est remarquable — la mesure limite ne depend pas de la famille $\{G(N)\}$ choisie ! En fait les auteurs vont plus loin en prouvant une loi des grands nombres qui donne une estimation explicite de la vitesse de convergence : pour tout $\varepsilon > 0$

$$\int_{G(N)} discr\Big(\mu(A, G(N), c), \mu(univ, c)\Big) dA \ll_{c,\varepsilon} N^{\varepsilon - 1/(2r+4)},$$

ici $discr(*, *)$ désigne la discrépance des deux mesures et est définie comme étant la norme sup. de la différence des deux fonctions de répartition.

La preuve de ces résultats est donnée au long des chapitres 1 à 7 : dans les chapitres 1 à 4, les auteurs réalisent, à l'aide d'arguments combinatoires sophistiqués, une série de dévissages culminant à la fin du chapitre 4, dans les Theorem 4.2.2, Proposition 4.2.3 et Corollary 4.2.4. On est alors réduit à montrer pour tout $n \geqslant 1$ la convergence (quand $N \to +\infty$) de l'espérance de la distribution de corrélation entre n-uplets d'angles de valeurs propres, à obtenir une borne pour la variance de ces distributions et enfin à majorer convenablement la queue de la fonction de répartition de la mesure d'espacement $\mu(univ, 1)([s, \infty[)$ pour $s > 0$ tendant vers l'infini. Les deux premières étapes sont réalisées au cours du chapitre 5 par l'emploi des formules d'intégration de Weyl et de la méthode des polygones orthogonaux, due à Gaudin-Mehta, convenablement axiomatisée. Elle conduit à estimer des intégrales de la forme (dans le cas $G(N) = U(N)$)

$$(1) \qquad \int_{[0,2\pi[^N} f(\frac{N}{2\pi}(x_1, \dots, x_n)) \det_{n \times n}(L_N(x_i, x_j)) \prod_{i=1}^{n} \frac{dx_i}{2\pi},$$

avec $L_N(x, x')$ un polynome trigonométrique et f une fonction test.

La question d'estimer convenablement $\mu(univ, 1)([s, \infty[)$ est plus difficile et occupe les chapitres 6, 7 et 8. Elle se réduit à l'étude d'une autre mesure décrivant pour chaque $j \geqslant 1$, la distribution de l'angle de la j-ième valeur propre qui est définie (pour $G(N) = U(N)$) par

$$\nu(j, G(N))([-\infty, s]) = \mu_{Haar}(\{A \in G(N),\ \frac{N}{2\pi}\theta_j \leqslant s\}).$$

A nouveau, cette étude conduit à estimer des intégrales de type (1) — pour les fonctions de la forme $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1..n} \mathbf{1}_{[0,s]}(x_i)$ — que l'on interprète en termes des coefficients du déterminant de Fredholm associé à l'opérateur intégral (de rang fini) de noyau $L_N(x, x')\mathbf{1}_{[0,s]}(x')$ (voir Thm. 6.3.5 et ses variantes ainsi que la section 6.4). Le traitement du problème originel est alors achevé lors des Prop. 6.13.1 et 6.13.4. Dans les chapitres 7. et 8. la relation avec les déterminants de Fredholm est exploitée plus avant : les auteurs montrent que les mesures $\nu(j, G(N))$ admettent des mesures limites quand $N \to +\infty$ et établissent une loi des grands nombres pour cette mesure analogue à celle décrite précédemment. Cependant, à la différence des mesures d'espacement, il n'y a pas universalité : on trouve en fait trois mesures limites possibles, la première pour la famille $U(N)$, la deuxième pour les familles $SO(2N)$ et $O_-(2N+1)$ et la dernière pour les familles $USp(2N)$, $SO(2N+1)$ et $O_-(2N+2)$. Ce sont aussi les méthodes de ces chapitres qui permettent de tracer les graphes des diverses fonctions de répartitions présentés en appendice.

La seconde partie du livre (Chapitres 9 à 13) donne des exemples de familles de fonctions L pour lesquelles les lois de Montgomery-Odlyzko sont vérifiées : ce sont les polynômes caractéristiques de (classes de conjugaison de) Frobenius agissant sur les groupes de cohomologie ℓ-adiques attachés à des variétés algébriques sur les corps finis. L'outil principal de cette partie est le theorème de Deligne sur l'équidistribution des Frobenius associés à un $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau $\mathcal{F}_N$ pur de poids zéro sur un schéma S. Ce théorème et les prérequis de cohomologie ℓ-adique sont très complètement revus dans les chapitres 9 et 10 et avec un peu de foi sont accessibles à un non-specialiste ; d'autre part certains des résultats de specialisation de la cohomologie sont nouveaux et trouveront certainement d'autres applications. On se donne un faisceau $\mathcal{F}_N$ lisse sur S, pur de poids zéro, et dont les groupes de monodromie arithmétique et géométrique coïncident ; notons $G^\natural$ l'espace des classes de conjugaison d'un compact maximal du complexifié du groupe de monodromie géométrique ; cet espace est canoniquement muni de la mesure de *Sato-Tate* μ_{ST} (l'image directe de la mesure de Haar). Le théorème d'équidistribution de Deligne dit grosso-modo que l'ensemble des (classes de conjugaison de) des Frobenius $\{Frob_x(\mathcal{F}_N)\}_{x\in S(\mathbf{F}_q)}$ définissent, dans $G^\natural$, un ensemble qui devient equidistribué relativement μ_{ST} quand $q \to +\infty$. Si le compact maximal est l'un des $G(N)$ considérés ci-dessus, ce théorème et la première partie du livre impliquent (par exemple), pour N assez grand et q assez grand (dépendant de N), la loi des grands nombres

$$\frac{1}{|S(\mathbf{F}_q)|}\sum_{x\in S(\mathbf{F}_q)} discr(\mu(Frob_x(\mathcal{F}_N), G(N), c), \mu(univ, c)) \leqslant N^{-1/(2r+5)}.$$

La suite des chapitres 10 et 11 exhibe des situations où le groupe de monodromie géométrique est calculé explicitement. Un exemple particulièrement attrayant est celui des courbes de genre g sur un corps fini $\mathbf{F}_q$. Notons $\mathcal{M}_g(\mathbf{F}_q)$ cet ensemble (fini). Soit C une telle courbe, d'après Weil, les racines de la fonction L associées à C sont de la forme $\{\sqrt{q}e^{i\theta_1}, \sqrt{q}e^{-i\theta_1}, \dots \sqrt{q}e^{i\theta_g}, \sqrt{q}e^{-i\theta_g}\}$ for $\theta_1 \leqslant \dots, \leqslant \theta_g \in [0,\pi]$ et sont en fait les valeurs propres du Frobenius de $\mathbf{F}_q$ agissant sur $H^1(C_{\overline{\mathbf{F}_q}}, \mathbf{Q}_\ell)$; ainsi le $2g$-uplet $\{e^{i\theta_1}, e^{-i\theta_1}, \dots e^{i\theta_g}, e^{-i\theta_g}\}$ définit une classe de conjugaison dans $USp(2g)$ (notons la $\{A_C\}$). On souhaiterait alors appliquer les méthodes précédentes pour montrer que quand g et q sont assez grands, on a une loi des grands nombres de la forme

$$\frac{1}{|\mathcal{M}_g(\mathbf{F}_q)|}\sum_{\mathcal{C}\in\mathcal{M}_g(\mathbf{F}_q)} discr(\mu(\{A_C\}, USp(2g), c), \mu(univ, c)) \leqslant g^{-1/(2r+5)}.$$

Cependant l'application n'est pas directe : le foncteur qui a un schéma S associe l'ensemble des classes d'isomorphismes de courbe de genre g sur S n'est pas représentable (comme cela est très bien rappelé et commenté dans le chapitre 10). L'idée est de considérer le foncteur (représentable) des courbes de genre g munies d'une structure « tricanonique » $\mathcal{M}_{g,3K}$, et le faisceau naturel provenant de la courbe universelle sur $\mathcal{M}_{g,3K}$ (cf. section 10.6) : son groupe de monodromie géométrique est $Sp(2g)$. On obtient alors l'inégalité ci-dessus avec $\mathcal{M}_g(\mathbf{F}_q)$ remplacé par $\mathcal{M}_{g,3K}(\mathbf{F}_q)$, puis on passe à la somme originelle par des arguments de comptage et de géométrie algébrique : en étudiant les fibres de l'application d'oubli de structure $\mathcal{M}_{g,3K}(\mathbf{F}_q) \to \mathcal{M}_g(\mathbf{F}_q)$. Ainsi donc obtient-t-on que le zéros de la fonction L d'une courbe de grand genre g ont une distribution proche de celle des valeurs propres d'une matrice aléatoire de $USp(2g)$. D'autres exemples sont donnés au chapitre 11 : le cas des familles de variétés abéliennes de grande dimension g et celui des familles d'hypersurfaces de $\mathbf{P}^{n+1}$ de grand degré. Finalement les auteurs concluent avec l'exemple des familles de sommes de Kloosterman en plusieurs variables dont la monodromie a été étudiée très complètement par le premier auteur dans [Gauss sums, Kloostermann sums and monodromy groups, Ann. Math. Studies, 116, PUP 1988].

Ce livre est remarquable à bien des égards. D'abord, par la variété et la profondeur des mathématiques qu'il couvre et l'originalité. Ensuite par son exposition systématique et rigoureuse des sujets traités : il ne fait aucun doute qu'il deviendra un ouvrage de référence majeur en théorie des matrices aléatoires, même si par endroits son approche systématique engendre une certaine lourdeur dans les notations (mentionnons à ce sujet, un index des notations — absent de la première édition—, est téléchargeable en format pdf à partir du site web de l'AMS). Enfin, avec l'article compagnon des deux auteurs [zéros of zeta functions and symmetry, Bull. AMS, vol. 36, no. 1,1–26], ce livre pose les fondations d'une stimulante philosophie reposant sur les analogies entre la distribution des zéros des fonctions L et celle des valeurs propres de matrices aléatoires. Cette philosophie pourrait être vue comme l'analogue en théorie analytique des nombres, de la philosophie de Langlands pour la théorie des formes automorphes (encore une fois, avec la différence majeure qu'on ne sait même pas montrer son principe de base : l'hypothèse de Riemann !). Même si elle reste inaccessible par les méthodes actuelles, elle constitue cependant un puissant modèle et une source d'inspiration majeure pour la théorie analytique des nombres permettant (à la manière des physiciens) d'interpréter certains phénomènes mystérieux, de faire des prédictions, et surtout de suggérer des voies d'attaques nouvelles pour certains problèmes fameux de la théorie (par exemple la question du zéro de Siegel).

P. Michel, Université de Montpellier

Mixed Motives
M. Levine
Math. Survey and Monographs, 57, Am. Math. Soc., 1998

Soit k un corps commutatif, et soient X, Y deux variétés projectives, lisses et irréductibles sur k. Une *correspondance de Chow* de X vers Y est un élément du groupe de Chow $CH^{\dim X}(X \times_k Y)$ des cycles de codimension $\dim X$ sur $X \times Y$ modulo l'équivalence rationnelle : de ce point de vue, on note ce dernier groupe $\mathrm{Corr}_{\mathrm{Chow}}(X, Y)$. On étend la notion de correspondance au cas où X et Y ne sont pas nécessairement irréductibles en posant $\mathrm{Corr}_{\mathrm{Chow}}(X, Y) = \bigoplus_{i,j} \mathrm{Corr}_{\mathrm{Chow}}(X_i, Y_j)$, où X_i et Y_j décrivent les composantes irréductibles de X et Y. Si Z est une troisième variété projective et lisse, on définit la *composition des correspondances* comme étant l'application bilinéaire

$$\mathrm{Corr}_{\mathrm{Chow}}(X, Y) \times \mathrm{Corr}_{\mathrm{Chow}}(Y, Z) \to \mathrm{Corr}_{\mathrm{Chow}}(X, Z)$$

définie par la formule

$$(\alpha, \beta) \mapsto \beta \circ \alpha = (p_{13})_*(p_{12}^*\alpha \cdot p_{23}^*\beta)$$

où les p_{ij} sont les projections de $X \times Y \times Z$ sur les produits de deux facteurs. Cette composition est associative et définit une structure de catégorie additive tensorielle sur la classe des k-variétés projectives et lisses (la structure tensorielle étant donnée par le produit cartésien des variétés) : la *catégorie des k-correspondances de Chow.* Si $f : Y \to X$ est un morphisme, le graphe de f est un cycle de codimension $\dim X$ sur $X \times Y$. Ceci définit un foncteur contravariant $X \mapsto h_{\mathrm{Chow}}(X)$ de la catégorie $\mathcal{V}(k)$ des k-variétés projectives et lisses vers la catégorie des k-correspondances de Chow. On note $\mathbf{1}$ l'objet $h_{\mathrm{Chow}}(\mathrm{Spec}\, k)$.

On appelle *catégorie des k-motifs de Chow effectifs* l'enveloppe pseudo-abélienne (ou karoubienne) de $\mathrm{Corr}_{\mathrm{Chow}}(k)$, obtenue en adjoignant formellement un noyau à tous les endomorphismes idempotents ; on la note $M_{\mathrm{Chow}}^{\mathrm{eff}}(k)$. Dans cette catégorie, le motif de la droite projective $\mathbf{P}_k^1$ se décompose canoniquement en $\mathbf{1} \oplus L$, où L est le *motif de Lefschetz.* La catégorie $M_{\mathrm{Chow}}(k)$ des *k-motifs de Chow* est obtenue à partir de $M_{\mathrm{Chow}}^{\mathrm{eff}}(k)$ en inversant formellement l'objet L. On note habituellement $M(n)$ l'objet $M \otimes L^{\otimes n}$ pour $M \in M_{\mathrm{Chow}}(k)$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a donc une suite de foncteurs, dont les deux derniers sont additifs :

$$\mathcal{V}(k)^{\mathrm{o}} \to \mathrm{Corr}_{\mathrm{Chow}}(k) \to M_{\mathrm{Chow}}^{\mathrm{eff}}(k) \to M_{\mathrm{Chow}}(k).$$

La catégorie des motifs de Chow n'est pas la catégorie considérée par A. Grothendieck dans les années 60. Au lieu de l'équivalence rationnelle, ce dernier s'intéressait à l'équivalence *numérique*, ou encore à l'équivalence *homologique* relative à une cohomologie de Weil fixée : l'une des célèbres conjectures standards [7] prédit que ces deux équivalences coïncident après tensorisation par $\mathbb{Q}$. Plus généralement, étant donné une relation d'équivalence « adéquate » $\sim$ sur les cycles algébriques [13], on peut définir des catégories analogues aux précédentes, reliées par des foncteurs :

$$\mathcal{V}(k)^{\mathrm{o}} \to \mathrm{Corr}_{\sim}(k) \to M_{\sim}^{\mathrm{eff}}(k) \to M_{\sim}(k).$$

Les trois dernières catégories sont des quotients des mêmes catégories pour $\sim$ l'équivalence rationnelle. U. Jannsen a démontré que $M_{\mathrm{num}}(k)$, correspondant à l'équivalence numérique, devient abélienne et semi-simple après tensorisation par $\mathbb{Q}$ [10] ; les conjectures standards de Grothendieck impliquent que la catégorie obtenue $M_{\mathrm{num}}(k, \mathbb{Q})$ est même *tannakienne* et munie d'une graduation canonique, appelée *graduation par le poids.* Dans ce cas, le motif

$h(X)$ d'une variété projective lisse X dans $M_{\mathrm{num}}(k,\mathbb{Q})$[10] se décompose canoniquement en une somme

$$h(X) = \bigoplus_{i=0}^{2\dim X} h^i(X)$$

où les objets $h^i(X)$ peuvent être considérés comme des objets de cohomologie universels de X : toute cohomologie de Weil H^* se factorise canoniquement à travers $M_{\mathrm{num}}(k,K)$ via un *foncteur fibre* Φ tel que $H^i(X) = \Phi(h^i(X))$ pour tout $X \in \mathcal{V}(k)$.

Avec Grothendieck, Deligne, Beilinson... ([2] 5.10), on espère en fait l'existence d'une catégorie abélienne de *motifs mixtes* $MM(k,\mathbb{Q})$, dont $M_{\mathrm{num}}(k,\mathbb{Q})$ serait la sous-catégorie pleine des objets semi-simples, et qui serait le réceptacle d'une théorie cohomologique universelle définie sur la catégorie de *toutes les k-variétés*. En effet, la théorie des poids montre que, alors que la cohomologie (l-adique, de de Rham, de Betti...) d'une variété projective et lisse se découpe canoniquement en somme directe de parties « pures », il n'en est plus de même lorsque la variété X n'est pas projective et lisse : dans ce cas apparaissent des extensions non triviales de parties pures. On ne peut donc pas espérer associer en général à X des objets de cohomologie dans $M_{\mathrm{num}}(k,\mathbb{Q})$ et on est conduit à essayer d'agrandir cette catégorie. Dans $MM(k,\mathbb{Q})$, la graduation par le poids devrait être remplacée par une *filtration par le poids*, de gradué associé exact et à valeurs dans $M_{\mathrm{num}}(k,\mathbb{Q})$.

On a imaginé que, pour obtenir $MM(k,\mathbb{Q})$, il serait plus facile de construire d'abord sa *catégorie dérivée* [18, 19], ou tout au moins une catégorie triangulée munie d'une t-structure de cœur $MM(k,\mathbb{Q})$ [6], [11]. Cette approche est fortement influencée par la théorie des faisceaux pervers ([2], où l'on trouvera la définition d'une t-structure). On dispose à présent de trois constructions d'une catégorie triangulée candidate à être une telle catégorie :

– La catégorie $\mathcal{D}(k)$ de M. Hanamura [8,9].
– La catégorie $\mathcal{DM}(k)$ de M. Levine [15].
– La catégorie $DM_{gm}(k)$ de V. Voevodsky [21].

C'est l'ouvrage construisant la deuxième catégorie qui est l'objet du présent rapport. Avant d'entamer la discussion de ce travail, commençons par comparer les trois constructions, pour le bénéfice du lecteur :

a) La catégorie $\mathcal{D}(k)$ de Hanamura est à coefficients rationnels, alors que les deux autres sont à coefficients entiers.

b) Les trois catégories disposent d'un foncteur additif tensoriel canonique

$$M_{\mathrm{Chow}}(k) \to D \quad (D = \mathcal{D}(k), \mathcal{DM}(k) \text{ ou } DM_{gm}(k)) \tag{1}$$

mais ce foncteur est covariant pour les catégories de Hanamura et Levine, contravariant pour celle de Voevodsky. Dans le cas de Levine, il envoie le motif de Lefschetz L sur un objet noté $\mathbb{Z}(1)[2]$[11]. Il est pleinement fidèle (chez Voevodsky, sous la résolution des singularités).

c) Levine a construit une équivalence de catégories entre $\mathcal{DM}(k)$ et $DM_{gm}(k)$ lorsque k est de caractéristique 0 ([15], ch. VI, th. 2.2.5) ; la démonstration utilise la résolution des singularités). Par contre, il n'a pas été construit pour le moment d'équivalence de catégories entre $\mathcal{D}(k)$ et $\mathcal{DM}(k,\mathbb{Q})$ ou $DM_{gm}(k,\mathbb{Q})$, même lorsque $\operatorname{car} k = 0$.

d) Les trois catégories disposent d'un foncteur

$$Sm/k \to D \quad (D = \mathcal{D}(k), \mathcal{DM}(k) \text{ ou } DM_{gm}(k))$$

associant à une variété quasi-projective lisse sur k son *motif triangulé*. Ce foncteur est noté M_{gm} chez Voevodsky, $X \mapsto \mathbb{Z}_X$ chez Levine et h chez Hanamura ; il prolonge le foncteur $\mathcal{V}(k) \to D$ déduit de (1), donc est covariant chez Voevodsky et contravariant chez les deux autres auteurs. Chez Levine et Voevodsky, il est défini inconditionnellement ; par contre, chez Hanamura, la construction (pour X non projective) fait appel à la résolution des singularités, donc n'est valable actuellement que lorsque $\operatorname{car} k = 0$.

e) Les trois catégories disposent d'un Hom interne pour lequel elles sont des « catégories triangulées tensorielles rigides ». Si $X \in \mathcal{V}(k)$ est purement de dimension d, le dual de $\mathbb{Z}_X$

[10] Nous notons quelque peu informellement $h(X)$ l'image de X dans l'une quelconque des catégories de correspondances ou de motifs considérées.

[11] On note $[n]$ le décalage de n crans de la catégorie triangulée D.

(dans la catégorie de Levine) est $\mathbb{Z}_X(d)[2d]$. Ces propriétés sont inconditionnelles chez Hanamura, mais dépendent de la résolution des singularités chez Levine et Voevodsky (donc. . .). Toutefois, elles sont valables chez Levine sans supposer la résolution des singularités si l'on accepte de tensoriser par $\mathbb{Q}$, comme il résulte d'un théorème bien connu de de Jong [12].

f) En caractéristique zéro, on peut associer dans les trois catégories un motif à *toute* variété X sur k (variété signifiant ici k-schéma réduit de type fini). En fait, X possède également (disons dans la catégorie de Levine) un motif à support compact $\mathbb{Z}_X^c$, un motif homologique $\mathbb{Z}_X^h$ et un motif de Borel-Moore $\mathbb{Z}_X^{BM}$: le motif $\mathbb{Z}_X^h$ (*resp.* $\mathbb{Z}_X^{BM}$) est dual de $\mathbb{Z}_X$ (*resp.* de $\mathbb{Z}_X^c$).

g) On peut *calculer* certains groupes d'homomorphismes dans les trois catégories : dans celle de Levine, on a un isomorphisme pour $X \in Sm/k$ et $p, q \in \mathbb{Z}$

$$H^q_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Z}(p)) := Hom_{\mathcal{DM}(k)}(\mathbb{Z}_k, \mathbb{Z}_X(p)[q]) \simeq CH^p(X, 2p-q)$$

où $CH^*(X, \#)$ représente les *groupes de Chow supérieurs* de S. Bloch [3]. Lorsqu'on tensorise par $\mathbb{Q}$, on obtient le groupe $K_{2p-q}(X)^{(p)}$, espace propre de poids p pour les opérations d'Adams sur $K_{2p-q}(X) \otimes \mathbb{Q}$ [16], [3], [14].

h) Les trois auteurs proposent des définitions de catégories de motifs sur d'autres bases qu'un corps. La construction de Voevodsky [20] se réduit en fait à une version « étale » de sa catégorie dans le cas d'un corps (voir [21], th. 4.1.12). Celle de Corti et Hanamura [5] définit une catégorie de motifs purs. Levine, dans le livre étudié ici, construit une catégorie triangulée de motifs sur une base réduite quelconque.

i) Voici une liste de propriétés que vérifient les motifs associés aux variétés algébriques sur un corps. Ces propriétés sont vraies dans les catégories des trois auteurs ; elles nécessitent la résolution des singularités dans certains cas que nous n'explicitons pas (et qui varient avec les catégories). Nous les donnons dans le cas de la catégorie de Levine, pour les motifs cohomologique et de Borel-Moore ; elles ne sont pas indépendantes les unes des autres.

1) **Mayer-Vietoris**. Si $X = U \cup V$ avec U, V ouverts, on a des triangles exacts

$$\mathbb{Z}_X \to \mathbb{Z}_U \oplus \mathbb{Z}_V \to \mathbb{Z}_{U\cap V} \to \mathbb{Z}_X[1]$$
$$\mathbb{Z}_X^{BM} \to \mathbb{Z}_U^{BM} \oplus \mathbb{Z}_V^{BM} \to \mathbb{Z}_{U\cap V}^{BM} \to \mathbb{Z}_X^{BM}[1]$$

2) **Invariance par homotopie**. Pour tout X, on a des isomorphismes

$$\mathbb{Z}_{X\times\mathbf{A}^1} \simeq \mathbb{Z}_X$$
$$\mathbb{Z}_{X\times\mathbf{A}^1}^{BM} \simeq \mathbb{Z}_X^{BM}(1)[2]$$

($\mathbf{A}^1$ est la droite affine).

3) **Formule de Künneth**. Pour tout (X, Y),

$$\mathbb{Z}_{X\times Y} \simeq \mathbb{Z}_X \otimes \mathbb{Z}_Y$$
$$\mathbb{Z}_{X\times Y}^{BM} \simeq \mathbb{Z}_X^{BM} \otimes \mathbb{Z}_Y^{BM}$$

4) **Localisation**. Pour $Z \subset X$ sous-variété fermée, d'ouvert complémentaire U, on a un triangle exact

$$\mathbb{Z}_Z^{BM} \to \mathbb{Z}_X^{BM} \to \mathbb{Z}_U^{BM} \to \mathbb{Z}_Z^{BM}[1].$$

Si X et Z sont lisses, avec Z purement de codimension c dans X, on a un triangle « de Gysin »

$$\mathbb{Z}_Z(c)[2c] \to \mathbb{Z}_X \to \mathbb{Z}_U \to \mathbb{Z}_Z(c)[2c+1].$$

5) **Dualité**. Si X est lisse, purement de dimension d, on a un isomorphisme

$$\mathbb{Z}_X^{BM} \simeq \mathbb{Z}_X(d)[2d].$$

6) **Éclatement**. Si k est parfait et si

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "g"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

est un diagramme cartésien de variétés où i et i' sont des immersions fermées, f est propre et $f : X' \setminus Z' \to X \setminus Z$ est un isomorphisme, on a un triangle exact

$$\mathbb{Z}_X \to \mathbb{Z}_Z \oplus \mathbb{Z}_{X'} \to \mathbb{Z}_{Z'} \to \mathbb{Z}_X[1].$$

Signalons enfin, pour le lecteur au courant, que l'existence d'une t-structure convenable sur l'une de ces catégories est loin d'être formelle : par exemple, elle implique la conjecture d'annulation de Beilinson-Soulé sur les petits poids de la K-théorie algébrique ([16], conj. p. 501). Voir [8], III.

Passons à la description du contenu du livre. D'emblée, nous devons avertir le lecteur que cet ouvrage n'est pas d'un abord facile. Ceci tient à plusieurs raisons :

– Le fait que les résultats sont prouvés dans une très grande généralité, beaucoup sur une base à peu près quelconque.
– La très grande sophistication des techniques utilisées.
– L'économie de l'ouvrage. Qu'on ne s'attende pas à un livre qu'il est facile d'ouvrir à la bonne page quand on est en quête d'un résultat particulier. Pour comprendre un énoncé, ou pour être sûr des hypothèses nécessaires, le lecteur aura souvent à revenir aux premières définitions ou à lire plusieurs paragraphes précédant le résultat qui l'intéresse, voire à faire un peu de tourisme. Ainsi, page 10, est introduit un groupe $\mathcal{Z}^d(X/S)$ de cycles relatifs équidimensionnels qui joue un rôle essentiel dans la suite. Ce groupe est défini page 349, mais il faut revenir page 331 et parcourir les pages intermédiaires pour comprendre la définition. À ce stade, on s'aperçoit que cette définition se simplifie considérablement lorsque la base est normale — ce qui n'apparaît nulle part explicitement dans le texte ! Pour prendre un autre exemple, le théorème 2.5.5 de la page 329 (comparant les catégories de Levine et de Voevodsky) apparaît sans condition apparente sur le corps de base ; il faut revenir page 313, au début du §2.1.8, pour s'apercevoir qu'on suppose vraie la résolution des singularités.

Les derniers défauts, qui auraient pu être corrigés par une rédaction comportant un peu plus de rappels, ne doivent toutefois pas décourager le lecteur intéressé par le sujet. Ce livre est écrit de manière extrêmement soignée, voire méticuleuse. Levine n'hésite pas à revenir en détail sur des notions quelque peu folkloriques, comme celles de dualité dans une catégorie triangulée ou de pseudo-abélianisation d'une telle catégorie, ce qui permet de garantir des énoncés précis — et exacts. Il est en fait amené à développer une quantité considérable d'algèbre homologique qui ne se trouve pas facilement ailleurs, ce qui le conduit à ajouter une partie intitulée « Categorical algebra ». À elle seule, cette partie (et d'autres sur les cycles algébriques) peut jouer un rôle de référence, indépendamment de l'intérêt du lecteur pour les motifs.

Levine construit ses catégories $\mathcal{DM}(S)$ « par générateurs et relations », cette description se révélant trompeuse dans les détails. Mais en gros, les générateurs sont les symboles $\mathbb{Z}_X(n)$, où X décrit les S-schémas quasi-projectifs lisses et n décrit $\mathbb{Z}$. On impose ensuite successivement des morphismes « classe de cycle », une fonctorialité pour ceux-ci, l'invariance par homotopie et Mayer-Vietoris (en étant préalablement passé à la catégorie homotopique d'une catégorie de complexes sur les objets ci-dessus), et ainsi de suite jusqu'à obtenir formellement les axiomes d'une théorie cohomologique à la Bloch-Ogus [4], et enfin on prend l'enveloppe pseudo-abélienne. En pratique, la réalisation de ce programme recèle des difficultés techniques redoutables. La manière dont l'auteur les surmonte est en soi un tour de force.

En un sens, le principe de cette construction est proche de celui de Voevodsky [21], mais il y a deux différences : d'une part, Levine ne représente pas ses objets géométriques comme des (complexes de) faisceaux sur un site convenable (le site de Nisnevich chez Voevodsky), d'autre part il travaille sur une base réduite quelconque. Pour ces deux raisons sans doute, ses constructions sont nettement plus délicates que celles de Voevodsky.

Les deux outils fondamentaux qu'utilise Levine sont la théorie des cycles relatifs de Suslin-Voevodsky [17], qu'il reprend d'ailleurs dans l'appendice A de la première partie, et les complexes de cycles de Bloch [3]. En particulier, il parvient à montrer que les Hom dans $\mathcal{DM}(S)$ se calculent comme groupes d'homologie de tels complexes sous certaines conditions axiomatiques ; ces conditions sont vérifiées au moins lorsque S est le spectre d'un corps ou une courbe lisse sur un corps.

En conclusion, il s'agit là d'un ouvrage fondamental qui fera date. Marc Levine nous offre une théorie qui « tourne » et qui ne va pas manquer d'avoir de nombreuses applications. L'acquisition de ce livre est recommandée à la bibliothèque de tout département de mathématiques orienté vers la géométrie algébrique.

Références

[1] A. Beilinson *Height pairing between algebraic cycles*, *in* K-theory, arithmetic and geometry (seminaire, Moscou, 1984–1986), Lect. Notes in Math. **1289**, Springer, 1987, 1–26.

[2] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne *Faisceaux pervers*, Astérisque **100**, SMF, Paris, 1982.

[3] S. Bloch *Algebraic cycles and higher K-theory*, Adv. Math. **61** (1986), 267–304.

[4] S. Bloch, A. Ogus *Gersten's conjecture and the homology of schemes*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **7** (1974), 181–201.

[5] A. Corti, M. Hanamura *Motivic Decomposition and Intersection Chow Groups I*, prépublication, 1998.

[6] P. Deligne *À quoi servent les motifs ?*, *in* Motives, Proc. Symposia Pure Math. **55** (1), AMS, 1994, 143–161.

[7] A. Grothendieck *Standard conjectures on algebraic cycles*, Algebraic Geometry — Bombay colloquium, 1968, Oxford, 1969, 163–199.

[8] M. Hanamura *Mixed motives and algebraic cycles, I, II, III*, I : Math. Res. Lett. **2** (1995), 811–821 ; II : prépublication, 1996 ; III : Math. Res. Lett. **6** (1999), 61–82.

[9] M. Hanamura *Homological and cohomological motives of algebraic varieties*, prépublication, 1996.

[10] U. Jannsen *Motives, numerical equivalence and semi-simplicity*, Invent. Math. **197** (1992), 447–452.

[11] U. Jannsen *Motivic sheaves and filtrations on Chow groups*, *in* Motives, Proc. Symposia Pure Math. **55** (1), AMS, 1994, 245–302.

[12] P. A. de Jong *Smoothness, semi-stability and alterations*, Publ. Math. IHES **83** (1996), 51–93.

[13] S. Kleiman *Algebraic cycles and the Weil conjectures*, *in* Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North Holland, Amsterdam, 1968.

[14] M. Levine *Bloch's higher Chow groups revisited*, K-theory (Strasbourg, 1992), Astérisque **226**, SMF, Paris, 1994, 235–320.

[15] M. Levine Mixed motives, Math. Surveys and Monographs **57**, AMS, Providence, 1998.

[16] C. Soulé *Opérations en K-théorie algébrique*, J. can. math. **37** (1985), 488–550.

[17] A. Suslin, V. Voevodsky *Relative cycles and Chow sheaves*, Cycles, Transfers and motivic homology theories, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, Princeton, 1999.

[18] J.-L. Verdier *Catégories dérivées, état zéro*, *in* Cohomologie étale (SGA4 1/2), Lect. Notes in Math. **569**, Springer, 1977.

[19] J.-L. Verdier Des catégories dérivées des catégories abéliennes, Astérisque **239** (1996), SMF, Paris, 1996.

[20] V. Voevodsky *Homology of schemes*, Selecta Math. **2** (1996), 111–153.

[21] V. Voevodsky *Triangulated categories of motives over a field*, Cycles, Transfers and motivic homology theories, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, Princeton, 1999.

B. Kahn, CNRS, Université de Paris 7