

À propos d'une réflexion de Frédéric Pham¹

Michel ZISMAN (Université Paris 7)

Dans le n° 81 de la *Gazette*, Frédéric Pham nous livre le résultat de quelques réflexions sur les *maths modernes*, qui venant plus de 30 ans après le début de cette crise, promettaient d'être particulièrement intéressantes, non seulement pour les jeunes lecteurs qui n'ont pas vécu ces événements, mais aussi pour les vieux qui tous, plus ou moins, en ont été les acteurs et pas seulement des spectateurs. Malheureusement ce qu'il a écrit est très décevant, tant sa manière d'aborder le sujet me semble superficielle et tant son analyse correspond peu à la réalité² !

Pour commencer, il compare la méthode du « physicien » à celle du mathématicien pour trouver la tangente au cercle d'équation $x^2 + y^2 + 2x + y = 10$. Le « physicien » différentie l'équation donnée, quand le mathématicien applique des résultats compliqués, aux abstractions portant sur des abstractions... et, nous dit Pham, la première méthode est facile à comprendre, alors que la seconde est à l'origine de difficultés infinies pour nos étudiants (je reviendrai plus loin sur cette notion d'étudiant). Consultons à ce propos l'un des premiers traités de calcul différentiel, sinon le premier, l'*Analyse des infiniments petits* du Marquis de l'Hôpital, paru en 1696, qui traite justement d'un exemple analogue : dans la section II consacrée à l'*usage du calcul des différences pour trouver les Tangentes de toutes sortes de lignes courbes*, l'exemple II de la proposition I concerne la courbe d'équation $\frac{ayy}{b} = ax - xx$:

$$\text{et en prenant les différences, } \frac{2aydy}{b} = adx - 2xdx, \text{ d'où on tire } \frac{ydx}{dy} = \frac{2ayy}{ab-2bx} = \frac{2ax-2xx}{a-2x} \text{ en mettant pour } \frac{ayy}{b} \text{ sa valeur } ax - xx.$$

Ainsi l'Hôpital applique très exactement la méthode « facile » du « physicien ». Or de son temps, l'appréciation de ses contemporains était bien différente ! On lui a reproché de n'avoir écrit que pour les savants, tellement rompus dans le calcul, *qu'ils entendent tout à demi-mot*. Aussi les pédagogues se sont-ils mis en devoir de l'expliquer aux « commençants ordinaires », pour reprendre le terme

¹ Frédéric Pham *Le débat sur les « maths modernes » est-il dépassé ?* n° 81 de la *Gazette*.

² Certains collègues ont fait, semble-t-il, une lecture différente de ce texte : partant de leur connaissance des idées de Pham, ils y voient une présentation et une défense des mathématiques comme une science du réel. Ce texte serait donc susceptible de deux lectures différentes selon ce que l'on croit savoir des idées de l'auteur. Par ailleurs, devant une affirmation du type « les mathématiques comme science du réel », il est indispensable au préalable de préciser ce que l'on sous-entend par ces mots : un *run-away argument* si l'on ne me précise pas au préalable ce que l'on sous-entend par ces mots : philosophes et savants depuis des siècles n'ont cessé de leur donner les sens les plus contradictoires.

de l'auteur anonyme de la préface de la 3^e édition, qui distingue ainsi ces lecteurs, des savants auxquels était destiné l'ouvrage. Cette 3^e édition est donc suivie d'un *Commentaire pour l'intelligence des endroits les plus difficiles de cet Ouvrage*, représentant 55 notes d'environ 120 pages, alors que le texte de l'Hôpital en comporte 220³. Le commentaire correspondant à l'exemple ci-dessus est dans la note VII. Son auteur constate au passage que si l'on dispose autrement certaine figure, certaine variable devra être remplacée par son opposée : il faudra remplacer x par $-x$, et il ajoute :

Ce sont là des connaissances que l'on doit supposer dans tout homme qui entend de lire un Traité aussi difficile que celui des infiniments petits.

La difficulté extrême de 1768, date de ce commentaire, s'est donc réduite à une « méthode drôlement simple » pour l'étudiant de Pham, comme quoi, en mathématique aussi, se vérifie la maxime — plus profonde qu'il n'y paraît de prime abord — de l'alpiniste anglais Mummery qui voici un siècle décrivait ainsi l'évolution, au cours du temps, de l'appréciation de la difficulté de gravir une montagne donnée :

D'abord un pic inaccessible, puis la plus dure ascension des Alpes et enfin une promenade pour dames.

Les idées à la base du calcul infinitésimal proviennent de la philosophie. Archimède dans sa *Méthode* attribue à Démocrite la découverte de la formule donnant le volume du tronc de pyramide et du tronc de cône⁴ et Heath⁵ dans son commentaire sur Démocrite conforte cette opinion, citant un texte de Plutarque (d'après Chrysippe) explicitant la méthode, typiquement infinitésimale, utilisée par Démocrite pour obtenir ce résultat. Heath écrit aussi :

Democritus, who, as we shall see, broached other questions involving infinitesimals

Les critiques contre ces méthodes proviennent d'autres philosophes, par exemple Protagoras, qui leur reproche selon Aristote, d'ignorer la nature et le réel. L'Hôpital dans sa préface rattache explicitement la pensée mathématique de son temps à la philosophie antique. Bref, il est hasardeux, d'un point de vue historique, de rattacher le calcul infinitésimal à la physique. C'est au contraire, me semble-t-il, lorsque la physique s'est mathématisée, que son influence a commencé à se manifester. L'Hôpital lui-même indique qu'il avait l'intention de rédiger un chapitre spécial de son livre sur les applications à la physique du calcul infinitésimal :

J'avois dessein d'y ajouter encore une Section pour faire sentir aussi le merveilleux usage de ce calcul dans la Physique...

³ R. Netz montre dans un très intéressant article *Deuteronomic texts : late antiquity and the history of mathematics*, Revue d'histoire des mathématiques t 4 (1998) p. 261-288), comment les commentateurs successifs des mathématiciens de l'antiquité allongeaient et obscurcissaient les manuscrits originaux : heureusement, en ce qui concerne l'époque moderne, les originaux n'ont pas disparu.

⁴ Cf *Les Présocratiques*, édition la Pleïade page 884

⁵ Sir Thomas Heath, *A History of greek Mathematics*, vol 1 pages 178-180

mais il en a été empêché par la maladie.

Pour en terminer sur ce point, je ne résiste pas à la tentation de donner la définition des « variables » que donne l'Hôpital au tout début de sa Section I, à comparer avec celle qu'analyse Pham :

On appelle quantités variables celles qui augmentent ou diminuent continuellement ; et au contraire quantités constantes celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent,

qui met à la portée de tout le monde l'usage des variables en mathématiques et devrait plaire au « physicien » qui sommeille en chacun de nous ! Mais là n'est pas l'essentiel.

En fait, la référence à la physique n'est probablement qu'une figure de style pour traiter « concrètement », en paraissant rester au contact du réel, la vieille opposition entre concret et abstrait, et il est d'usage alors d'évoquer l'influence de Bourbaki et le rôle des figures dans un texte mathématique : j'ai été étonné de voir que Pham sacrifie sans hésitation à ce rite pourtant un peu primaire, qui permet, à un non mathématicien, de donner à peu de frais une teinture savante à un discours superficiel. Je n'ai pas l'intention d'infliger au lecteur une analyse profonde de ces importantes questions qui touchent aux fondements même de l'Homme et que tant de penseurs ont déjà abordées, à la fois car ce n'est pas le lieu de le faire ici et parce que je ne me sens pas particulièrement qualifié pour le faire. Qu'il me soit simplement permis de rappeler que le refus d'utiliser des figures dans un texte mathématique, pour des raisons qui peuvent d'ailleurs être fort différentes selon les auteurs, ne date pas d'aujourd'hui, ni même de notre siècle. Laplace, par exemple, ne trace aucune figure dans son cours à l'École normale de l'an III et Lagrange en a tracé cinq. Dans une intéressante interview accordée au *Mathematical Intelligencer* (Vol 20 n° 1), Pierre Cartier, qui aborde lui aussi les problèmes de l'abstraction et de l'usage de figures, signale que déjà dans Euclide il n'y avait pas ou peu de dessins et que ceux que l'on y trouve ont pour la plupart été ajoutés dans des éditions ultérieures. Mais surtout Cartier replace le mouvement vers l'abstraction que nous avons connu, dans un contexte général qui dépasse l'anecdote et qui s'inscrit dans le mouvement de tout un siècle dominé par des idéologies globalisantes, ayant chacune vocation à une explication totale du monde.

Les « maths modernes » n'étaient qu'un élément de ce vaste mouvement. Avant d'invoquer des justifications pédagogiques, les créateurs de ce courant mettaient en avant des arguments purement idéologiques, qui plus ou moins se résumaient en ce sentiment que pour faire le bonheur du monde, il fallait commencer par apporter aux enfants et adolescents autre chose que des mathématiques enseignées par des bourgeois aux enfants de bourgeois. Dans cette perspective l'abstraction apparaissait avant tout comme purificatrice, annonçant les temps nouveaux dominés par la seule raison. P. Greco a consacré un article⁶ pour développer ces thèmes :

⁶ intitulé *Pédagogie et mathématiques* dans le tome 12 de l'*Encyclopaedia Universalis*, page 675 de la première édition

Tous les enfants ont droit à la mathématique ; tous les maîtres doivent contribuer à part égale à l'édification de cette compétence [...] On a vu cependant qu'ils associaient indissolublement une demande didactique et une revendication sociale [...] De quoi l'institution a-t-elle peur ?

Cet article a disparu des éditions les plus récentes. Les Éditions Dunod ont édité en 1968 un petit ouvrage au titre déjà significatif *mathématiques nouvelles pour le recyclage des parents*, par A. Kaufmann et G. Cullmann, où les auteurs opposent un monde de sous-hommes incapables de juger par eux-mêmes et à la merci d'une élite orgueilleuse de son savoir, à un monde radieux conduit par l'intelligence :

Ainsi en quelque sorte, cette explosion de la mathématique pourrait-elle contribuer à accroître la plus essentielle des libertés, la liberté intérieure, celle de l'esprit toujours plus ouvert au savoir.

Loin d'être une simple approche nouvelle de l'enseignement de mathématiques peut-être différentes, les « maths modernes » se voyaient-elles la voie d'accès au bonheur au vingtième siècle. Un bonheur générique pour étudiant générique, futur citoyen du meilleur des mondes. Tout ce fatras idéologique peut sembler bien loin aujourd'hui, où nos préoccupations ont un air bien concret et où nos pédagogues basent leurs conclusions sur le résultat d'enquêtes, de colloques, d'expériences pédagogiques sous l'œil bienveillant du ministre de l'Éducation nationale. Cet appétit de concret reste cependant superficiel, tout comme la soif d'abstraction d'autrefois ! Mais au moins les réformateurs du passé avaient-ils l'avantage sur les nôtres d'annoncer à qui était destiné leur enseignement et pourquoi il fallait enseigner ceci et non cela. Qu'en est-il aujourd'hui ? Toute cette querelle, entre pédagogues ou simples enseignants, qui constitue l'essentiel de l'article de Pham me semble complètement sans intérêt, dans la mesure où je ne sais pas qui sont les enseignés, pourquoi on les enseigne et pourquoi ces enseignés tiennent à notre enseignement et Pham est muet sur ces points pourtant essentiels aujourd'hui. S'il s'agit, pour les professeurs, de former des mathématiciens, nous savons tous, par notre propre expérience, que les cours sont complètement inutiles et qu'un bon ouvrage, écrit dans un esprit dominé par la science et non par un pédagogue, suffit amplement pour atteindre le niveau de la maîtrise ; le rôle du professeur n'apparaît qu'au delà. Mais s'il s'agissait de cela, le rendement de l'université, qui n'est déjà pas fameux, serait calamiteux ! Entre cette hypothèse et l'autre hypothèse extrême, selon laquelle le passage des étudiants dans nos amphithéâtres ne servirait qu'à diminuer les chiffres du chômage — et dans ce cas l'art d'enseigner a bien peu d'importance —, il doit y avoir une zone plus précise où se trouve la vérité et qu'il faudrait peut-être trouver puis explorer. On n'y trouverait probablement pas des motivations uniques, des étudiants génériques et des pédagogies passe-partout. C'est ce que je m'attendais à lire dans l'article de Pham, au titre prometteur. Mais je n'y trouve que des considérations banales et uniformes dont l'aspect concret est aussi factice et loin de la réalité que les appels à l'abstrait, à un Bourbaki imaginaire, à la mode au milieu de ce siècle.

★ ★ ★