

# CARNET

---

## Lichnérowicz et la réforme des mathématiques

André REVUZ

---

Je prendrai la liberté de désigner notre cher camarade disparu par le diminutif affectueux que j'utilise depuis 65 ans : Lichné...

Pour rédiger les quelques lignes qui suivent, j'ai eu principalement recours pour rafraîchir mes souvenirs personnels à deux documents.

— le rapport préliminaire de la commission rédigé par Lichné lui même en mars 1967

— le texte d'une conférence, postérieure à 1973, qu'il intitula : buts et difficultés de la réforme de l'enseignement mathématique en France.

Je souhaiterai que ces documents soient largement publiés aujourd'hui.

*André Lichnérowicz*

La commission a travaillé de décembre 1966 à juin 1973 où elle fut dissoute à l'initiative de son président.

L'idée fondamentale de Lichné était qu'une des conditions nécessaires du développement harmonieux de nos sociétés était la diffusion d'une solide culture scientifique et au sein de celle-ci de la culture mathématique : il tenait pour essentielle l'économie de pensée que permettent les mathématiques.

L'objectif de la commission était donc d'améliorer l'enseignement mathématique à tous les niveaux.

### Les IREM

La commission estima que tout progrès réel était conditionné par une étude objective des problèmes que rencontre cet enseignement et recommanda, dès ses premières séances, la création des IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement Mathématique) dont l'idée était proposée par l'avant-garde de l'APMEP

(Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) (et la justice veut que je cite ici Glaymann, Vissio et Walusinski). Le projet soumis début 1967 au ministre de l'époque, A. Peyrefitte, reçut la réponse suivante : « c'est très bien mais ça ne peut pas être limité aux seules mathématiques. » Enterrement élégant ! Mais 68 arriva et le nouveau ministre E. Faure fut trop heureux de faire immédiatement quelque chose en créant les premiers IREM, suivis à la cadence de 3 ou 4 par an de leurs frères pour aboutir à créer un IREM par Académie (existant en 1975). Un comité national des IREM présidé par Lichné veillait sur leur fonctionnement. Leurs missions explicites étaient :

- La recherche sur l'enseignement des mathématiques à tous les niveaux.
- La formation continue des professeurs du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>e</sup> degré.
- La diffusion des documents relatifs à ces thèmes.

Les IREM, qui fonctionnent toujours, ont fourni un excellent travail qui n'a malheureusement pas toujours eu l'impact qu'il méritait et il faut aussi regretter que bien que créés comme « instituts d'université » ils n'ont été l'objet de la part des mathématiciens qu'au mieux de la plus pure indifférence. Et cependant les IREM ont fait preuve d'une ouverture d'esprit qui n'est, hélas, pas très fréquente, n'hésitant pas à collaborer avec des représentants d'autres disciplines et des psychologues.

### Expérimentation

Réformer l'enseignement passait inéluctablement par une modification des programmes, mais aussi pensait Lichné, des méthodes d'enseignement.

Une expérimentation fut mise sur pied par les IREM et l'Institut national pédagogique avec l'objectif de tester de nouveaux contenus et de nouvelles méthodes. Il fut institué dans un nombre non négligeable d'établissements un travail en groupe pour la préparation de l'enseignement et pour son évaluation. Jamais réforme ne fut préparée par une expérimentation aussi large, mais comme je le constatais quelques années plus tard : « toutes les expériences réussissent, toutes les extensions échouent ». Ce qui ne veut pas dire que les expériences n'étaient pas sérieuses, mais que les extensions devraient être progressives ce qui évidemment se heurte au dogme illusoire du « même enseignement pour tous ». Les professeurs qui participaient aux expériences étaient volontaires et prêts à faire de grands efforts et du point de vue scientifique solidement encadrés, cela permettait des avancées qu'on ne pouvait attendre d'enseignants non-motivés et non encadrés. Les classes expérimentales faisaient le bonheur tant des professeurs que des élèves et avaient le mérite de fournir des théorèmes d'existence du type « Il est possible d'enseigner telle notion à tel public » à condition de rappeler l'utilisation des méthodes actives provoquant l'initiative des élèves et l'on eut parfois à assister à l'utilisation catastrophique par un enseignant dogmatique de séquences qui s'étaient montrées très efficaces.

### Les programmes

Quant à la modification officielle et généralisée des programmes, elle présentait des difficultés pas faciles à évaluer : peut-on ne modifier qu'un peu ? À quelle cadence faut-il modifier ? Dès le début, Lichné avait posé le principe :

modifications graduées par étapes de 4 ans. Cela semblait la sagesse et l'indication était bonne, mais à l'usage il fut clair d'une part que 4 ans était un délai trop court pour qu'une modification qui ne fut pas superficielle soit vraiment assimilée et que d'autre part dans la vie politique du ministère, 4 ans c'est terriblement long : 5 ministres se sont succédés de 1966 à 1973 ! Et les ministres étaient sensibles aux oppositions sourdes ou véhémentes qui se firent rapidement jour. Je ne ferai pas l'histoire, attristante, de ces oppositions qui me furent une douloureuse surprise, mais il faut insister sur la patience avec laquelle Lichné y fit front sans jamais se départir de son calme, mais n'en pensant pas moins. Un jour où, parlant d'un opposant de marque particulièrement virulent je lui dis : « je pense qu'il est quand même honnête », Lichné me répondit sans élever la voix : « non, il n'est pas honnête ! ».

L'origine essentielle de ces oppositions est certainement le conservatisme viscéral qui règne quasiment partout : changer demande des efforts non négligeables, (à moins que l'on change sans en être conscient), mais chez la plupart changer est proprement sacrilège, ce qui explique mainte véhémence...

À cet égard, Lichné fit preuve au départ, sur les possibilités d'évolution des mentalités, d'un optimisme que la suite ne confirma malheureusement pas. Un paradoxe voulut que l'inspection générale, résolument hostile au début fut complètement convaincue — 3 ans plus tard ! — mais pour beaucoup d'autres ce n'est pas 3 ans, mais 30 ans qu'il aurait fallu.

La décision de Lichné de dissoudre la commission en juin 1973 et qu'il ne commenta pas tenait sans doute à ce qu'il avait senti que les troupes ne suivaient pas et qu'il lui manquait le soutien explicite de la communauté des mathématiciens qui ne porta jamais qu'un intérêt lointain aux problèmes d'enseignement et dont l'individualisme exacerbé des membres paralyse toute action collective.

La commission ne pensa jamais que les programmes qu'elle proposait étaient parfaits et intangibles — ç'aurait été la négation de toute sa philosophie —, mais après elle ce ne furent pas à des tentatives d'adaptation et d'amélioration que l'on procéda, mais à une démolition systématique, aggravée par une recherche de démocratisation mal comprise aboutissant à un nivellement par le bas alors que Lichné visait une démocratisation par le haut. Sommes nous arrivés à un minimum à partir duquel on va pouvoir remonter ?

Le plus bel hommage que la communauté mathématique dans sa totalité — il faut revivifier la formule : « de la maternelle à l'université » — pourrait rendre à Lichné serait de reprendre dans le contexte actuel, les efforts qui furent les siens et mesurant soigneusement les redoutables obstacles qu'il faudra affronter (pesanteurs sociologiques, rigidités administratives et corporatismes, étroitesse de vues, analphabétisme mathématique de la quasi totalité de la population) de parvenir à ce que l'enseignement mathématique possède toutes les qualités qu'il souhaitait lui faire acquérir.

## Lichnérowicz et la géométrie différentielle

Marcel BERGER

---

**L**ichnérowicz s'est intéressé à de très nombreux aspects, facettes de la géométrie différentielle. Dans un certain nombre de cas, ce seront ci-dessous nos éclairs, sa contribution fut relativement ponctuelle. Dans d'autres au contraire il a poursuivi ses travaux sur de longues périodes, le cas kählerien en est l'un des plus frappants. Mais il reste un esprit remarquable par cette curiosité à grand angle (n'avait-il pas envisagé d'écrire une thèse sur le roman policier?), largeur de spectre qui explique, entre autres raisons, son énorme influence comme patron de thèse, en langage plus moderne on parle de directeur de recherches. Les sections 1 à 4 nous semblent couvrir les domaines qu'il a longuement et grandement explorés. Nous mentionnerons dans la section 5 ses recherches plus localisées. Par incompetence, nous devons ignorer ici ses contributions en géométrie symplectique, déformations et quantifications, elles feront l'objet d'un autre article rédigé par un expert, Charles-Michel Marle.

Il nous semble certain que son intérêt pour la géométrie différentielle « pure » était motivé par son profil à la fois de géomètre et de physicien mathématicien. Pure ne doit pas être mal compris, pour lui les variétés différentiables avaient une métrique, de la courbure mais aussi un laplacien, pouvaient être des espaces homogènes, des variétés à structure holomorphe complexe, etc.

Il faut mentionner qu'il a été l'un des premiers à introduire en France après-guerre une direction de thèse de proximité. Au lieu de s'entendre dire « voici un sujet de thèse, revenez-me voir dans huit ans quand vous aurez fini », on savait qu'on pouvait aller le voir très souvent. Il tenait aussi à cette qualité, essentielle si l'on ne veut pas risquer de causer éventuellement de graves dégâts chez les thésards, de vérifier que le sujet de thèse offert ne comportait pas de risque. Pour citer mon cas personnel, il m'a dit « tu peux travailler sur les groupes d'holonomie, je viens de vérifier que Chevalley ne s'en occupe plus ».

La France a connu de 1918 à 1955 un retard mathématique considérable, surtout sur le plan de l'enseignement. Il y avait certes Elie Cartan, Gaston Julia, Paul Lévy, mais ils étaient isolés de la grande masse des mathématiques diffusées largement. Par exemple il n'y avait, mettons de 1945-1955, pas un seul cours de mathématiques raisonnablement moderne à la Sorbonne (à l'exception de celui de troisième cycle de Paul Lévy). La cause est aujourd'hui admise semble-t-il : l'hémorragie absolue, si l'on excepte Gaston Julia et Paul Lévy, de la première guerre mondiale. Des livres comme le van der Waerden, le Courant-Hilbert et bien d'autres, étaient ignorés de presque tous les professionnels. Bien sûr, Bourbaki fut le grand sauveteur de notre isolement, mais Lichnérowicz y participa aussi largement. Dans de nombreux cours et par le livre qui les résume, il milita inlassablement pour diffuser en France l'écriture moderne des espaces vectoriels et le calcul tensoriel, la notion de variété et celle de forme différentielle extérieure, l'espace de Hilbert, les séries et la transformation de Fourier, les équations intégrales. C'était une partie de son enseignement de physique mathématique à Strasbourg et le livre (Lichnérowicz, 1947) eut une

influence considérable. La préface par Darmon en est instructive pour montrer l'isolement français dans le domaine en question : il n'y est question que d'ouvrages allemands d'avant-guerre.

### 1. A la suite de Bochner (formules « à la Weitzenböck »)

Le texte (Bochner, 1946) restera une pierre incontournable : Bochner calcula le laplacien du carré de la norme d'une 1-forme différentielle  $\omega$  sur une variété riemannienne :

$$-\frac{1}{2}\Delta(\|\omega\|^2) = \|D\omega\|^2 + \langle D\omega, \omega \rangle + \text{Ricci}(\omega, \omega)$$

Ici  $\Delta$  est le laplacien sur les fonctions, mais aussi sur les 1-formes,  $D\omega$  désigne la dérivée covariante et Ricci la courbure de Ricci. Puisque l'intégrale d'une divergence (donc d'un laplacien en particulier) sur une variété compacte (sans bord) est toujours nul, Bochner déduit de son calcul qu'il n'existe aucune forme harmonique non nulle ( $\Delta\omega = 0$ ) sur une variété riemannienne compacte à courbure de Ricci positive. Grâce au théorème de Hodge – de Rham cela entraîne que le premier nombre de Betti de la variété est nul. Les relations entre courbure et topologie forment peut-être le sujet le plus naturel de la géométrie riemannienne. Avant Bochner on n'en connaissait guère que de très faibles, si l'on excepte le cas de la courbure sectionnelle négative. Dans la direction « courbure positive » Bochner ouvrait une brèche, dont Lichnerowicz perçut de suite l'horizon dévoilé. Il s'en servit dans au moins quatre directions, cinq si l'on comprend l'extension pure et apparemment simple au cas des formes de degré supérieur à 1, extension développée outre Lichnerowicz par Bochner et Yano, et terminée, comprise, seulement dans (Meyer, 1971). Ce genre de formule est maintenant appelé « de Weitzenböck ». Effectivement une certaine partie de ces formules généralisées se trouve dans (Weitzenböck, 1923), comme exemples de calcul différentiel « absolu ». Mais l'auteur n'en fait strictement rien, ce pourquoi d'ailleurs il aurait été bien en peine puisque l'on ne disposait pas à l'époque du théorème du type Hodge-de Rham.

Dans (Lichnerowicz, 1950) on trouve le calcul qui fournit le laplacien de la norme carrée du tenseur de courbure complet  $R$  :

$$-\frac{1}{2}\Delta(\|R\|^2) = \|DR\|^2 + \text{Univ}(R, R, R) + Q(D(\text{Ricci}))$$

où  $\text{Univ}(R, R, R)$  est une forme cubique universelle en  $R$  et  $Q$  une forme quadratique universelle en la courbure de Ricci. Je suis encore surpris aujourd'hui du peu de choses que l'on a fait avec cette formule extraordinaire. Dans (Tricerri & Vanhecke, 1986) on voit en quelques lignes qu'elle entraîne que les espaces localement symétriques sont caractérisés par la forme algébrique ponctuelle de leur tenseur de courbure  $R$ , un résultat qui généralise des résultats très partiels obtenus auparavant de façon très pénible.

Dans (Lichnerowicz, 1958) il y a l'idée d'appliquer la formule de Bochner, non plus à une 1-forme harmonique, mais à la 1-forme qui est la dérivée  $df$  d'une fonction propre du laplacien :  $\Delta f = \lambda f$ . On trouve, en intégrant :  $0 =$

$$\int_M \|\text{Hess}f - \lambda \int_M \|df\|^2 + \int_M \text{Ricci}(df, df).$$

la première valeur propre  $\lambda_1$  du laplacien d'une variété riemannienne compacte  $M^d$  à courbure de Ricci vérifiant  $\text{Ricci} \geq d - 1$  vérifie  $\lambda_1 \geq d$ . Il me semble que c'est la première relation historique entre spectre et courbure. Sous la même hypothèse, il montre en outre dans le cas kählérien que l'on a mieux :  $\lambda_1 \geq 2d$ . Ceci parce qu'il s'intéresse en fait aux champs de vecteurs holomorphes  $\xi$  : ceux-ci vérifient  $\Delta x = 2 \cdot \text{Ricci}(\xi)$ , et on l'applique à la fonction propre qui est la divergence de  $\xi$ .

C'est dans (Lichnérowicz, 1961), mû par la physique mathématique, qu'il découvre qu'il existe des laplaciens naturels pour d'autres objets que seulement les formes différentielles extérieures. On n'a pas fini d'épuiser cela, par exemple on l'applique avec fruit au cas des formes différentielles symétriques d'ordre 2 pour prouver que l'ensemble des structures d'Einstein sur une variété compacte est de dimension finie, voir (Besse, 1987). Le texte (Lichnérowicz, 1961) est aussi important par d'autres aspects, on y trouve une formule complète pour les variations à un paramètre des structures riemanniennes ou lorentziennes et comme application des résultats sur les variations des équations de la relativité générale.

Last not least, mû toujours par la physique c'est dans (Lichnérowicz, 1963) qu'il applique la technique de Bochner aux spineurs d'une variété spinorielle et trouve la formule, ahurissante de simplicité (si l'on se rappelle que, pour les formes différentielles extérieures de degré autre que 1, le terme résiduel était très complexe à déchiffrer) :  $\delta^2 = D * D + \frac{\text{scal}}{4}$ , où  $\delta$  est l'opérateur de Dirac,  $D$  la dérivée covariante et  $\text{scal}$  la courbure scalaire. Il identifie ensuite l'index de l'opérateur de Dirac avec le  $\hat{\alpha}$ -genre de Borel-Hirzebruch. D'où, grâce au théorème de l'index qui venait tout juste d'être démontré, une restriction topologique pour la condition ultra-faible « la courbure scalaire est positive » (ce fut même la seule restriction connue a fortiori pour l'hypothèse de la courbure sectionnelle positive, ce avant Gromov en 1981). Les avatars de cette formule sont loin d'être terminés, elle a diffusé dans une bonne partie de la littérature actuelle ; sous forme de livres on pourra l'apprécier par exemple dans (Berlin, Getzler, & Vergne, 1992) et (Lawson & Michelsohn, 1989). Lichnérowicz continua à travailler sur les spineurs jusqu'à la dernière minute.

## 2. Le royaume de Kähler

Ce royaume, découvert dans (Kähler, 1933), resta très longtemps pratiquement ignoré, voir une de ses rares analyses historiques en (Bourguignon, 1993). Mais il nous semble que le déclenchement fut le livre (Hodge, 1941). Car il dissocia « à la Riemann » la structure de variété algébrique de celle de variété seulement kählérienne. Dans cette brèche l'après-guerre vit s'engouffrer, Chern en 46, Weil en 49 et bien d'autres. Lichnérowicz fut l'un de ceux-là. Une de ses motivations était la question d'Elie Cartan : les domaines bornés homogènes de  $\mathbf{C}^n$  sont-ils tous symétriques ? question à laquelle il travailla d'arrache-pied (on sait aujourd'hui qu'il y a des contre-exemples). Une question essentielle était de savoir ce qui restait, en kählérien seulement, des résultats de Lefschetz sur les variétés algébriques. Mais aussi ce qui restait dans le cas seulement symplectique (disons ici presque-kählérien). Bien que cela apparaisse aujourd'hui

« élémentaire », mais ce ne l'était pas à l'époque, ce fut lui qui établit l'équivalence entre variété kählérienne, variété à groupe d'holonomie compris dans le groupe unitaire complexe  $U(n)$ , et variété admettant une 2-forme extérieure de rang maximum qui est à dérivée covariante nulle. En outre aussi l'équivalence, dans le domaine kählérien, entre courbure de Ricci nulle et groupe d'holonomie contenu dans le groupe spécial unitaire  $SU(n)$ . Tout ceci permettait de commencer à voir plus clairement ce qui subsistait de Lefschetz.

Dans (Lichnérowicz, 1969) on trouve pour la première fois la généralisation aux cas riemannien, de dimension quelconque, de la notion de variété d'Albanese et de l'application de Jacobi sur cette variété, notions considérées auparavant seulement dans le cas des algébriques et celui des surfaces. Un résultat important est dans (Lichnérowicz, 1971) : si la courbure de Ricci (alias la première classe de Chern) d'une variété kählérienne compacte est non négative alors cette application de Jacobi est une fibration holomorphe.

### 3. Groupes d'holonomie

Cette notion, essentielle aujourd'hui (cordes, variétés miroirs en physique mathématique, mais aussi en mathématiques « pures » : conjecture de Calabi, variétés hyperkähleriennes, Kähler-quaternioniennes), créée par Elie Cartan dans (Cartan, 1925), resta très longtemps au purgatoire avant d'en être violemment sortie par (Borel & Lichnérowicz, 1952) : il y est montré le résultat ahurissant que le groupe d'holonomie d'une variété riemannienne, même locale (ouverte), est toujours un groupe de Lie compact. Rappelons que ce groupe est celui formé par le transport parallèle le long de tous les lacets issus d'un point. Il est surprenant qu'il soit compact pour des variétés qui sont des ouverts « si petits soient-ils ». L'espoir d'Elie Cartan était d'obtenir à l'aide de ce groupe une classification des variétés riemanniennes. On sait aujourd'hui que ce n'est pas le cas, hormis celui très spécial des espaces symétriques, sinon il ne reste que (hormis le groupe orthogonal total ou spécial et les dimensions exceptionnelles 7 et 8) : le cas kählérien, le cas kählérien à courbure de Ricci nulle, le cas kähler-quaternionien et le cas hyperkählierien. Ceci explique, joint à la conjecture de Calabi (prouvée par Thierry Aubin dans le cas négatif et Yau dans le cas général) l'importance des variétés spéciales citées juste ci-dessus. Nous avons mentionné plus haut comment Lichnérowicz réalisa le lien direct entre holonomie dans  $U(n)$  et être kählérienne, plus le cas à courbure de Ricci nulle. Il ne manqua pas d'utiliser aussi les groupes d'holonomie de façon essentielle pour les résultats de la section suivante.

### 4. Le royaume des homogènes

Toujours mû par la question d'Elie Cartan sur les domaines bornés homogènes, les espaces homogènes ne cessèrent de le hanter. De toute façon, vus à la Klein, les géométries sont toutes homogènes. Le livre entier (Lichnérowicz, 1958) leur est consacré. Mais dès (Lichnérowicz, 1953) il classait presque complètement (dans le cas semi-simple) les espaces homogènes kählériens compacts, classification terminée dans (Borel, 1954) pour le cas semi-simple, voir

le livre (Besse, 1987). Mais il ne s'arrêta pas là, (Lichnérowicz, 1990) termine complètement la question pour le cas des groupes kählériens.

On sait que les opérateurs différentiels invariants sont importants, dès (Lichnérowicz, 1965) il démontre qu'ils commutent sous la seule condition qu'il y ait un élément de volume invariant. Ces opérateurs ont été très étudiés plus tard, voir le livre (Helgason, 1984).

## 5. Eclairs

### A. *L'harmonie des sphères*

(Lichnérowicz, 1943) démontre que les espaces harmoniques de dimension 4 sont symétriques. Les espaces harmoniques sont les variétés riemanniennes pour lesquelles le laplacien admet une solution élémentaire ne dépendant que de la distance (ou plein d'autres conditions équivalentes, par exemple la valeur d'une fonction harmonique est égal à sa moyenne sur les boules, etc.) Sont connus pour être harmoniques tous les espaces symétriques de rang 1, c'est-à-dire ceux où le groupe d'isotropie est symétrique. On sait maintenant que l'harmonicité, jointe à la compacité, entraîne la symétrie. En revanche il y a des contre-exemples dans le cas non compact.

### B. *Bien avant les submersions riemanniennes*

(Lichnérowicz, 1949) considère les fibrations d'un point de vue riemannien, bien avant leur mise en forme dans (O'Neill, 1966b), avec l'idée de voir ce que l'on peut faire avec des conditions sur les fibres via Hodge-de Rham. Il obtient ainsi des résultats topologiques lorsque les fibres sont des sous-variétés minima.

### C. *Harmoniques versus holomorphe*

A plusieurs reprises Lichnérowicz, typiquement pour la « fibration » de Jacobi ci-dessus où il s'en servit de façon capitale, s'est intéressé aux relations entre applications holomorphes et applications harmoniques. En fait il fut l'un des premiers à réaliser l'importance des applications harmoniques, créées par Eells et Sampson en 1964. Par exemple (Lichnérowicz, 1970) est une étude fine de cette liaison et en particulier étend des résultats connus au cas presque-kählérien. On retrouve encore là son souci d'étendre le plus de choses possibles au cas symplectique.

## Bibliographie

- BERLINE, N., GETZLER, E., & VERGNE, M. (1992). *Heat kernels and Dirac operators*. Springer.
- BESSE, A. (1987). *Einstein manifolds*. Springer.
- BOCHNER, S. (1946). Vector fields and Ricci curvature. *Bulletin of Amer. math. Soc.*, 52, 776-797.
- BOREL, A. (1954). Kählerian coset spaces of semi-simple Lie groups. *Proc. national Acad. Sc.*, 40, 1147-1151.
- BOREL, A., & LICHNÉROWICZ, A. (1952). Groupes d'holonomie des variétés riemanniennes. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 234, 1835-1837.
- BOURGUIGNON, J.-P. (1993). Eugenio Calabi and Kähler metrics. In P. de Bartolomeis, F. Tricerri, & E. Vesentini (Ed.), *Manifolds and geometry*, (pp. 61-85). Pisa : Cambridge University Press.

- CARTAN, E. (1925). Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. Ann. sc. Ecole norm. sup., 42, 17-88.
- HELGASON, S. (1984). *Groups and geometric analysis*. Academic press.
- HODGE, W. (1941). *The theory and applications of harmonic integrals* (second edition 1952). Cambridge University Press.
- KÄHLER, E. (1933). Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik. Abh. Math. Sem. Hamburg Univ., 9, 173-186.
- LAWSON, B., & MICHELSON, L. (1989). *Spin geometry*. Princeton University Press.
- LICHNÉROWICZ, A. (1943). Sur les espaces riemanniens complètement harmoniques. Bull. soc. math. France, 72, 146-168.
- LICHNÉROWICZ, A. (1947). *Algèbre et analyse linéaires*. Masson.
- LICHNÉROWICZ, A. (1949). Quelques théorèmes de géométrie différentielle globale. Commentarii math. helvetici.
- LICHNÉROWICZ, A. (1950). Courbure, nombres de Betti, et espaces symétriques. In International congress of math., (pp. 216-223). Harvard.
- LICHNÉROWICZ, A. (1953). Espaces homogènes kählériens. In C. R. Acad. Sc. Paris 237, 695-697
- LICHNÉROWICZ, A. (1958). *Géométrie des groupes de transformations*. Dunod.
- LICHNÉROWICZ, A. (1961). Propagateurs et commutateurs en relativité générale. Publications math. IHES, 10, 293-344.
- LICHNÉROWICZ, A. (1963). Spineurs harmoniques. C. R. Acad. Sc. Paris, 257, 7-9.
- LICHNÉROWICZ, A. (1965). Opérateurs différentiels invariants sur les espaces homogènes. Annales scientifiques E. N. S., 81, 341-385.
- LICHNÉROWICZ, A. (1969). Applications harmoniques à valeur dans un tore. C. R. Acad. Sc. Paris, 269, 912-916.
- LICHNÉROWICZ, A. (1970). Application harmoniques et variétés kählériennes. Symposia mathematica, 3, 341-402.
- LICHNÉROWICZ, A. (1971). Variétés kählériennes à première classe de Chern non négative et variétés riemanniennes à courbure de Ricci généralisée non négative. J. of differential geometry, 6, 47-94.
- LICHNÉROWICZ, A. (1990). Groupes kählériens. C. R. Acad. Sc. Paris, 310, 671-676.
- MEYER, D. (1971). Sur les variétés riemanniennes à opérateur de courbure positif. C. R. Acad. Sc. Paris, 272, 482-485.
- O'NEILL, B. (1966b). The fundamental equations of a submersion. Michigan math. journal, 13, 459-469.
- TRICERRI, F., & VANHECKE, L. (1986). Variétés riemanniennes dont le tenseur de courbure est celui d'un espace symétrique riemannien irréductible. C. R. Acad. Sc. Paris, 302, 233-235.
- WEITZENBÖCK, R. (1923). *Invariantentheorie*. Groningen : Noordhoff.

## Lichnérowicz et la relativité générale

Yvonne CHOQUET-BRUHAT

---

**J**e n'étais encore qu'une lycéenne quand j'entendais mon père faire l'éloge d'un jeune mathématicien, André Lichnérowicz, qui alliait à ses dons mathématiques un sens profond de la physique et de remarquables qualités pédagogiques. Fils unique de brillants parents, un père littéraire secrétaire général de l'alliance française et une mère sévrienne mathématicienne, André Lichnérowicz était un homme d'une vaste culture, intéressé tout au long de sa vie par les problèmes les plus variés, scientifiques ou philosophiques et par leur impact sur le monde où nous vivons. Son esprit était brillant, clair, rapide et d'une activité inlassable. Grand intellectuel, Lichnérowicz était aussi très humain. Il avait un vif désir de communiquer ses idées et une sûre fidélité à ses amis. Lichnérowicz se considérait comme responsable de tous ceux qui avaient été ses élèves — et il en a eu beaucoup. Il leur portait un soutien indéfectible, particulièrement quand ils avaient des difficultés professionnelles ou privées. Lichnérowicz savait choisir pour chacun un sujet de thèse approprié à ses goûts et ses capacités, sujet qui lui permettrait de façon presque certaine, encouragé et aidé autant que nécessaire, d'obtenir le diplôme recherché. Cette diversité de choix offerte par Lichnérowicz à ses élèves venait de la variété de ses propres intérêts. Je ne parlerai que des travaux de Lichnérowicz en relativité générale, d'autres plus compétents rapportent sur d'autres domaines.

La première et fondamentale, contribution de Lichnérowicz à la relativité générale a été d'y apporter dès 1939, dans sa thèse soutenue sous la direction de Georges Darmois, le point de vue de la géométrie différentielle globale : tout modèle relativiste est une variété différentiable munie d'une métrique de signature hyperbolique vérifiant sur cette variété les équations d'Einstein, avec ou sans sources. Il a explicité dans le cadre général approprié les conditions de raccordement données par G. Darmois dans des coordonnées particulières : ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une métrique soit une solution classique globale des équations d'Einstein avec second membre éventuellement discontinu. La méthodologie de Lichnérowicz a été utilisée dans la construction de nombreux modèles et a pu être étendue sans réelle difficulté aux solutions faibles dont la conception s'est développée plus tard.

Le point de vue global adopté par Lichnérowicz lui a permis dès 1939 de démontrer dans toute sa généralité un résultat fondamental obtenu dans des cas particuliers par Einstein et Pauli et lui a valu l'admiration de ceux-ci : Lichnérowicz a établi, grâce à sa maîtrise du calcul tensoriel deux identités fondamentales qui lui ont permis de montrer qu'il n'existe pas de soliton gravitationnel, c'est-à-dire de solution stationnaire non triviale (i.e, à courbure non nulle) des équations d'Einstein du vide sur une variété du type  $S \times R$  où  $S$  est spatiale et soit asymptotiquement euclidienne soit compacte. Lichnérowicz a étendu ce résultat, avec son élève Y. Thiry, à la théorie unitaire pentadimensionnelle (groupe de jauge  $U(1)$ ) dans le cas — comme il l'a souligné lui-même où le fibré en cercles est trivial. Quelques trente ans plus tard E. Witten a

construit un contre-exemple dans le cas où ce fibré n'est pas trivial. Il a fallu attendre cette dernière décade pour montrer qu'il existe des solitons quand le groupe de jauge n'est pas abélien.

Les équations d'Einstein sont invariantes par difféomorphismes, comme pour les théories de jauge leur intégration se décompose en un problème d'évolution et un problème des contraintes, contrainte dite hamiltonienne et contrainte de moment, équations qui doivent être satisfaites par les données initiales. En 1944 Lichnérowicz a utilisé la relation entre les courbures scalaires de deux métriques conformes pour transformer la contrainte de moment en un système linéaire indépendant du facteur de conformité quand la variété initiale est une sous variété maximale de l'espace-temps et la contrainte hamiltonienne en une équation elliptique semi-linéaire pour le facteur de conformité : cette équation, appelée depuis équation de Lichnérowicz, joue toujours un rôle essentiel dans la résolution du problème des contraintes.

Par la suite jusque vers les années 70 et plus épisodiquement plus tard, Lichnérowicz s'est attaqué à la plupart des problèmes fondamentaux liés à la relativité générale. Il en a donné un traitement systématique, sans être rebuté par des calculs parfois très lourds. Il a publié des rédactions lucides et détaillées, incluant des contributions de ses élèves, qui ont souvent servi de base aux travaux ultérieurs. Lichnérowicz s'est intéressé tout au long de sa carrière à la représentation des sources matérielles en relativité. Il a été le premier à obtenir en 1940, en collaboration avec R. Marrot, une formulation mathématique cohérente de la théorie cinétique relativiste. Il a dès les années 50 trouvé les bonnes extensions de divers théorèmes généraux de la mécanique des fluides classique. Dans les années 70, à l'occasion de cours au Collège de France et aux États Unis, il a repris des travaux sur l'hydrodynamique et la magnétohydrodynamique relativiste, y incluant des considérations thermodynamiques dues à Taub et Pichon. Son étude originale des ondes de choc en magnétohydrodynamique représente un travail considérable. Comme beaucoup d'autres travaux de Lichnérowicz il aboutit après des calculs très complexes où d'autres se seraient perdus, à des conclusions claires, physiquement significatives.

Je citerai maintenant les travaux de Lichnérowicz sur la radiation gravitationnelle, les champs spinoriels, la quantification des champs sur un espace temps courbe, prélude à ses travaux ultérieurs sur la quantification liée à la théorie des déformations.

Dans un mémoire de plus de cent pages paru en 1960 Lichnérowicz donne une étude théorique complète d'abord de la radiation électromagnétique sur un espace temps courbe, puis de ce qu'il convient d'appeler radiation gravitationnelle, liée au tenseur de courbure, enfin du couplage de ces deux quantités. Cet article comme beaucoup d'autres du même auteur est resté une référence de base utilisée dans les développements ultérieurs sur le sujet.

Dans son article sur la radiation gravitationnelle Lichnérowicz se préoccupait déjà de quantification. Dans un autre important article publié en 1964 dans les annales de l'I.H.E.S. il introduit des propagateurs tensoriels qui généralisent à un espace temps courbe le propagateur de Jordan Pauli. Il les utilise à la construction du commutateur quantique sur un espace temps courbe d'abord du champ électromagnétique puis de la variation du champ gravitationnel. Ce travail est un grand classique et contient de nombreux résultats intermédiaires

qui ont été utilisés à maintes reprises. Il introduit en particulier les équations dites d'ordre supérieur. Ces équations et le tenseur de Bel, étudié par Luis Bel dans sa thèse, sont fondamentaux pour les estimations a priori utilisées ces dernières années dans la recherche de solutions globales dans le temps. Les beaux travaux de Lichnérowicz sur la quantification des champs bosoniques sur un espace temps courbe l'ont naturellement conduit au problème de la quantification des champs spinoriels sur de tels espaces temps. Dans deux longs articles parus en 1964 et 1965 Lichnérowicz met sur pied de façon complète la théorie des spineurs sur une variété pseudo riemannienne. Il donne la définition intrinsèque des opérateurs d'usage courant en physique, conjugaison de charge et adjonction de Dirac. Les formules qu'il a établies ont été essentielles pour l'aboutissement des théories de supergravité. Les importantes contributions de Lichnérowicz à la géométrie riemannienne liées à la théorie des spineurs ont été signalées dans l'article de M. Berger. Le dernier article de Lichnérowicz, paru quelques semaines avant sa mort traitait de l'opérateur de Dirac sur une variété Kählerienne.

Lichnérowicz a fondé en 1957, avec l'américain J. A. Wheeler et le russe V. Fock, la société *Relativité générale et gravitation*. C'était à l'origine une sorte de club comportant un relativement petit nombre de membres qui se réunissait en un congrès tous les deux, puis tous les trois ans. Il régnait entre les relativistes une atmosphère conviviale et chaleureuse, comme toujours dans l'entourage de Lichnérowicz. Depuis ces lointains débuts les domaines physiques et mathématiques en interaction avec la relativité générale se sont multipliés et le nombre des relativistes a considérablement augmenté. Cependant les points de vue de géométrie différentielle globale introduits par Lichnérowicz sont adoptés par tous et son nom toujours cité avec admiration.

## L'œuvre d'André Lichnérowicz en géométrie symplectique

Charles-Michel MARLE

---

**E**n raison de ses liens étroits avec la mécanique et, plus généralement, la représentation mathématique de l'univers physique, la géométrie symplectique ne pouvait que susciter l'intérêt d'André Lichnérowicz, qui fut à la fois géomètre, mécanicien et physicien. Son œuvre dans ce domaine est vaste et importante; je vais m'efforcer d'en présenter quelques aspects (ceux que je connais le mieux), sans prétendre à l'exhaustivité.

### Les variétés de Poisson

Rappelons qu'une variété symplectique  $(W, F)$  est une variété différentiable  $W$ , de dimension paire  $2n$ , munie d'une 2-forme différentielle  $F$  fermée ( $dF = 0$ ), partout de rang maximum, c'est-à-dire  $2n$ . L'application  $\mu : TW \rightarrow T^*W$ ,  $\mu(X) = -i(X)F$ , est un isomorphisme de fibrés vectoriels qui se prolonge aux puissances extérieures, ce qui permet de considérer le champ de 2-tenseurs contravariants antisymétriques  $\Lambda = \mu^{-1}(F)$ . Pour alléger, nous dirons dans la suite simplement *tenseur pour champ de tenseurs contravariants antisymétriques*.

La condition de maximalité imposée au rang de  $F$  s'est très vite révélée trop contraignante pour nombre d'applications, notamment à la mécanique. Aussi de nombreux auteurs ont-ils considéré la notion de *variété présymplectique* (variété différentiable  $W$  munie d'une 2-forme différentielle  $F$  fermée, mais pas nécessairement de rang maximum). Malgré l'ingéniosité des chercheurs qui se sont intéressés à ces objets, les résultats ont été décevants et mal adaptés aux applications envisagées, sauf peut-être dans le cas très particulier où le rang de  $F$  est constant. André Lichnérowicz a été, à ma connaissance, le premier à voir clairement qu'une généralisation fructueuse des variétés symplectiques devait utiliser le tenseur contravariant  $\Lambda$  plutôt que la 2-forme  $F$  [15]. Il considère un couple  $(W, \Lambda)$ , où  $W$  est une variété différentiable et  $\Lambda$  un 2-tenseur sur  $W$ . Le *crochet de Poisson* de deux fonctions  $u$  et  $v \in N = C^\infty(W, \mathbf{R})$  est alors défini par  $\{u, v\} = i(\Lambda)(du \wedge dv)$ , et le *champ de vecteurs hamiltonien*  $X_u$  associé à une fonction  $u \in N$  est le champ tel que, pour tout  $v \in N$ ,  $i(X_u)dv = \{u, v\}$ . A. Lichnérowicz montre alors que le crochet de Poisson des fonctions vérifie l'identité de Jacobi si et seulement si le tenseur  $\Lambda$  vérifie la condition  $[\Lambda, \Lambda] = 0$  (le crochet figurant dans cette expression étant le crochet de Schouten-Nijenhuis). Lorsque cette condition est vérifiée, l'espace  $N$  des fonctions différentiables sur  $W$ , avec le crochet de Poisson pour loi de composition, est une algèbre de Lie et l'application  $u \mapsto X_u$  un homomorphisme d'algèbres de Lie. On dit alors que  $(W, \Lambda)$  est une *variété de Poisson*, dont  $\Lambda$  est le *tenseur de Poisson*. Ce dernier permet de définir un morphisme de fibrés vectoriels  $\Lambda^\sharp : T^*M \rightarrow TM$  en posant  $\langle \Lambda^\sharp \alpha, \beta \rangle = i(\Lambda)(\alpha \wedge \beta)$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux éléments de la même fibre de  $T^*W$ . Ce morphisme se prolonge aux puissances

extérieures. Bien entendu, une variété de Poisson  $(W, \Lambda)$  de dimension paire  $2n$  dont le tenseur de Poisson est partout de rang  $2n$  est une variété symplectique : le morphisme  $\Lambda^\sharp$  est alors un isomorphisme et la 2-forme symplectique est  $F = (\Lambda^\sharp)^{-1}(\Lambda)$ .

### Les variétés de Jacobi

Rappelons qu'une *forme de contact* sur une variété différentiable  $W$  de dimension impaire  $2n + 1$  est une 1-forme différentielle  $\omega$  telle que  $\omega \wedge (d\omega)^n$  soit une forme élément de volume. Avec A. Lichnérowicz, nous dirons alors que  $(W, \omega)$  est une *variété pfaffienne*. Comme celle d'une variété symplectique, la structure d'une variété pfaffienne peut être définie au moyen d'objets contravariants, au lieu de l'être par un objet covariant (la 1-forme de contact  $\omega$ ); mais alors que, pour une variété symplectique, un seul objet contravariant (le tenseur  $\Lambda$ ) suffisait, deux objets contravariants sont maintenant nécessaires (correspondant, *grosso modo*, à la 1-forme  $\omega$  et à sa différentielle extérieure  $d\omega$ ) : un champ de vecteurs  $E$  appelé *champ de Reeb* (car il a été considéré pour la première fois par G. Reeb [20]) et un 2-tenseur  $\Lambda$ . A. Lichnérowicz a prouvé que ces deux objets vérifiaient les identités

$$[E, \Lambda] = 0, \quad [\Lambda, \Lambda] = 2E \wedge \Lambda, \quad (*)$$

le crochet figurant dans ces expressions étant le crochet de Schouten-Nijenhuis. Plus généralement, il considère une variété différentiable  $W$  munie d'un champ de vecteurs  $E$  et d'un 2-tenseur  $\Lambda$ . Il définit le *crochet de Jacobi*  $\{u, v\}$  de deux fonctions différentiables  $u$  et  $v \in N = C^\infty(W, \mathbf{R})$ , et associe, à toute fonction différentiable  $u \in N$ , un champ de vecteurs  $X_u$ , dit *champ hamiltonien* associé à  $u$ , en posant

$$\{u, v\} = i(\Lambda)(du \wedge dv) + \langle u dv - v du, E \rangle, \quad X_u = \Lambda^\sharp(du) + uE. \quad (**)$$

A. Lichnérowicz montre que le crochet de Jacobi vérifie l'identité de Jacobi si et seulement si  $E$  et  $\Lambda$  vérifient les identités (\*). Lorsque c'est le cas,  $(W, \Lambda, E)$  est une *variété de Jacobi* [16]; l'espace  $N$  des fonctions différentiables sur  $W$ , muni du crochet de Jacobi, est une algèbre de Lie et l'application  $u \mapsto X_u$  un homomorphisme d'algèbres de Lie. Lorsque  $W$  est de dimension impaire  $2n + 1$  et que le tenseur  $E \wedge \Lambda^n$  ne s'annule en aucun point, la variété  $W$  est en fait une variété pfaffienne, dont la 1-forme de contact  $\omega$  peut être exprimée au moyen de  $E$  et de  $\Lambda$ . Par ailleurs, une variété de Jacobi dont le champ de Reeb est identiquement nul est une variété de Poisson. Les variétés de Jacobi généralisent donc à la fois les variétés symplectiques, les variétés pfaffiennes et les variétés de Poisson. L'introduction des *variétés conformes de Jacobi* permet à A. Lichnérowicz d'inclure également les variétés de contact (dont la structure est définie par la donnée d'un sous-fibré de rang 1 du fibré cotangent localement engendré, au voisinage de chaque point, par une 1-forme de contact) et les variétés localement conformément symplectiques.

## Géométries de Poisson et de Jacobi

L'importance des variétés de Poisson a été rapidement reconnue, notamment par A. Weinstein qui en a étudié les propriétés locales [23]. Signalons aussi d'autres travaux qui ont permis une vision nouvelle des variétés de Jacobi. Une *algèbre de Lie locale* sur une variété différentiable  $W$  est un fibré vectoriel  $(V, \pi, W)$  de base  $W$ , dont l'espace des sections différentiables est muni d'une loi de composition  $(s_1, s_2) \mapsto \{s_1, s_2\}$  qui en fait une algèbre de Lie, cette loi de composition étant locale (le support de  $\{s_1, s_2\}$  est contenu dans l'intersection des supports de  $s_1$  et de  $s_2$ ). Cette notion, introduite par Shiga, a été étudiée par A. Kirillov dans le cas où la dimension des fibres de  $V$  est 1 [12]. Elle s'est révélée équivalente à celle de variété conforme de Jacobi. Lorsque  $R = W \times \mathbf{R}$  et que  $\pi : V \rightarrow W$  est la première projection, l'espace des sections différentiables du fibré  $(W \times \mathbf{R}, \pi, W)$  s'identifie à l'espace  $N = C^\infty(W, \mathbf{R})$  des fonctions différentiables sur  $W$ . La donnée d'une loi de composition sur cet espace équivaut à celle d'une loi de composition sur  $N$ . Lorsque cette loi est locale et satisfait l'identité de Jacobi, A. Kirillov a montré qu'il existe sur  $W$  un tenseur  $\Lambda$  et un champ de vecteurs  $E$  tels que, pour tout couple  $(u, v)$  de fonctions différentiables sur  $W$ , le crochet  $\{u, v\}$  soit donné par la première formule (\*\*) ci-dessus. Bien entendu, puisque ce crochet vérifie l'identité de Jacobi,  $\Lambda$  et  $E$  vérifient les identités (\*). En d'autres termes,  $(W, \Lambda, E)$  est une variété de Jacobi.

Avec F. Guédira, A. Lichnérowicz a effectué une étude approfondie des algèbres de Lie locales et de leurs relations avec les variétés de Poisson [10]; ils ont notamment montré que l'espace total  $V$  d'un fibré de Jacobi  $(V, \pi, W)$  dont les fibres sont de dimension 1 est canoniquement muni d'une structure de Poisson homogène, le crochet de Poisson de deux fonctions homogènes sur  $V$  correspondant au crochet des deux sections qui leur sont canoniquement associées.

Soit  $(W, \Lambda, E)$  une variété de Jacobi. Le champ de directions engendré par le champ de vecteurs  $E$  et par l'image du morphisme  $\Lambda^\sharp$  est appelé *champ caractéristique*. Ce n'est en général pas un sous-fibré vectoriel de  $TW$  (son rang n'est pas nécessairement constant). Cependant, A. Kirillov a prouvé que ce champ de directions est, en un sens généralisé, complètement intégrable et définit un *feuilletage de Stefan* de  $W$ , c'est-à-dire une partition de  $W$  en sous-variétés immergées connexes maximales, appelées *feuilles*, dont l'espace tangent, en chaque point, est la valeur en ce point du champ caractéristique. Les feuilles ne sont pas nécessairement toutes de même dimension; celles de dimension paire sont des variétés symplectiques et celles de dimension impaire des variétés pfaffiennes. Lorsque la variété de Jacobi considérée est en fait une variété de Poisson  $(W, \Lambda)$ , les feuilles, toutes de dimension paire, sont appelées *feuilles symplectiques*. Ce résultat met en évidence le fait que les singularités du couple  $(\Lambda, E)$ , c'est-à-dire les points au voisinage desquels le rang du champ caractéristique n'est pas constant, s'organisent en sous-variétés immergées et sont donc beaucoup plus simples que les singularités du rang et de la classe d'une forme de Pfaff; de même, pour une variété de Poisson  $(W, \Lambda)$ , les singularités du tenseur de Poisson  $\Lambda$  (c'est-à-dire les points au voisinage desquels le rang du morphisme  $\Lambda^\sharp$  n'est pas constant) sont beaucoup plus sympathiques que les singularités des

formes présymplectiques. C'est peut-être pour cette raison que les variétés de Poisson sont beaucoup mieux adaptées aux applications à la mécanique et à la physique que les variétés présymplectiques.

### La cohomologie de Poisson-Lichnérowicz

Soit  $(W, \Lambda)$  une variété de Poisson. Dès sa première publication sur les variétés de Poisson [15], A. Lichnérowicz a remarqué que l'opérateur  $\partial_\Lambda$ , qui associe à tout  $p$ -tenseur  $P$  le  $(p+1)$ -tenseur  $\partial_\Lambda P = [\Lambda, P]$  (ce crochet étant le crochet de Schouten-Nijenhuis) est de carré nul, donc permet de définir une cohomologie sur  $W$  (en utilisant comme  $p$ -cochaînes les  $p$ -tenseurs contravariants antisymétriques). Cette cohomologie, communément appelée *cohomologie de Poisson*, mais qu'il serait plus judicieux d'appeler *cohomologie de Poisson-Lichnérowicz*, est en général compliquée, car elle reflète certaines propriétés topologiques de la variété  $W$  et du feuilletage de Stefan formé par ses feuilles symplectiques. A. Lichnérowicz en a commencé l'étude, actuellement très activement poursuivie par de nombreux chercheurs (voir par exemple les ouvrages récents [4] et [21]). Il a notamment montré que le morphisme de fibrés vectoriels  $\Lambda^\sharp : T^*W \rightarrow TW$ , prolongé aux puissances extérieures, est tel que, pour toute  $p$ -forme différentielle  $\eta$  sur  $W$ ,  $\Lambda^\sharp(d\eta) = \partial_\Lambda(\Lambda^\sharp\eta)$ . Par suite,  $\Lambda^\sharp$  détermine un homomorphisme de la cohomologie de De Rham dans la cohomologie de Poisson-Lichnérowicz. Lorsque la variété de Poisson considérée est en fait une variété symplectique, cet homomorphisme est un isomorphisme.

Signalons encore une importante propriété des variétés de Poisson, bien que sa découverte (faite indépendamment par plusieurs auteurs, dont B. Fuchssteiner, F. Magri et C. Morosi, A. Weinstein, P. Dazord) ne soit pas attribuable à André Lichnérowicz : le fibré cotangent  $T^*W$  à une variété de Poisson  $(W, \Lambda)$  possède une structure d'algèbre de Lie ayant pour ancre le morphisme de fibrés vectoriels  $\Lambda^\sharp : T^*W \rightarrow TW$ . Cela signifie qu'il existe, sur l'espace des sections différentiables de ce fibré (c'est-à-dire sur l'espace des 1-formes différentielles sur  $W$ ), une loi de composition (notée  $(\zeta, \eta) \mapsto [\zeta, \eta]$ ), qui en fait une algèbre de Lie, vérifiant, pour tout couple  $(\zeta, \eta)$  de 1-formes différentielles et toute fonction différentiable  $f$  sur  $W$ ,

$$\Lambda^\sharp[\zeta, \eta] = [\Lambda^\sharp\zeta, \Lambda^\sharp\eta], \quad [\zeta, f\eta] = (\mathcal{L}(\Lambda^\sharp\zeta)f)\eta + f[\zeta, \eta].$$

Le crochet de deux 1-formes exactes  $du$  et  $dv$  est lié au crochet de Poisson  $\{u, v\}$  par la relation  $[du, dv] = d\{u, v\}$ .

J.-L. Koszul a prouvé que le crochet des 1-formes différentielles sur une variété de Poisson  $(W, \Lambda)$  se prolonge en une loi de composition sur l'espace vectoriel gradué des formes différentielles de tous degrés, faisant de cet espace une algèbre de Lie graduée [13]. Le morphisme  $\Lambda^\sharp$ , prolongé aux puissances extérieures, est un homomorphisme d'algèbres de Lie graduées (l'espace vectoriel gradué des tenseurs contravariants antisymétriques étant muni du crochet de Schouten-Nijenhuis pour loi de composition).

Certaines de ces propriétés ont depuis été étendues aux algèbres de Lie généraux, qui apparaissent étroitement liés aux variétés de Poisson. Ainsi par

exemple, l'espace total du fibré dual d'un algébroïde de Lie possède une structure de Poisson homogène canonique. Ainsi, l'importance des variétés de Poisson se confirme !

### Déformations de l'algèbre des fonctions sur une variété

Avec M. Flato (malheureusement décédé quelques semaines avant lui), D. Sternheimer, F. Bayen et C. Fronsdal, A. Lichnérowicz a appliqué la théorie des déformations de structures algébriques (initiée par M. Gerstenhaber [9]) aux structures d'algèbre associative et d'algèbre de Lie de l'espace des fonctions sur une variété symplectique (ou de contact) [1,2,7,8,17]. Indiquons brièvement le point de départ de ces travaux, en considérant, par exemple, l'espace  $N = C^\infty(W, \mathbf{R})$  des fonctions sur une variété de Poisson  $(W, \Lambda)$ . Soit  $(u, v) \mapsto u *_\nu v$  une application bilinéaire de  $N \times N$  dans l'espace  $E(N, \nu)$  des séries formelles en un paramètre  $\nu$  et à coefficients dans  $N$ , de la forme  $u *_\nu v = uv + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^r C_r(u, v)$ . Les  $C_r : N \times N \rightarrow N$  sont des applications bilinéaires appelées *cochaînes*. On dit que  $(u, v) \mapsto u *_\nu v$  est une *déformation formelle* de la structure d'algèbre associative de  $N$  (en abrégé, un *\* $\nu$ -produit*) si la propriété d'associativité  $(u *_\nu v) *_\nu w = u *_\nu (v *_\nu w)$  est formellement vérifiée. Deux déformations formelles, notées  $(u, v) \mapsto u *_\nu v$  et  $(u, v) \mapsto u *'_\nu v$ , sont dites *équivalentes* s'il existe un endomorphisme formel  $T_\nu = \text{id}_N + \sum_{s=1}^{\infty} \nu^s T_s$ , où les  $T_s$  sont des endomorphismes linéaires de  $N$ , tel que l'on ait formellement  $T_\nu(u *'_\nu v) = (T_\nu u) *_\nu (T_\nu v)$ .

A. Lichnérowicz et ses collaborateurs ont immédiatement vu qu'il convenait de choisir  $C_1(u, v) = \{u, v\}$ , crochet de Poisson. Ils ont montré que lorsqu'on cherche à déterminer successivement les cochaînes  $C_r$  pour  $r = 2, 3, \dots$ , on rencontre, à chaque ordre du développement en série formelle, une obstruction représentée par un élément du troisième espace d'une cohomologie (la *cohomologie de Hochschild*) dont les  $p$ -cochaînes sont les applications  $p$ -multilinéaires de  $N^p$  dans  $N$ . La nullité de cette classe est la condition nécessaire et suffisante pour que le développement en série formelle puisse être poussé à l'ordre immédiatement supérieur. De même, l'étude de l'équivalence de deux déformations de la structure d'algèbre associative de  $N$  fait apparaître, à chaque ordre, une obstruction représentée par un élément du deuxième espace de cohomologie de Hochschild.

De manière analogue, on peut définir et étudier les déformations formelles de la structure d'algèbre de Lie de  $N$ , le rôle précédemment joué par l'identité exprimant l'associativité étant joué par l'identité de Jacobi. Les obstructions sont alors des classes d'une autre cohomologie, la *cohomologie de Chevalley*, dont les  $p$ -cochaînes sont les applications  $p$ -multilinéaires alternées de  $N^p$  dans  $N$ . De toute déformation formelle de la structure d'algèbre associative de  $N$  on peut déduire, par antisymétrisation, une déformation formelle de sa structure d'algèbre de Lie.

A. Lichnérowicz et ses collaborateurs ont montré que les déformations formelles de l'algèbre associative  $N$  des fonctions différentiables sur une variété symplectique (ou de Poisson) offrent une *méthode de quantification* des systèmes hamiltoniens classiques, autre que la méthode basée sur la quantification géométrique de B. Kostant et J.-M. Souriau.

Depuis les travaux d'H. Weyl (1931) et J. Moyal (1949), on connaît un exemple de déformation non triviale de l'algèbre associative des fonctions différentiables sur  $\mathbf{R}^{2n}$  muni de sa structure symplectique canonique, appelé *crochet de Moyal-Weyl*. De nombreux chercheurs ont étudié l'existence de déformations formelles des structures d'algèbre associative ou d'algèbre de Lie de l'espace des fonctions différentiables sur une variété symplectique (ou de Poisson) générale. Les premiers résultats sont dus à J. Vey pour la structure d'algèbre de Lie [22], O. Neroslavsky et A. Vlassov pour la structure associative [18], sous une hypothèse topologique (nullité du troisième nombre de Betti). Cette hypothèse a été levée d'abord par M. Cahen et S. Gutt dans le cas d'un fibré cotangent [3], puis par M. De Wilde et P. Lecomte dans le cas d'une variété symplectique quelconque [5]. Des preuves plus simple de ce théorème d'existence ont été données ensuite par plusieurs auteurs, notamment Karasev et Maslov [11], Omori, Maeda et Yoshioka [19], Fedosov [6]. Récemment, M. Kontsevich a obtenu, comme conséquence d'une conjecture (qu'il avait formulée en 1993 et prouvée en 1997), un résultat très profond : sur toute variété différentiable, il y a équivalence entre les classes de déformations formelles de l'algèbre associative des fonctions différentiables et les classes de déformations formelles de la structure de Poisson nulle [14].

### En guise de conclusion

Faute de place, j'ai dû renoncer à présenter bien d'autres aspects de l'œuvre d'André Lichnérowicz en géométrie symplectique qui mériteraient une description détaillée : étude des algèbres de Lie associées aux variétés symplectiques, de contact, de Poisson, de Jacobi ; géométrie des transformations canoniques ; espaces homogènes de contact ; ...

J'ai eu le privilège d'être élève d'André Lichnérowicz, et j'ai la plus grande admiration tant pour ses qualités humaines que pour son œuvre scientifique. Lorsque, dans les années 60, je suivais ses cours au Collège de France, j'admirais son exceptionnelle virtuosité calculatoire et le parfait agencement des démonstrations difficiles, qu'il exposait toujours de manière complète. Avec plus de recul, je me rends compte que plus admirable encore est la profondeur de sa vue, qui lui a permis de dégager des concepts clefs des mathématiques d'aujourd'hui et de demain.

### Références

1. F. BAYEN, M. FLATO, C. FRONSDAL, A. LICHNÉROWICZ AND D. STERNHEIMER, Quantum mechanics as a deformation of classical mechanics, *Letters in Math. Phys.*, 1977, **1**, 521–530.
2. F. BAYEN, M. FLATO, C. FRONSDAL, A. LICHNÉROWICZ AND D. STERNHEIMER, Deformation theory and quantization, I : deformation of symplectic structures, and II : physical applications, *Annals of Physics*, 1978, **3**, 61–110 and 111–152.
3. M. CAHEN AND S. GUTT, Regular star-representations of Lie algebras, *Letters in Math. Phys.*, 1982, **6**, 395–404.
4. A. CANNAS DA SILVA AND A. WEINSTEIN, *Geometric Models for Noncommutative Algebras*, Berkeley mathematics lecture notes Vol. 10, American Mathematical Society, 1999.

5. M. DE WILDE AND P. LECOMTE, Existence of star-products and of formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds, *Letters in Math. Phys.*, 1983, **7**, 487–496.
6. B. FEDOSOV, A simple geometrical construction of deformation quantization, *J. Differential Geometry* (1994), **40**, 213–238.
7. M. FLATO, A. LICHNÉROWICZ AND D. STERNHEIMER, Deformations of Poisson brackets, Dirac brackets and applications, *J. Math. Phys.*, 1976, **9**, 1754–1762.
8. M. FLATO, A. LICHNÉROWICZ ET D. STERNHEIMER, Crochet de Moyal-Vey et quantification, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 1976, **283**, A, 19–24.
9. M. GERSTENHABER, Deformation theory of algebraic structures, *Ann. of Math.*, 1964, **79**, 59–90.
10. F. GUÉDIRA ET A. LICHNÉROWICZ, Géométrie des algèbres de Lie de Kirillov, *J. Math pures et appl.*, 1984, **63**, 407–484.
11. M. KARASEV AND V. MASLOV, *Nonlinear Poisson Brackets : geometry and quantization*, Translations of Mathematical Monographs 119, American Mathematical Society, Providence, 1993.
12. A. KIRILLOV, Local Lie algebras, *Russian Math. Surveys*, 1976, **31**, 4, 55–75.
13. J.-L. KOSZUL, Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie, dans *Élie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui*, Astérisque hors série, Société Mathématique de France, 1985, 257–271.
14. M. KONTSEVICH, Deformation quantization of Poisson manifolds, I, preprint (1997), q-alg/9709040.
15. A. LICHNÉROWICZ, Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, *J. Differential geometry*, 1977, **12**, 253–300.
16. A. LICHNÉROWICZ, Les variétés de Jacobi et leurs algèbres de Lie associées, *J. Math. pures et appl.*, 1978, **57**, 453–488.
17. A. LICHNÉROWICZ, Déformations d'algèbres associées à une variété symplectique (les  $\ast_\nu$ -produits), *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 1982, **32**, 157–209.
18. O. M. NEROSLAVSKY ET A. T. VLASSOV, Sur les déformations de l'algèbre des fonctions d'une variété symplectique, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 1981, **292**, 71.
19. H. OMORI, Y. Maeda and A. Yoshioka, Weyl manifolds and deformation quantization, *Advances in Math.* (1991) **85**, 224–255.
20. G. REEB, Sur certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques, *Mém. Acad. Roy. Belgique, Sci.*, 1952, **27**, 130–194.
21. I. VAISMAN, *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*, Progress in Mathematics vol. 118, Birkhäuser, Basel, 1994.
22. J. VEY, Déformation du crochet de Poisson sur une variété symplectique, *Comment. Math. Helvetici*, 1975, **50**, 421–454.
23. A. WEINSTEIN, The local structure of Poisson manifolds, *J. Differential geometry*, 1983, **18**, 523–557.

## À la mémoire de Kenkichi Iwasawa (1917–1998)

Roland GILLARD

---

Kenkichi Iwasawa est décédé d'une pneumonie aigüe le 26 octobre 1998 à l'âge de 81 ans. Il est né le 11 septembre 1917 et était le plus jeune des deux enfants du propriétaire d'une soierie à Kiryu-Shi (préfecture de Gumma). Il a fait ses études supérieures à l'université impériale de Tokyo. Il a épousé Aiko Kaneko, sœur cadette d'un camarade d'école, en 1941. Sa carrière mathématique débuta en avril 1940 par un poste d'assistant professeur à l'université impériale de Tokyo, il devint en avril 49 professeur associé à la même université mais visita l'Institute for Advanced Study de 1950 à 1952. Il devint ensuite assistant professeur puis professeur

*Kenkichi Iwasawa*

associé au Massachusetts Institute of Technology et enfin professeur dans cet institut en 1957. En 1967, il obtient un poste de professeur à l'université de Princeton jusqu'en 1986 où l'université lui confère l'Emeritatus. Il rentre au Japon en 1987 et continue à assister au séminaire de théorie des nombres de Tokyo.<sup>1</sup>

Pendant sa carrière, K. Iwasawa reçut le prix Asahi (1959), le prix Frank Nelson Cole (1962), le prix de l'Académie du Japon et le prix Fujiwara.

Ses contributions, déjà 62 articles et 5 livres répertoriés pour [2], ont marqué de façon importante deux domaines mathématiques : la théorie des groupes algébriques et des groupes de Lie d'une part et la théorie des nombres d'autre part. Un résumé beaucoup plus développé de son œuvre a été rédigé par Satake et Coates, cf [2], à l'occasion de son départ en retraite<sup>2</sup>. Etant moi-même arithméticien, je connais peu le premier volet des résultats d'Iwasawa. Je voudrais simplement mettre l'accent sur un théorème de décomposition des groupes de Lie semi-simples : la « décomposition d'Iwasawa »,  $G = KAN$ , cf. [4] décompose un tel groupe de Lie en produit d'un sous-groupe compact maximal,  $K$ , d'un sous-groupe de Cartan,  $A$  sous-groupe de Lie correspondant à une sous-algèbre de Lie commutative maximale  $\mathfrak{h}$ , et d'un groupe nilpotent  $N$  ; ainsi par exemple pour  $GL_n$ ,  $K$  est le groupe orthogonal,  $A$  le sous-groupe des matrices

<sup>1</sup> je remercie K. Miyake et G. Fujisaki pour ces informations bibliographiques

<sup>2</sup> cf. aussi [11], ou sa traduction en anglais encore à paraître

diagonales et  $N$  le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures avec une diagonale de 1. Cette décomposition permet de définir les ensembles de Siegel et ainsi d'obtenir des domaines fondamentaux.

Pour la partie théorie des nombres, on pourra consulter le texte de R. Greenberg, [3], d'une quarantaine de pages. Ce que l'on appelle en théorie des nombres « théorie d'Iwasawa » concerne les extensions galoisiennes de groupes de Galois  $\mathbb{Z}_p$ , pour  $p$  un nombre premier fixé (d'ailleurs appelé plutôt  $l$  au début) ; Iwasawa les appelait  $\Gamma$ -extensions. Le premier résultat marquant, cf. [5] concerne une évaluation du nombre de classes d'idéaux pour la sous-extension  $K_n$  de degré  $p^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , le  $n$  ième niveau, d'une  $\mathbb{Z}_p$ -extension  $K_\infty/K$  : la puissance de  $p$  dans ce nombre de classes est donnée pour  $n$  assez grand par une formule du type  $\mu p^n + \lambda n + \nu$  avec des entiers  $\lambda, \mu, \nu$  ;  $\lambda$  et  $\mu$  sont  $\geq 0$ . ceci s'obtient en l'interprétant au moyen de la limite projective  $X$  des  $p$ -parties,  $A_n$ , des groupes de classes des  $K_n$ . L'action du groupe de Galois isomorphe à  $\mathbb{Z}_p$  sur ce groupe compact se traduit par une structure de module sur  $\mathbb{Z}_p[[T]]$ , après choix d'un générateur. On récupère  $A_n$  à partir de  $X$  en divisant par  $((1+T)^n - 1)X$ , à une erreur qui se stabilise près ; l'exemple fondamental (le cas cyclotomique) est celui où  $K_n$  est l'extension de  $\mathbb{Q}$  obtenue par adjonction des racines  $p^{n+1}$  ièmes de 1, on a une  $\mathbb{Z}_p$ -extension sur le corps  $K_0$  des racines  $p$  ièmes. J.-P. Serre a exposé ce résultat au séminaire Bourbaki, cf. [12].

Le deuxième résultat fondamental a été motivé par le cas monogène : dans l'exemple précédent si  $X$ , ou des facteurs pour la décomposition suivant l'action naturelle de  $\text{Gal}(K_0/\mathbb{Q})$ , est monogène le théorème de Stickelberger donne en fait sa structure : Iwasawa fait le lien entre ces éléments de Stickelberger et les fonctions  $L$   $p$ -adiques que Kubota et Leopoldt venaient d'introduire. Sa théorie donne d'ailleurs le raffinement que ces fonctions, que l'on savait seulement être continues en  $s \in \mathbb{Z}_p$ , provenaient en fait de série entières  $\sum a_n T^n$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}_p$  évaluées en  $T = (1+p)^s - 1$ , cf son livre [9]. Dans le cas cyclotomique, des calculs numériques ont montré assez tôt à Iwasawa que l'invariant  $\mu$  était nul pour  $p = 37, 59, 67$  et (les 3 nombres premiers irréguliers  $\leq 100$ ), ceci l'a conduit à une conjecture qui a résisté une dizaine d'années avant d'être résolue par deux de ses élèves Ferrero et Washington, cf [13]. Le rapport entre les  $\sum a_n T^n$  et les séries caractéristiques de  $X$  est l'objet de la conjecture « principale » énoncée dans [1] et qu'Iwasawa a dû aussi envisager. C'est devenu le théorème de Mazur et Wiles, redémontré après par Rubin après des travaux plus élémentaires de Thaine et Kolyvagin.

Pour finir ce bref résumé des contributions, je voudrais parler de [8] où K. Iwasawa fait le lien entre les séries  $\sum a_n T^n$  précédentes et une limite projective d'un quotient  $U_n/C_n$  d'un groupe des unités du complété en  $p$  par son sous-groupe des unités cyclotomiques (engendré par des quotient de  $1 - \zeta$ , avec  $\zeta$  racine de 1). Cette théorie a été reprise par Coleman, Fontaine et Wintenberger (corps des normes) ainsi que dans la théorie des systèmes d'Euler de Kolyvagin.

Pour situer l'importance historique de la théorie d'Iwasawa, il suffit de dire qu'elle a relancé l'intérêt pour les travaux de Kummer, Herbrand,... et donc ouvert la voie à la solution du problème de Fermat par Wiles. Elle a été reprise par B. Mazur dans le cadre des variétés abéliennes et des groupes de Selmer,

théorie qui a été développée par la suite par R. Greenberg et B. Perrin-Riou (sortie du cadre « ordinaire »). Plusieurs centaines d'articles ont développé la théorie d'Iwasawa, plus de deux cents contenant son nom dans le titre.

### Références

- [1] J. COATES . *p-adic L functions and Iwasawa Theory*. IN A. FRÖHLICH, editor, *Algebraic Number Fields*, pages 269–353, Academic Press 1977.
- [2] J. COATES et I. SATAKE. *Comments*. IN J. COATES, R. GREENBERG, B. MAZUR ET I. SATAKE, editors, *Algebraic Number Theory- In honor of K. Iwasawa*, pages xvii-xxiv, Academic Press 1989.
- [3] R. GREENBERG . *Iwasawa Theory - Past and present*. IN K. MIYAKE, editor, *Class Field Theory Centennial Conference*, 43 pp., à paraître,
- [4] K. IWASAWA. *On some type of topological groups*. *Ann. of Math.*, 50 ; 507-558, 1949.
- [5] K. IWASAWA. *On some invariants of cyclotomic fields*. *Am. J. Math.*, 80 ; 773–783, 1958.
- [6] K. IWASAWA. *On  $\Gamma$ -extensions of algebraic number fields*. *Bull. Amer. Math Soc.*, 65 ; 183–226, 1959.
- [7] K. IWASAWA. *On the theory of cyclotomic fields*. *Ann. of Math.*, 70 ; 530–561, 1959.
- [8] K. IWASAWA. *On some modules in the theory of cyclotomic fields*. *J. Math. Soc. Japan*, 16 ; 42–82, 1964.
- [9] K. IWASAWA. *Lecture on p-adic L functions*. Ann. of math. Studies N° 74, Princeton University press, 1972, 106 pp.
- [10] K. IWASAWA. *On  $\mathbb{Z}_l$ -extensions of algebraic number fields*. *Ann. of Math.*, 98 ; 246-326, 1973.
- [11] K. IWASAWA. *Two hours with Kenkichi Iwasawa. (Japanese)*. *Sugaku* 45, N° 4, 366-372 (1993). [ISSN 0039-470X] With list of publications.
- [12] J.-P. SERRE. *Classes des corps cyclotomiques*. Séminaire Bourbaki N° 174, 1958, 11 pp.
- [13] L. WASHINGTON. *Introduction to cyclotomic fields*. Springer-Verlag, 1982.