

# MATHÉMATIQUES

---

## Gammes naturelles (suite)

Yves HELLEGOUARCH (Université de Caen)

---

*L. Euler a affirmé en 1766 que « l'organe de l'ouïe est accoutumé de prendre pour proportion simple toutes les proportions qui n'en diffèrent que fort peu, de sorte que la différence soit quasi imperceptible ».*

*Dans les quatre premiers paragraphes nous avons donné un sens précis à cette affirmation en considérant l'échelle musicale constituée par le sous-groupe  $\langle 2, 3 \rangle$  de  $\mathbb{Q}_+^*$ , une « gamme abstraite »  $\langle 2, 3 \rangle / N$  où  $N$  est un sous-groupe de rang 1 de  $\langle 2, 3 \rangle$  engendré par un comma et la « gamme concrète » correspondante formée des représentants de plus petite hauteur des classes de  $\langle 2, 3 \rangle$  modulo  $N$ .*

### 5. Limite des gammes de Pythagore $\Gamma_n$ lorsque $n \rightarrow \infty$

On suppose ici que l'échelle choisie est  $G = \langle p, q \rangle$  où  $p$  et  $q$  sont des entiers premiers entre eux tels que  $1 < p < q$  et on reprend les notations du §3.

Soit  $r \in G$  et soit  $\Gamma_n$  une gamme de  $G$ . Lorsque  $n$  tend vers l'infini le degré  $d_n(r)$  de  $r$  dans la gamme  $\Gamma_n$  tend vers  $\pm\infty$  si  $r \neq 1$ , mais nous allons voir que

$\frac{d_n(r)}{d_n(p)} = \frac{d_n(r)}{|y_n|}$  possède une limite dans  $\mathbb{R}$ .

**Théorème 7.** — Soit  $r \in G = \langle p, q \rangle$  et soit  $n \in \mathbb{N}$ . Lorsque  $n$  tend vers l'infini  $\frac{d_n(r)}{d_n(p)}$  tend vers  $\text{Log}_p(r)$ .

**Preuve** — Par définition nous avons :

$$r \equiv r_{n-1}^{d_n(r)} \quad \text{modulo } \langle r_n \rangle$$

Posons  $r = p^x q^y$ , on a alors :

$$\begin{cases} x = d_n(r)x_{n-1} + hx_n \\ y = d_n(r)y_{n-1} + hy_n \end{cases} \quad h \in \mathbb{Z}$$

et en éliminant  $h$  entre ces deux équations, on trouve :

$$d_n(r) = \frac{y_n x - x_n y}{y_n x_{n-1} - x_n y_{n-1}}$$

En se rappelant que  $|y_n| x_{n-1} + (-1)^{n+1} x_n y_{n-1} = 1$  on en déduit que :

$$\frac{d_n(r)}{|y_n|} = x + y \frac{p_n}{q_n}.$$

Comme  $\frac{p_n}{q_n}$  tend vers  $\text{Log}_p(q)$ , on voit que  $\frac{d_n(r)}{d_n(p)}$  tend vers  $\text{Log}_p(r)$ . ■

**Remarques:** 1) Lorsque  $r$  est donné dans  $G$ , il devient le représentant de plus petite hauteur de sa propre classe lorsque  $n$  est assez grand.

2) On peut interpréter le théorème 6 en disant que les limites des gammes de Pythagore sont des gammes tempérées continues, ce qui correspond bien au caractère « olympien » des tempéraments correspondants.

3) On a en fait donné une nouvelle construction des logarithmes de base entière des nombres rationnels !

### 6. Gammes des groupes de rang 3

Les musiciens qui ont la chance de jouer le quatuor en ut avec flûte de Mozart, savent que le second mouvement contient un passage d'une clarté harmonique intense

lorsque les instruments jouent dans un tempérament convenable : les tierces majeures mi/do de l'alto doivent être pures (intervalle  $5/4$ ) ce qui rend le do grave inévitable comme octave du son différentiel (ou son de Tartini) de fréquence  $5-4$ .

Quant à la tierce mineure sol/mi (intervalle  $6/5$ ) entre le violon et l'alto, elle ne fait que renforcer le son différentiel précédent ( $6-5=1$ ).

L'échelle musicale de ce quatuor doit donc contenir les nombres premiers 2, 3 et 5 : ce doit être au moins l'échelle de Zarlino  $\langle 2, 3, 5 \rangle$  (et le passage serait encore plus beau si l'on remplaçait le violoncelle par une contrebasse).

On peut définir les commas du groupe  $G = \langle 2, 3, 5 \rangle$  comme on l'a fait au paragraphe 2 et on trouve :

$$2, \frac{3}{2}, \frac{2^2}{3}, \frac{5}{2^2}, \frac{2.3}{5}, \frac{3^2}{2^3}, \frac{2.5}{3^2}, \frac{2^4}{3.5}, \frac{5^2}{2^3.3}, \frac{3^4}{2^4.5} = \text{comma de Didyme,}$$

$$\frac{2^{11}}{3^4.5^2}, \frac{5^6}{2^6.3^5}, \frac{3^8.5}{2^{15}}, \frac{2^{38}}{3^2.5^{15}}, \dots$$

Nous allons maintenant considérer le groupe quotient de  $G = \langle 2, 3, 5 \rangle$  par le sous-groupe  $\langle r, r' \rangle$  engendré par  $r = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$  et  $r' = 2^{\alpha'} 3^{\beta'} 5^{\gamma'}$ .

**Théorème 8.** — Soient  $r$  et  $r' \in G$  et  $N = \langle r, r' \rangle$ .

1) Posons :

$$\begin{vmatrix} x & \alpha & \alpha' \\ y & \beta & \beta' \\ z & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha''x + \beta''y + \gamma''z.$$

Si le p.g.c.d.  $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$  est égal à 1, alors  $G/N$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .

2) Dire que la classe de  $s = 2^a 3^b 5^c$  est un générateur de  $G/N$  équivaut à dire que :

$$\begin{vmatrix} a & \alpha & \alpha' \\ b & \beta & \beta' \\ c & \gamma & \gamma'' \end{vmatrix} = \alpha''a + \beta''b + \gamma''c = \pm 1.$$

**Preuve** —

1) Dire que p.g.c.d.  $(\alpha'', \beta'', \gamma'') = 1$  équivaut à affirmer l'existence de  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$  tel que

$$a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = \pm 1$$

en vertu du théorème de Bézout.

2) Mais cette dernière condition signifie que  $(a, b, c), (\alpha, \beta, \gamma)$  et  $(\alpha', \beta', \gamma')$  constituent une base de  $\mathbb{Z}^3$ .

Si nous posons  $K = \mathbb{Z}(\alpha, \beta, \gamma) + \mathbb{Z}(\alpha', \beta', \gamma')$ , nous voyons que  $\mathbb{Z}^3/K$  est un groupe isomorphe à  $\mathbb{Z}$  et engendré par la classe de  $(a, b, c)$ . Mais ceci est juste la forme additive du résultat que nous voulons obtenir. ■

**Exemples :** Nous allons « améliorer » les gammes de Pythagore, correspondant aux groupes  $\langle 2, 3 \rangle / \langle r \rangle$ , que nous avons obtenues dans le paragraphe 4. Pour chaque comma  $r$  de  $\langle 2, 3 \rangle$  nous chercherons un comma  $r'$  de  $G = \langle 2, 3, 5 \rangle$  qui « dépende » de 5 et qui satisfasse au théorème précédent : on posera  $N = \langle r, r' \rangle$ .

Soit  $\varphi$  la projection canonique  $G \rightarrow G/N$  et soit  $P = \varphi(\langle 2, 3 \rangle)$ . Comme  $\text{Ker } \varphi \cap \langle 2, 3 \rangle = \langle r \rangle$  on voit que  $P$  est isomorphe au groupe quotient  $\langle 2, 3 \rangle / \langle r \rangle$  dont on était parti (mais certains représentants de ce groupe doivent être remplacés par des éléments de  $\langle 2, 3, 5 \rangle$  de plus petite hauteur dans le groupe  $G/N$ ).

Finalement le nombre de degrés<sup>1</sup> de  $G/N$  dans une octave est égal à celui de  $P$  multiplié par l'indice de  $P$  dans  $G/N$ .

Lorsque cet indice est égal à 1, on dira que la gamme obtenue *affine* notre gamme de Pythagore, sinon on dira que l'on a obtenu une « *nouvelle gamme* ».

$$1) r = \frac{2^2}{3}$$

$r'$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2 \times 3}{5}$	$\frac{2 \times 5}{3^2}$	$\frac{2^4}{3 \times 5}$	$\frac{5^2}{2^3 \times 3}$	$\frac{3^4}{2^4 \times 5}$
$s$	2	2	2	2	$\frac{5}{2^2}$	2

$$2) r = \frac{3^2}{2^3}$$

$r'$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2 \times 3}{5}$	$\frac{2 \times 5}{3^2}$	$\frac{2^4}{3 \times 5}$	$\frac{5^2}{2^3 \times 3}$	$\frac{3^4}{2^4 \times 5}$
$s$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{3}{2}$

$$3) r = \frac{2^8}{3^5}$$

$r'$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2 \times 3}{5}$	$\frac{2 \times 5}{3^2}$	$\frac{2^4}{3 \times 5}$	$\frac{5^2}{2^3 \times 3}$	$\frac{3^4}{2^4 \times 5}$
$s$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2.5}{3^2}$	$\frac{3^2}{2^3}$

$$4) r = \frac{3^{12}}{2^{19}}$$

$r'$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2 \times 3}{5}$	$\frac{2 \times 5}{3^2}$	$\frac{2^4}{3 \times 5}$	$\frac{5^2}{2^3 \times 3}$	$\frac{3^4}{2^4 \times 5}$	$\frac{5^6}{2^6 \times 3^5}$
$s$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{3^4}{2^4 \times 5}$	$\frac{2^4}{3 \times 5}$	$\frac{3^4}{2^4 \times 5}$

On voit donc apparaître des phénomènes intéressants dans les cinquièmes colonnes des trois premiers tableaux ainsi que dans les trois dernières colonnes du dernier tableau. Nous allons étudier en détail les gammes correspondantes que nous désignerons sous le nom générique de gammes de Zarlino (du nom de la quatrième du dernier tableau).

$$(r, r') = \left( \frac{2^2}{3}, \frac{5^2}{2^3 \times 3} \right) : \text{deux degrés (nouvelle gamme)}$$

<sup>1</sup> la notion de degré est définie comme pour le rang 2.

$\mathbb{Z}$	0	1	2
fréquences	1	$\frac{5}{2^2}$	2

$(r, r') = \left(\frac{3^2}{2^3}, \frac{5^2}{2^3 \times 3}\right)$  : quatre degrés (nouvelle gamme)

$\mathbb{Z}$	0	1	2	3	4
fréquences	1	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{5}$	2

$(r, r') = \left(\frac{2^8}{3^5}, \frac{5^2}{2^3 \times 3}\right)$  : dix degrés<sup>2</sup> (nouvelle gamme)

$\mathbb{Z}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
fréquences	1	$\frac{2.5}{3^2}$	$\frac{3.2}{2^3}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^3}{2^2 \times 5}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^2}{5}$	2

$(r, r') = \left(\frac{3^{12}}{2^{19}}, \frac{5^2}{2^3 \times 3}\right)$  : vingt-quatre degrés (nouvelle gamme)

$\mathbb{Z}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
fréquences	1	$\frac{3^4}{2^4 \times 5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2 \times 5}{3^2}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^6}{2^7 \times 5}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^6 \times 5}{3^5}$
	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^3}{2^2 \times 5}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{2^3 \times 5}{3^3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^5}{2^5 \times 5}$	$\frac{2^7}{3^4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^8 \times 5}{3^6}$
	20	21	22	23	24					
	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^2}{5}$	$\frac{3^5}{2^7}$	$\frac{2^5 \times 5}{3^4}$	2					

Les deux derniers commas du dernier tableau donnent encore des nouvelles gammes (mais dans le dernier cas, la gamme n'est pas croissante!).

<sup>2</sup> L'existence de cette gamme peut donner un sens à la construction d'un tempérament égal à 10 degrés (Luc Etienne).

En revanche la quatrième colonne du dernier tableau ne nous donne pas une nouvelle gamme. Dans ce cas on a  $(r, r') = \left(\frac{3^{12}}{2^{19}}, \frac{3^4}{2^4 \cdot 5}\right)$  : c'est la gamme de Zarlino proprement dite, elle affine la gamme de Pythagore :

$\mathbb{Z}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
fréquences	1	$\frac{2^4}{3 \cdot 5}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2 \cdot 3}{5}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{5^2}{2 \cdot 3^2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2^3}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3^2}{5}$	$\frac{3 \times 5}{2^3}$	2

voir plus loin un tableau des fréquences des 60 premiers degrés (ces fréquences sont croissantes) de cette gamme de Zarlino.

ZARLINO :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	$\frac{2^4}{3.5}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2.3}{5}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{5^2}{2.3^2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2^3}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3^2}{5}$	$\frac{3 \times 5}{2^3}$	2	$\frac{5^2}{2^2.3}$	$\frac{3^2}{2^2}$	$\frac{2^2.3}{5}$
1															
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
	$\frac{2^3}{3}$	$\frac{5^2}{3^2}$	3	$\frac{2^4}{5}$	$\frac{2.5}{3}$	$\frac{2.3^2}{5}$	$\frac{3.5}{2^2}$	$2^2$	$\frac{5^2}{2.3}$	$\frac{3^2}{2}$	$\frac{2^3.3}{5}$	5	$\frac{2^4}{3}$	$\frac{5.3^2}{2^3}$	$2.3$
5															
2															
32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
	$\frac{2^2.5}{3}$	$\frac{2^2.3^2}{5}$	$\frac{3.5}{2}$	$2^3$	$\frac{5^2}{3}$	$3^2$	$\frac{2^4.3}{5}$	2.5	$\frac{2^5}{3}$	$\frac{5.3^2}{2^2}$	$2^2.3$	$\frac{5^2}{2}$	$\frac{3^3}{2}$	$\frac{2^3.3^2}{5}$	$3.5$
52															
22															
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60			
	$\frac{5^2.2}{3}$	$\frac{2.3^2}{5}$	$\frac{3.5^2}{2^2}$	$2^2.5$	$\frac{2^6}{3}$	$\frac{5.3^2}{2}$	$2^3.3$	$5^2$	$3^3$	$\frac{2^4.3^2}{5}$	$2.3.5$	$2^5$			

### 7. Attraction harmonique, justesse expressive

Soit une gamme  $\Gamma$  construite selon les principes précédents et représentant le groupe quotient  $G/N$  et soient  $x$  et  $y \in \Gamma$ .

Nous noterons par  $d$  la distance harmonique sur  $\mathbb{Q}_+^*$  et par  $\delta_\Gamma(x, y)$  le nombre  $d(xN, yN)$ .

$\delta_\Gamma(x, y)$  sera appelé la « dissonance » de l'intervalle  $\frac{y}{x}$  dans la gamme  $\Gamma$ .

**Proposition.-** Si  $z$  désigne le représentant de la classe de  $\frac{y}{x}$  dans la gamme  $\Gamma$ , on a :

$$\delta_\Gamma(x, y) = \text{Log } h(z).$$

**Preuve –**

$$d(xN, yN) = \inf\{d(xu, yv); u, v \in N\} = \inf\{\text{Log } h\left(\frac{y}{x}w\right); w \in N\} = \text{Log } h(z).$$

■

Nous allons montrer maintenant comment cette notion de dissonance permet de retrouver des notions musicales inexplicables à partir de la gamme tempérée  $T$ . Dans la suite,  $P$  désignera la gamme de Pythagore à 12 degrés et  $Z$  celle de Zarlino.

Hindemith remarque ([22] p. 55) que bien que les théoriciens de la musique ne soient d'accord sur rien, ils le sont cependant sur l'ordre de « parenté » décroissante des degrés de la gamme.

L'ordre que donne Hindemith est le suivant : unisson, octave, quinte, quarte, sixte majeure, tierce majeure, tierce mineure, etc.<sup>3</sup>

Il ajoute que la quarte augmentée (ou quinte diminuée) se trouve très loin.

Nous allons comparer ce qui se passe dans nos trois gammes<sup>4</sup>

	unisson	octave	quinte	quarte	sixte majeure	tierce majeure	tierce mineure	sixte mineure	quarte augment.
$\delta_P$	0	Log 2	Log 3	Log 4	Log 27	Log 81	Log 32	Log 128	Log 729
$\delta_Z$	0	Log 2	Log 3	Log 4	Log 5	Log 5	Log 6	Log 8	Log 25
$\delta_T$	0	Log 2	$\frac{7}{12} \text{Log } 2$	$\frac{5}{12} \text{Log } 2$	$\frac{3}{4} \text{Log } 2$	$\frac{1}{3} \text{Log } 2$	$\frac{1}{4} \text{Log } 2$	$\frac{2}{3} \text{Log } 2$	$\frac{1}{2} \text{Log } 2$

Comme la notion de dissonance dans la gamme de Zarlino reproduit assez bien l'ordre constaté par Hindemith, nous choisirons cette gamme dans la suite :

<sup>3</sup> Comparer avec les expériences de C. Stumpf, §1.

<sup>4</sup> Voir l'annexe pour la gamme tempérée  $T$ .

0 (unisson)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{25}{18}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{15}{8}$	2

**7.1. Attraction harmonique**

Depuis des siècles les musiciens ont constaté que certaines notes étaient « attirées » par d'autres ou que, plus exactement, certains intervalles avaient tendance à se « résoudre » dans des intervalles voisins ; Deryck Cooke ([3] p. 90) en donne un résumé que l'on va représenter par un tableau dans lequel le zéro est le degré de la note fondamentale (tonique).

		degré de la note supérieure						
		⏟						
		1	2	5	8	9	10	11
type {	semi-tonal	↓ 0		↓ 4	↓ 7		↓ 9	↑ 12
	tonal		↓ 0			↓ 7	↓ 8	

Essayons de retrouver les attractions semi-tonales à partir de la gamme chromatique ci-dessus : nous dirons que la note  $n$  entourée de  $n_g$  et  $n_d$  se *résout* en  $n_g$  (resp.  $n_d$ ) si :

$$h(n_g) < h(n_d) \left( \text{resp. } h(n_g) > h(n_d) \right) \text{ et } h(n) > h(n_g) \left( \text{resp. } h(n) > h(n_d) \right)$$

A partir de cette définition nous trouvons les attractions semi-tonales suivantes :

1	2	3	4	6	8	10	11
↓ 0	↑ 3	↑ 4	↑ 5	↑ 7	↓ 7	↓ 9	↑ 12

Pour trouver les attractions tonales, il suffit de remplacer les notes voisines à un degré par les notes voisines à deux degrés dans la définition, on trouve :

2	3	5	6	9	10
↓ 0	↑ 5	↑ 7	↓ 4	↓ 7	↑ 12

Dans l'ensemble on a un bon accord avec les résultats de D. Cooke, excepté pour la quarte juste (5) en ce qui concerne l'attraction semi-tonale (on trouve le contraire) et la septième mineure (10) en ce qui concerne l'attraction tonale (mais on ne trouve pas le contraire!).

## 7.2. Justesse expressive

La plupart des instrumentistes à cordes et des chanteurs pratiquent la « justesse expressive » ([1] ch. V) c'est-à-dire qu'ils modifient la hauteur des sons qu'ils utilisent par de légers « commas » (ce qui ne change pas la classe modulo  $N$ ) afin de jouer plus juste en fonction du contexte.

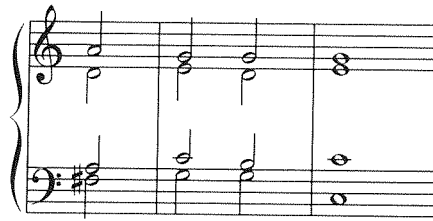
Nous allons illustrer cette pratique par un exemple utilisant la gamme de Zarlino.

Nous présenterons dans un tableau les fréquences des sons des gammes majeures de do, sol, fa et ré. Pour passer des fréquences de do majeur à celles des tonalités ci-dessus on multiplie par  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$  et  $\frac{3^2}{2^3}$ .

	do	do#	ré	mi	fa	fa#	sol	la	si <sup>b</sup>	si	do
do maj.	1		$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$		$\frac{15}{8}$	2
sol maj.	1		$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$		$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$		$\frac{15}{8}$	2
fa maj.	1		$\frac{10}{9}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{16}{9}$		2
ré maj.		$\frac{135}{128}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$		$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$		$\frac{15}{8}$	

Dans la théorie de la musique, sol majeur et fa majeur sont considérées comme des tonalités voisines de do majeur, et ré majeur comme une tonalité voisine de sol majeur. En dehors de l'introduction d'une altération supplémentaire (dièze) on constate que la « montée » de la tonalité de do majeur à la tonalité voisine de sol majeur affecte le « sixième degré » qui s'élève d'un comma de Didyme ( $\frac{81}{80}$ ) pour devenir le « second degré » de la nouvelle gamme - je veux dire que le « la » de sol majeur est plus haut que le « la » de do majeur, et ceci d'un comma<sup>5</sup>. C'est un des éléments de la richesse et de la cohérence qui appartiennent au jeu des grands interprètes. Et c'est ce qui explique aussi que pour moduler d'une tonalité donnée dans une tonalité voisine l'harmonie recherchera l'ambiguïté et évitera les notes dont la hauteur change, comme le montre l'exemple suivant :

<sup>5</sup> le  $fa^\#$  en sol majeur est également un comma de Didyme au-dessous de celui de notre gamme chromatique et le  $si^b$  de fa majeur est un comma au-dessous de celui de notre gamme chromatique.



En termes plus mathématiques, on peut dire que le système de facteurs de notre gamme est cohomologiquement trivial mais non constant et que cette non constance est la cause de la justesse expressive.

### Conclusion

Les quelques remarques du paragraphe 7 font apercevoir comment la substitution de  $\mathbb{Q}_+^*$  à  $\mathbb{R}_+^*$  permet d'enrichir le vocabulaire de la perception dans la théorie musicale : *distance mélodique* (dont la loi de Weber-Fechner donne une approximation grossière et qui correspond à peu près à la distance ordinaire), *distance harmonique* (pour laquelle la loi de Weber-Fechner ne s'applique absolument pas), *justesse expressive*, etc.

Mais cette théorie permet aussi de réconcilier les divers points de vue et d'expliquer comment les musiciens qui pratiquent la justesse naturelle peuvent comprendre ceux qui n'ont pas ce privilège : toutes les gammes abstraites  $H = G / \langle \text{commas} \rangle$  sont des espaces homogènes sur  $\mathbb{Z}$  et on a :

$$\deg(n * x) = n + \deg(x)$$

lorsque  $n \in \mathbb{Z}$  et  $x \in H$ . Pourtant c'est le contexte le plus riche qui permet de donner un sens ( $\#$  et  $b$ ) aux modèles appauvris !

### Appendice

#### 1. Prolongement de la fonction $h$ à $\overline{\mathbb{Q}}^*$ .

On désigne ici par  $\overline{\mathbb{Q}}$  le corps des nombres algébriques (sur  $\mathbb{Q}$ ) dont on ne garde que la structure de groupe multiplicatif (ainsi  $2^{1/12} \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ ). On sait ([14] et [23]) que  $h$  possède un prolongement naturel à  $\overline{\mathbb{Q}}^*$  :

$$\bar{h} : \overline{\mathbb{Q}}^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

et que  $\bar{h}(x^n) = \bar{h}(x)^n$  pour tout  $x \in \overline{\mathbb{Q}}^*$  et  $n \in \mathbb{N}$  (on sait aussi que si  $\bar{h}(x) = 1$ , alors  $x$  est un élément de torsion de  $\overline{\mathbb{Q}}^*$ ). Cette remarque nous permet de définir une distance harmonique sur les gammes tempérées de Werckmeister et S. Cordier et sur la gamme mésotonique (et aussi sur  $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}_+^*$ ).

Puisque  $\bar{h}(2^{n/12}) = \bar{h}(2)^{n/12} = 2^{n/12}$ , cette distance sera  $d$  (tonique,  $n^{\text{ième}}$  degré) =  $\frac{n}{12} \text{Log } 2$  pour la gamme officielle, et  $d$  (tonique,  $n^{\text{ième}}$  degré) =  $\frac{n}{7} \text{Log } \frac{3}{2}$  pour la gamme de S. Cordier : on retrouve la distance ordinaire. Pour la gamme mésotonique, cependant, on obtient une sorte de compromis entre les gammes naturelles et les gammes tempérées :

degré	0	1	2	3	4	5	6	7
$x$	1	$\frac{2^3}{5^{\frac{5}{4}}}$	$\frac{5^{\frac{1}{2}}}{2}$	$\frac{2^2}{5^{\frac{3}{4}}}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2}{5^{\frac{1}{4}}}$	$\frac{5^{\frac{3}{2}}}{2^3}$	$5^{\frac{1}{4}}$
nom	do	ré <sup>b</sup>	ré	mi <sup>b</sup>	mi	fa	fa <sup>#</sup>	sol
$d(1, x)$	0	$3 \text{Log } 2$	$\frac{1}{2} \text{Log } 5$	$2 \text{Log } 2$	$\text{Log } 5$	$\text{Log } 2$	$\frac{3}{2} \text{Log } 5$	$\frac{1}{4} \text{Log } 5$

degré	8	9	10	11	12
$x$	$\frac{5^2}{2^4}$	$\frac{5^{\frac{3}{4}}}{2}$	$\frac{2^2}{5^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{5^{\frac{5}{4}}}{2^2}$	2
nom	sol <sup>#</sup>	la	si <sup>b</sup>	si	do
$d(1, x)$	$2 \text{Log } 5$	$\frac{3}{4} \text{Log } 5$	$2 \text{Log } 2$	$\frac{5}{4} \text{Log } 5$	$\text{Log } 2$

Une évaluation numérique de ces nombres montre qu'ils correspondent bien à l'intuition harmonique. Notons que :

$$\begin{cases} d(\text{do}, \text{do}^{\#}) > d(\text{do}, \text{ré}^b) \\ d(\text{do}, \text{sol}^{\#}) > d(\text{do}, \text{la}^b) \end{cases}$$

## 2. Dissonance des accords

Lorsqu'un accord de  $n$  notes est joué dans une échelle naturelle, on pourrait penser que la hauteur du point projectif correspondant dans  $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{Q})$  est un bon candidat pour mesurer la dissonance de l'accord. Cependant le diamètre de cet ensemble de notes, pour la distance harmonique, semble être un dangereux concurrent !

## 3. Commas

Un grand nombre de commas pour un grand nombre de groupes de  $S$  ont été calculés à l'aide d'un algorithme de Philippe Luquet (mémoire de maîtrise, Caen). D'autre part l'algorithme d'E. Dubois [10] fournit aussi des commas (pas nécessairement tous les commas).

## Bibliographie

- [1] D. BLUM - *Casals et l'art de l'interprétation*; Buchet/Chastel, Paris 1980.
- [2] C. BUNTING - *Essay on the Craft of Cello-Playing*; t. 2, Cambridge University Press 1982, p. 154.
- [3] D. COOKE - *The Language of Music*; Oxford University Press, 1963.

- [4] S. CORDIER - *Piano bien tempéré et justesse orchestrale* ; Buchet/ Chastel, Paris 1982.
- [5] J. DAUTREVAUX - *A propos de : Approximation en Musique* ; Bulletin A.P.M. n° 299 (juin 1975).
- [6] R. DE CANDE - *Histoire Universelle de la Musique* ; t. II, Seuil, Paris 1978.
- [7] R. DE CANDE - *Dictionnaire de Musique* ; Microcosme/Seuil, 1961.
- [8] A. DANIELOU - *Traité de Musicologie comparée* ; Hermann, actualités scientifiques et industrielles 1265, Paris 1959.
- [9] A. DANIELOU - *Music and the Power of Sound* ; Inner Traditions, Rochester, Vermont, 1995.
- [10] E. DUBOIS - *Thèse* ; Université P. et M. Curie, 17 mars 1980.
- [11] E. EMERY - *Temps et Musique* ; Dialectica, L'Age d'Homme, 1975.
- [12] L. EULER - *Essai d'une nouvelle théorie de la musique* ; in « Musique Mathématique » Paris Librairie Scient. et Phil. 1865.
- [13] G.H. HARDY et E.M. WRIGHT - *An introduction to the theory of numbers* ; Oxford Un. Press, 1956.
- [14] Y. HELLEGOUARCH - *Un aspect de la théorie des hauteurs* ; Journées arithmétique, Caen, 1980.
- [15] Y. HELLEGOUARCH - *Scales* ; Comptes-Rendus, Mathématiques, La Société Royale du Canada, vol. IV, n° 5 (oct. 1982) et vol. V, n° 2 (avr. 1983).
- [16] Y. HELLEGOUARCH - *Gammes Naturelles* ; in Musique et Mathématiques, éd. B. Parzys, APMEP n° 53, Paris 1983.
- [17] Y. HELLEGOUARCH - *L'Essai d'une nouvelle théorie de la musique de Leonhard Euler* ; in Destin de l'Art, desseins de la Science, actes du colloque de Caen 1986, IREM de Basse-Normandie, Caen, 1992.
- [18] Y. HELLEGOUARCH - *Ford hyperspheres, a general approach* ; C.R. Math. Acad. Sci. Canada, vol. XI, oct. 1989.
- [19] Y. HELLEGOUARCH - *A la recherche de l'arithmétique qui se cache dans la musique* ; Marsyas, n° 22, juin 1992.
- [20] Y. HELLEGOUARCH - *Invitation aux mathématiques de Fermat-Wiles* ; Masson, Paris, 1997.
- [21] H. HELMHOLTZ - *On the Sensations of Tone* ; Dover, New York, 1954.
- [22] P. HINDEMITH - *The craft of musical composition* ; Schott, Londres, 1945.
- [23] S. LANG - *Fundamentals of Diophantine Geometry* ; Springer, Berlin, 1983.
- [24] E. LEIPP - *Acoustique Musicale* ; Masson, Paris, 1971.
- [25] B. PARZYSZ - *L'approximation en Musique* ; Bull. APM n° 296, XII, 1974.
- [26] J.H. SILVERMAN - *The Arithmetic of Elliptic Curves* ; Springer Berlin, 1985.
- [27] H.M. STARK - *An Introduction to Number Theory* ; The MIT Press, Cambridge Mass. and London Eng., 1991.

★ ★ ★

# Algorithme de réduction des degrés dans une gamme musicale

(d'après la théorie d'Yves Hellegouarch)

Marc CHEMILLIER & Gérard DUCHAMP  
(Université de Caen & Université de Rouen)

---

## Introduction

Dans la théorie d'Yves Hellegouarch, les « gammes naturelles » sont des gammes constituées de fréquences ayant entre elles des rapports rationnels. Ainsi, la gamme de Pythagore est obtenue en formant des intervalles d'octave et de quinte justes, c'est-à-dire en multipliant une fréquence de référence par des puissances de 2 et 3. La gamme de Zarlino est obtenue en formant des intervalles d'octave, de quinte et de tierce justes, c'est-à-dire en multipliant une fréquence de référence par des puissances de 2, 3 et 5.

Le problème posé par les intervalles justes est que, par exemple, si l'on parcourt le cycle des quintes ascendantes *do, sol, ré, la, mi*, etc. à partir d'un *do* initial, on ne peut pas retomber sur un *do* identique à une octave supérieure, parce que  $(3/2)^{12}$  n'est pas une puissance de 2. Construire une gamme revient à introduire des approximations, en convenant par exemple d'« identifier » la note obtenue par un cycle de 12 quintes ascendantes redoublées (quinte plus octave) et celle obtenue par un saut de 19 octaves. Mathématiquement, cela revient à imposer une relation  $3^{12}/2^{19} = 1$  dans le sous-groupe multiplicatif  $\langle 2, 3 \rangle$  de  $\mathbb{Q}_+^*$  engendré par 2 et 3 (on dit alors que  $c = 3^{12}/2^{19}$  est un *comma* du groupe). L'approximation est choisie de telle sorte que le quotient du sous-groupe  $\langle 2, 3 \rangle$  modulo  $c$  soit monogène isomorphe au groupe additif des entiers  $\mathbb{Z}$ . Les « degrés » de la gamme obtenue sont alors les éléments du sous-groupe quotient, classés dans l'ordre des puissances croissantes  $g, g^2, \dots, g^n$  du générateur  $g$ .

Pour choisir un représentant canonique de chaque degré de la gamme, Yves Hellegouarch introduit la notion de *hauteur* d'une fraction  $p/q$  comme étant le maximum du numérateur  $p$  et du dénominateur  $q$ . Le représentant canonique d'un degré est celui de hauteur minimale dans sa classe, c'est-à-dire la fraction dont les numérateur et dénominateur sont les plus petits possibles. Ainsi, dans la gamme de Pythagore, avec le comma  $c = 3^{12}/2^{19}$  et en partant de la note *do*, le degré correspondant à la note *fa*♯ peut être représenté à la fois par la fraction  $3^6/2^9$  et par la fraction  $2^{10}/3^6 = 3^6/2^9 \times c^{-1}$  qui est équivalente. Mais la première fraction est de hauteur plus petite que la seconde et c'est elle qui est choisie comme représentant du degré *fa*♯.

Nous proposons ici un algorithme simple permettant de calculer les représentants canoniques de tous les degrés d'une gamme définie par un ensemble de générateurs et un ensemble de commas. L'algorithme consiste à calculer de proche en proche les représentants canoniques des puissances successives  $g, g^2, \dots, g^n$  du générateur  $g$ , en remarquant que si une combinaison de commas

et de leurs inverses permet de réduire  $g^i$ , alors elle permet également d'obtenir pour  $g^{i+1}$  une fraction de hauteur plus petite.

### Description de l'algorithme

Le sous-groupe multiplicatif  $\langle p_1, \dots, p_n \rangle$  de  $\mathbb{Q}^{+*}$  engendré par les  $p_i, i \leq n$ , est isomorphe au groupe additif  $\mathbb{Z}^n$ . Le n-uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  représente la fraction  $p_1^{x_1} \dots p_n^{x_n}$ .

On quotiente  $\langle p_1, \dots, p_n \rangle$  par  $n-1$  commas, de telle sorte que le quotient soit isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . Soient  $g$  et  $u_1, \dots, u_{n-1}$  les n-uplets représentant respectivement le générateur du quotient et les  $n-1$  commas. La hauteur d'une fraction est le maximum du numérateur et du dénominateur. Le problème est de trouver des fractions de plus petite hauteur équivalentes respectivement aux puissances successives du générateur du quotient.

Si  $x$  est un n-uplet, on note  $h(x)$  la hauteur de la fraction correspondant à  $x$ , et  $p(x) = \log(h(x))$ . L'application  $p$  est une norme. On note  $H$  l'hyperplan engendré par les commas  $u_j, j \leq n-1$ , et  $N$  le réseau  $\mathbb{Z}u_1 + \dots + \mathbb{Z}u_{n-1}$  inclus dans  $H$ . Le n-uplet  $k.g$  représente la puissance  $k$ ème du générateur. On cherche un élément de  $k.g + N$  de hauteur minimale. Le logarithme étant croissant, le problème revient à chercher un élément de  $k.g + N$  de norme minimale pour  $p$ .

**Lemme 1.** *Soit  $w$  le vecteur de  $N$  tel que  $k.g + w$  soit de norme minimale pour  $p$ . Alors  $(k+1).g + w$  est de norme inférieure à celle de  $(k+1).g$ .*

*Preuve* — On a  $p(k.g + w) \leq p(k.g)$ . Donc  $p((k+1).g + w) = \frac{k+1}{k}p(k.g + \frac{k}{k+1}w) \leq \frac{k+1}{k}p(k.g) = p((k+1).g)$ , car  $k.g + \frac{k}{k+1}w$  est sur le segment d'extrémités  $k.g$  et  $k.g + w$ , et la fonction  $p$  est une norme, donc une fonction convexe.  $\square$

Pour réduire  $(k+1).g$ , on peut donc commencer par effectuer la même réduction  $w$  que pour  $k.g$ , c'est-à-dire se ramener à la réduction de  $z = (k+1).g + w$ . On cherche alors les éléments  $t$  de  $N$  tels que  $p(z+t) \leq p(z)$ . Cela équivaut par définition à :

$$t \in B_p(-z, r) \cap N$$

où  $B_p(-z, r)$  est la boule de centre  $-z$  et de rayon  $r = p(z)$  pour la norme  $p$ . Le principe de l'algorithme est de recouvrir l'intersection  $B_p(-z, r) \cap N$  par un pavé du réseau  $N$ , et de parcourir un à un les éléments de ce pavé.

**Lemme 2.** *La boule unité  $B_p(1)$  de  $p$  est incluse dans l'hypercube correspondant à la boule unité de la norme*

$$L(x) = \sup_{i \leq n} (|x_i| \log(p_i))$$

On recouvre ensuite cet hypercube par un autre hypercube dont les arêtes sont parallèles aux lignes du réseau  $N$ . Soit  $S$  l'ensemble des sommets de l'hypercube  $B_L(1)$ . Les coordonnées des sommets dans la base canonique de  $\mathbb{Z}^n$  sont de la forme  $\frac{1}{\log(p_i)}$  et  $\frac{-1}{\log(p_i)}$ . On complète la base  $(u_j)_{j \leq n-1}$  de  $H$  pour former une base  $U$  de  $\mathbb{Z}^n$ , et on décompose chaque sommet  $s$  dans la base  $U$  en notant  $s_j$  la composante de  $s$  sur  $u_j$ . On pose :

$$m_j = \sup_{s \in S} (s_j)$$

**Lemme 3.** Soit  $X_j$  la  $j$ -ème coordonnée de  $x$  sur la base  $U$ . La boule unité  $B_L(1)$  est incluse dans la boule unité  $B_M(1)$  de la norme :

$$M(x) = \sup_{j \leq n} \frac{|X_j|}{m_j}$$

Une boule pour la norme  $M$  est un pavé dont les arêtes sont parallèles aux vecteurs de la base  $(u_j)_{j \leq n}$ . Il est facile de réaliser informatiquement un parcours des éléments de ce pavé de coordonnées entières sur les commas. L'algorithme peut finalement se décrire comme suit :

(1) *Formules de changement de base* : les coordonnées des commas  $u_j$  permettent d'obtenir les coordonnées  $x_i$  d'un vecteur  $x$  en fonction de ses coordonnées  $X_j$  dans la base  $U$ . On inverse ces formules, pour calculer l'expression des  $X_j$  en fonction des  $x_i$ .

(2) *Calcul des  $m_j$*  : on parcourt l'ensemble des  $s = (\frac{e_1}{\log(p_1)}, \dots, \frac{e_n}{\log(p_n)})$  où  $|e_i| = 1$ , en calculant à chaque fois les coordonnées  $s_j$  de  $s$  dans la base  $U$ , pour obtenir finalement les valeurs des  $m_j = \sup(s_j)$ .

(3) *Réduction* :

(a) On suppose que la réduction de  $k.g$  est effectuée et soit  $w$  le vecteur de  $N$  obtenu, tel que  $k.g + w$  soit de hauteur minimale. On pose  $z = (k+1).g + w$ .

(b) Soit  $r = p(z)$ . On calcule les dimensions du pavé de l'hyperplan  $H$  de centre  $-z$  et de rayon  $r$  pour la norme  $M$ , en prenant les coordonnées  $z_1, \dots, z_{n-1}$  de  $z$  dans la base  $U$ , puis en calculant pour  $j$  compris entre 1 et  $n-1$  les valeurs  $a_j = -z_j - r.m_j$  et  $b_j = -z_j + r.m_j$ . Le pavé obtenu est  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_{n-1}, b_{n-1}]$ .

(c) On parcourt ce pavé en énumérant tous ses éléments  $t$  de coordonnées entières sur la base  $U$ , et en calculant à chaque fois la hauteur  $h(z+t)$  jusqu'à obtenir la valeur minimale. Le vecteur  $t$  obtenu est tel que  $z+t$  est le représentant canonique de  $(k+1).g$ , c'est-à-dire que  $w+t$  est le nouveau vecteur de réduction.

### Exemples de réduction pour la gamme de Zarlino

Le groupe correspondant à la gamme de Zarlino est  $\langle 2, 3, 5 \rangle$ . Les relations  $2^{19} = 3^{12}$  et  $2^4 \cdot 5 = 3^4$  donnent les deux commas  $u = (19, -12, 0)$  et  $v = (4, -4, 1)$ . On cherche à réduire les puissances du générateur  $g = 2^4/3 \cdot 5$ . Les réductions s'expriment par des couples de coordonnées sur la base  $(u, v)$ .

**Exemple 0.1.** Réduction de  $g^{13}$ .

La réduction précédente donnant le représentant canonique de  $g^{12}$  est  $(-5, 12)$  et la hauteur de la fraction obtenue en appliquant cette réduction à  $g^{13}$  est  $h = 32$ . L'algorithme fournit les bornes suivantes pour le parcours :  $[-1, 0]$  sur l'axe  $u$ , et  $[-2, 5]$  sur l'axe  $v$ . On obtient le tableau ci-dessous où les hauteurs ne sont affichées que si elles sont inférieures à  $h$ .

	-1	0
5	*	*
4	*	*
3	25	*
2	*	*
1	*	*
0	*	32
-1	*	*
-2	*	*

On voit que c'est l'élément  $(-1, 3)$  qui fournit la plus petite hauteur. Cumulé à la réduction précédente, il donne la nouvelle réduction  $(-6, 15)$ . On obtient la fraction réduite suivante :

$$\left(\frac{2^4}{3.5}\right)^{13} \times \left(\frac{2^{19}}{3^{12}}\right)^{-6} \times \left(\frac{2^4.5}{3^4}\right)^{15} = \frac{5^2}{2^2.3}$$

dont la hauteur est  $\max(5^2, 2^2.3) = 25$ .

**Exemple 0.2.** Réduction de  $g^{18}$ 

La réduction précédente donnant le représentant canonique de  $g^{17}$  est  $(-7, 17)$  et la hauteur de la fraction obtenue en appliquant cette réduction à  $g^{18}$  est  $h = 128$ . L'algorithme fournit les bornes suivantes pour le parcours :  $[-2, 0]$  sur l'axe  $u$ , et  $[-4, 7]$  sur l'axe  $v$ . On obtient le tableau ci-dessous où les hauteurs ne sont affichées que si elles sont inférieures à  $h$ .

	-2	-1	0
7	*	*	*
6	*	*	*
5	*	*	*
4	*	*	*
3	*	25	*
2	*	45	*
1	*	*	*
0	*	*	128
-1	*	*	72
-2	*	*	*
-3	*	*	*
-4	*	*	*

On voit que c'est l'élément  $(-1, 3)$  qui fournit la plus petite hauteur. Cumulé à la réduction précédente, il donne la nouvelle réduction  $(-8, 20)$ . On obtient la fraction réduite suivante :

$$\left(\frac{2^4}{3 \cdot 5}\right)^{18} \times \left(\frac{2^{19}}{3^{12}}\right)^{-8} \times \left(\frac{2^4 \cdot 5}{3^4}\right)^{20} = \frac{5^2}{3^2}$$

dont la hauteur est  $\max(5^2, 3^2) = 25$ .

### Bibliographie

- HELLEGOUARCH Y., Scales, *C. R. Soc. Roy. Math. Canada*, vol. IV, **05** (1982), vol. V, **02** (1983).
- HELLEGOUARCH Y., Gammes naturelles, *Publ. APMEP*, **53** (1983).
- HELLEGOUARCH Y., Kreisleriana, IREM de Basse-Normandie (1985).
- HELLEGOUARCH Y., Une esthétique galiléenne : la théorie de la musique de Leonhard Euler, *Sem. Philo. Math.*, ENS Ulm, **50** (1986), repris dans *Destin de l'art, desseins de la science*, ADERHEM, Caen, 1991.
- HELLEGOUARCH Y., À la recherche de l'arithmétique qui se cache dans la musique, *Gazette des mathématiciens*, **33** (1987).

# Solutions périodiques d'équations différentielles

Antoine CHAMBERT-LOIR (Université Paris 6)

---

## Introduction

Dans leur article [1], Busenberg, Fischer et Martelli démontrent plusieurs généralisations du théorème de Yorke [2] : si  $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  est lipschitzienne de constante  $\lambda$ , toute solution périodique non constante de l'équation différentielle  $x'(t) = F(x(t))$  a une période  $\geq 2\pi/\lambda$ . En effet, ils étendent ce résultat à d'autres espaces de Banach que l'espace euclidien ainsi qu'à certains systèmes dynamiques discrets.

Dans le cas d'un espace de Hilbert, ils traitent d'abord un analogue discret et passent ensuite à la limite pour en déduire le théorème de Yorke. En revanche, dans le cas d'un espace de Banach général, ils donnent une preuve directe fondée sur l'inégalité intégrale assez astucieuse que voici : si  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  de période  $T$  de  $\mathbf{R}$  à valeurs dans un espace de Banach  $E$ ,

$$(*) \quad \int_0^T \int_0^T \|f(t) - f(s)\| dt ds \leq \frac{T}{6} \int_0^T \int_0^T \|f'(t) - f'(s)\| dt ds.$$

Cette note n'a pour d'autre but que de remarquer que dans le cas d'un espace de Hilbert, à la fois le théorème de Yorke et son analogue discret sont des cas particuliers d'un énoncé très simple : *la variance est positive*, dont le cadre naturel est la transformation de Fourier des groupes abéliens localement compacts.

## 1. – Transformation de Fourier

Nous commençons par rappeler quelques faits concernant l'analyse de Fourier sur les groupes abéliens localement compacts, prouvés par exemple dans [3].

Soit  $G$  un groupe abélien compact et notons  $\widehat{G}$  son groupe des caractères. C'est un groupe abélien discret dont l'élément unité  $\mathbf{1}$  est la fonction constante égale à 1. Si  $g \in G$  et  $\widehat{g} \in \widehat{G}$ , notons  $\langle g, \widehat{g} \rangle = \widehat{g}(g) \in \mathbf{C}^*$ . Soit  $dg$  une mesure de Haar sur  $G$ . La transformation de Fourier sur  $G$  est définie pour  $f \in L^1(G)$  par la formule

$$\mathcal{F}(f)(\widehat{g}) = \frac{1}{\text{vol}(G)} \int_G f(g) \langle g, \widehat{g} \rangle dg.$$

On a la formule de Parseval selon laquelle si  $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ ,

$$\int_G |f(g)|^2 dg = \text{vol}(G) \sum_{\widehat{g} \in \widehat{G}} |\mathcal{F}(f)(\widehat{g})|^2$$

et qui permet d'étendre la transformation de Fourier par densité en un isomorphisme  $\mathcal{F} : L^2(G) \rightarrow L^2(\widehat{G})$ .

Si  $f$  est à valeurs dans un espace de Hilbert complexe (séparable), tout ceci vaut, à condition de remplacer les valeurs absolues par des normes.

**Lemme 1.** — Soit  $f \in L^2(G; \mathcal{H})$  une fonction de  $G$  à valeurs dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Alors,

$$(1) \quad V(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{G \times G} \|f(g) - f(h)\|^2 \, dg \, dh = 2 \operatorname{vol}(G)^2 \sum_{\substack{\widehat{g} \in \widehat{G} \\ \widehat{g} \neq \mathbf{1}}} \|\mathcal{F}(f)(\widehat{g})\|^2.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \int_{G \times G} \|f(g) - f(h)\|^2 \, dg \, dh &= \int_{G \times G} \left( \|f(g)\|^2 + \|f(h)\|^2 - 2 \langle f(g) | f(h) \rangle \right) \, dg \, dh \\ &= 2 \operatorname{vol}(G) \int_G \|f(g)\|^2 \, dg - \left\| \int_G f(g) \, dg \right\|^2 \\ &= 2 \operatorname{vol}(G)^2 \sum_{\widehat{g} \in \widehat{G}} \|\mathcal{F}(f)(\widehat{g})\|^2 - 2 \operatorname{vol}(G)^2 \|\mathcal{F}(f)(\mathbf{1})\|^2 \\ &= 2 \operatorname{vol}(G)^2 \sum_{\substack{\widehat{g} \in \widehat{G} \\ \widehat{g} \neq \mathbf{1}}} \|\mathcal{F}(f)(\widehat{g})\|^2. \end{aligned}$$

Remarquons que  $V(f)$  n'est autre que  $2 \operatorname{vol}(G)^2$  fois la variance de  $f$ .

## 2. — Équations différentielles

Soit maintenant  $D$  une application linéaire définie sur un sous-espace  $\operatorname{dom}(D) \subset L^2(G; \mathcal{H})$  à valeurs dans  $L^2(G; \mathcal{H})$ . Par exemple, un opérateur « pseudo-différentiel » donné par une formule du type

$$(2) \quad \mathcal{F}(Df)(\widehat{g}) = \mathcal{D}(\widehat{g}) \mathcal{F}(f)(\widehat{g}),$$

où  $\mathcal{D}$  est une fonction  $\widehat{G} \rightarrow \mathbf{C}$ . Du lemme précédent, on déduit immédiatement l'inégalité à la Poincaré suivante.

**Lemme 2.** — Soit  $\kappa \in \mathbf{R}_+$  tel que pour toute  $f \in \operatorname{dom}(D)$  et tout  $\widehat{g} \in \widehat{G} \setminus \{\mathbf{1}\}$ , on ait

$$(3) \quad \|\mathcal{F}(Df)(\widehat{g})\| \geq \kappa \|\mathcal{F}(f)(\widehat{g})\|.$$

Alors, pour toute fonction  $f \in \operatorname{dom}(D)$ , on a  $V(Df) \geq \kappa^2 V(f)$ .

En particulier, si  $D$  est donné par la formule (2), on peut prendre pour  $\kappa$  la borne inférieure de  $|\mathcal{D}(\widehat{g})|$  pour  $\widehat{g}$  décrivant l'ensemble des caractères non triviaux de  $G$ .

Soit maintenant  $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  une fonction continue. On suppose qu'elle satisfait la condition de Lipschitz pour la constante  $\lambda$ , c'est-à-dire que pour tous  $v_1$  et  $v_2 \in \mathcal{H}$ ,

$$(4) \quad \|F(v_1) - F(v_2)\| \leq \lambda \|v_1 - v_2\|.$$

Le problème est de déterminer les fonctions  $f \in \operatorname{dom}(D)$  telles que

$$(5) \quad Df(g) = F(f(g)), \quad g \in G.$$

**Théorème 3.** — *Si l'équation (5) a une solution non constante (p.p.)  $f \in \text{dom}(G)$ , alors  $\kappa \leq \lambda$ .*

En effet, on déduit du lemme 2 l'inégalité

$$(6) \quad V(Df) \geq \kappa^2 V(f).$$

tandis que d'après la définition de  $V(f)$ , on a

$$(7) \quad \begin{aligned} V(Df) &= \int_{G \times G} \|(Df)(g) - (Df)(h)\|^2 \, dg \, dh \\ &= \int_{G \times G} \|F(f(g)) - F(f(h))\|^2 \, dg \, dh \\ &\leq \lambda^2 \int_{G \times G} \|f(g) - f(h)\|^2 \, dg \, dh \\ &\leq \lambda^2 V(f). \end{aligned}$$

Si  $f$  n'est pas constante,  $V(f) \neq 0$ , d'où l'inégalité voulue.

### 3. — Applications

#### a) *Le théorème de Yorke*

Appliqué à la situation suivante, le théorème 3 implique le théorème de Yorke rappelé dans l'introduction.

- $G$  est le cercle  $\mathbf{R}/T\mathbf{Z}$ , si bien qu'une fonction sur  $G$  s'identifie à une fonction  $T$ -périodiques sur  $\mathbf{R}$ ;
- la mesure de Haar sur  $G$  est la mesure induite par la mesure de Lebesgue. En particulier,  $\text{vol}(G) = T$ ;
- le groupe  $\widehat{G}$  s'identifie à  $\mathbf{Z}$ , l'accouplement canonique est donné par  $\langle t, n \rangle = \exp(2i\pi nt/T)$ ;
- l'opérateur  $D$  est la dérivation, donnée « en Fourier » par  $\mathcal{D}(n) = 2i\pi n/T$ . On peut donc choisir  $\kappa = 2\pi/T$ .

#### b) *Systèmes discrets*

L'analogue discret du théorème de Yorke a été démontré par Busenberg, Fischer and Martelli [1] : *Soit  $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  une fonction  $\lambda$ -lipschitzienne sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Soit  $h$  un entier et supposons qu'il existe une suite non constante  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  telle que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,*

$$(8) \quad x_{n+1} = x_n + F(x_n), \quad x_{n+h} = x_n.$$

Alors,  $2 \sin(\pi/h) \leq \lambda$ . Il suffit en effet d'appliquer le théorème 3 aux données suivantes :

- $G = \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$ , la mesure de Haar est la mesure de comptage, donc  $\text{vol}(G) = h$ ;
- le groupe des caractères de  $G$  est  $\mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$ , l'accouplement entre  $G$  et  $\widehat{G}$  est donné par  $\langle n, \nu \rangle = \exp(2i\pi n\nu/h)$ ;

– l'opérateur  $D$  est donné par  $D((x_n)) = (x_{n+1} - x_n)$ . il est de type « pseudo-différentiel », avec  $\mathcal{D}(\nu) = \exp(2i\pi\nu/h) - 1$ . On peut donc prendre  $\kappa = 2 \sin(\pi/h)$ .

**c) *Autres exemples***

Mais on peut bien sûr déduire du théorème 3 des résultats de *non-existence* d'équations différentielles bien plus généraux. Par exemple, soit  $P \in \mathbf{C}[x]$  et supposons que l'équation différentielle  $P(d/dt)f = 0$  n'a pas de solution  $T$ -périodique non constante (autrement dit, pour tout  $n \in \mathbf{Z}^*$ ,  $P(2i\pi n/T) \neq 0$ ). Posons

$$\varepsilon_0 = \min_{n \in \mathbf{Z}^*} |P(2i\pi n/T)|.$$

Soit alors une fonction  $\lambda$ -lipschitzienne  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ . Il résulte du théorème 3 que si  $\lambda|\varepsilon| < \varepsilon_0$ , l'équation différentielle

$$P(d/dt)(f) = \varepsilon F(f)$$

n'a pas de solution  $T$ -périodique non constante.

**d) *Remarque incontrôlable***

On peut aussi interpréter ce résultat comme un énoncé de non-contrôlabilité : considérons un système physique qui obéit, en l'absence de forces extérieures, à l'équation différentielle  $Df = 0$  et qui n'est pas naturellement  $T$ -périodique. Pour obtenir une évolution  $T$ -périodique du système, on peut imaginer un mécanisme de contrôle que nous interprétons comme un second membre  $F(f)$  à l'équation différentielle. Pour que ce soit possible, la fonction de contrôle  $F$  doit d'après le théorème 3 avoir une « grande » constante de Lipschitz, autrement dit notre mécanisme de contrôle doit être sensible aux petites perturbations.

## Références

- [1] S. BUSENBERG, D. FISCHER AND M. MARTELLI, *Minimal periods of discrete and smooth orbits*, Amer. Math. Monthly **96** (1989), p. 5–17
- [2] J. YORKE, *Periods of periodic solutions and the Lipschitz constants*, Proc. Amer. Math. Soc. **22** (1969), p. 509–512
- [3] A. WEIL, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, 1941