LIVRES

Introduction to H^p spaces, seconde édition
P. Koosis
Cambridge Tracts in mathematics 115, 1998

Cet ouvrage, écrit dans un style vivant, aussi clair qu'agréable, présente les bases de la théorie des espaces de Hardy de fonctions analytiques sur le disque, ainsi que de nombreuses interactions de cette théorie avec des domaines connexes. Les phénomènes de compensation qui jouent un rôle crucial dans l'étude des intégrales singulières (thème central de l'ouvrage) sont très soigneusement analysés et décrits. Les outils les plus classiques (factorisation, fonctions intérieures et extérieures, théorème de Beurling, transformation conforme et comportement au bord) sont présentés en détail et agrémentés de figures qui facilitent grandement la tâche du lecteur. Les propriétés de bornitude de la transformée de Hilbert et l'usage de la « fonction maximale » de Hardy et Littlewood ouvrent la voie vers la dualité entre l'espace H^1 et l'espace BMO des fonctions à oscillation moyenne bornée, établie par C. Fefferman et aujourd'hui classique, et vers la décomposition atomique de l'espace H^1. D'autres théorèmes importants sont démontrés : suites interpolantes de Carleson, caractérisation des mesures de Helson-Szego, théorème de la couronne. Enfin, une dizaine de problèmes (assez délicats) sont proposés au lecteur.

Les analystes auront plaisir à parcourir ce livre, et à l'utiliser comme ouvrage de référence sur les questions classiques, et délicates, liées aux estimations intégrales fines en théorie des fonctions anlytiques. Ceux d'entre eux qui se proposent de faire progresser la recherche dans cette direction y trouveront « ce qu'il faut savoir" avant de se lancer. Par exemple, le problème de la couronne, ouvert en plusieurs variables, est ici montré en detail dans le cas d'une variable. Mentionnons cependant que ce livre est la deuxième édition d'un ouvrage publié en 1980. L'auteur a naturellement procédé à diverses modifications, bien décrites dans la préface, destinées à améliorer la première édition. Mais il faut signaler que certains progrès récents et importants ne sont pas mentionnés dans la bibliographie. Citons par exemple les travaux de J. Bourgain et G. Pisier qui utilisent l'espace quotient L^1/H^1 en géométrie des espaces de Banach (voir [3]), les resultats de N. G. Makarov sur les mesures harmoniques et le comportement au bord des applications conformes ([2]), les travaux de N. J. Kalton sur les liens inattendus entre la distribution des fonctions de H^1 et l'interpolation entre espaces de Banach (commencés dans [1]), ou encore la theorie à présent très en vogue des « ondelettes". L'omission de ces résultats de pointe ne peut pas être reprochée à l'auteur, dont l'objectif etait de faire connaître et apprécier les resultats centraux de la théorie des espaces de Hardy, et qui a certainement atteint son but.

[1] N. J. Kalton : Non linear commutators in interpolation theory, Memoirs of the A.M.S. 385 (1988).

[2] N. G. Makarov : On the distrosion of boundary sets under conformal mappings, Proc. London Math. Soc. (3) 51 (1985) 2, 369-384.

[3] G. Pisier : Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces, C. B. M. S. regional conference series, vol. 60 (1986).

G. Godefroy, CNRS, Université de Paris 6

Continuaous Martingales and brownian motion (3e ed)
D. Revuz et M. Yor
Springer grundlehren der math. Wissenschaften 293, 1999

Daniel Revuz et Marc Yor sont deux probabilistes parisiens, mais *le* Revuz-Yor (nom commun, avec article) est un objet qui appartient au patrimoine mondial des probabilistes depuis 1991. La troisième édition vient de paraître ; je gage qu'il y en aura d'autres.

L'architecture de l'édifice est très classique : quatre composantes (le texte proprement dit, les exercices, les notes et commentaires qui closent chaque chapitre, et la bibliographie), auxquelles s'ajoutent trois index ; l'ensemble est à la fois très riche et extrêmement accueillant, et tout a manifestement été préparé pour vous y faire sentir très vite à l'aise, que vous soyez un visiteur occasionnel ou un habitué, un étudiant de troisième cycle ou un chercheur confirmé, un probabiliste ou un utilisateur de la théorie. Une bonne partie de l'immense érudition des auteurs est immédiatement à votre disposition ; il vous sera seulement demandé un minimum de culture probabiliste, le bagage d'une école d'ingénieurs ou d'un second cycle universitaire.

Les chapitres I à V, VII et les deux premières sections du chapitre IX sont la plateforme sur laquelle s'appuie toute la théorie des processus stochastiques continus ; ils constituent un élément indispensable de la formation à ce domaine, et un matériau analogue se retrouve dans les ouvrages voisins (*Brownian Motion and Martingales in Analysis,* par R. Durrett, *Diffusions, Markov Processes and Martingales : Itô Calculus,* par L. Rogers et D. Williams, *Brownian Motion and Stochastic Calculus,* par I. Karatzas et S. Shreve, ...). Le reste de l'ouvrage introduit des théories souvent utiles et des thèmes complémentaires (temps local, changement de probabilité, excursions, fonctionnelles additives, processus de Bessel, théorèmes limite). Le parti pris des auteurs de se restreindre au cadre des semimartingales continues (avec une petite exception pour les martingales de densités de changement de loi) s'explique probablement par le souci de maintenir une taille raisonnable.

Qu'est-ce qui fait de ce livre un instrument dont on ne peut bientôt plus se passer ? Le soin avec lequel chaque démonstration est choisie (d'autres pouvant faire l'objet d'exercices) puis ciselée ? La précision limpide des énoncés et la fluidité du raisonnement ? Les notes et commentaires, qui ne se contentent pas de compléments bibliographiques, mais esquissent aussi le paysage de la recherche, par des survols de questions ouvertes, abondamment documentés et actualisés à chaque édition ? Ou bien les exercices, compléments précieux et parfois véritables problèmes ? (Les notes renvoient à la bibliographie pour ceux d'entre eux qui sont plus qu'une simple application du texte ; certains portent des titres qui contribuent à faciliter la navigation dans l'ouvrage.) Ou encore la gigantesque bibliographie de quelque 720 entrées, constamment remise à jour (elle a grossi de moitié depuis la première édition), et qui justifierait à elle seule la parution, et les rééditions, de l'ouvrage ?

Chacun a sa réponse. Pour moi, c'est le sentiment que cette œuvre a une âme, l'impression de participer à l'intimité entre les auteurs et le mouvement brownien, et de ressentir un peu de leur enthousiasme.

M. Emery, CNRS, Strasbourg

Representations and cohomology I : Basic representation theory of finite groups and associative algebras, II : Cohomology of groups and modules
D.J. Benson
Cambridge studies in adv. math., 1998

Il s'agit d'une réédition. Les deux volumes sont consacrés à la théorie des représentations, à la théorie de la cohomologie et à leurs interactions. La quantité de matière présentée en un peu plus de 500 pages est impressionnante et traitée de manière très élégante.

Le premier volume se compose de six chapitres. Les trois premiers sont de nature introductive. Après une courte introduction aux anneaux et aux modules, l'auteur introduit l'homologie et la cohomologie (dont la composition de Yoneda), prouve le théorème de Künneth, définit et étudie Ext et Tor pour les complexes de chaînes ainsi que l'hyper(co)homologie. Le chapitre suivant développe l'étude des modules pour les algèbres de groupes, en particulier la théorie classique modulaire. Il considère le produit tensoriel et le cup-produit pour les algèbres de Hopf cocommutatives (le critère de Benson et Carlson est démontré pour les algèbres de Hopf qui possèdent un antipode). Du côté cohomologie, il étudie l'induction (incluant l'induction tensorielle), la restriction et le transfert, ainsi que la cohomologie relative. Il donne une preuve élégante du théorème de relèvement de Green et Maranda. Du côté représentations, il décrit la correspondance de Green et certains résultats de la théorie de Clifford. Le chapitre se clôt sur la description de Jenning et Quillen de l'algèbre de Lie p-restreinte associée à un p-groupe.

Le quatrième chapitre, point culminant du premier volume, fournit une introduction détaillée à la théorie de Auslander-Reiten des algèbres de dimension finie. Il s'ouvre sur une étude des algèbres héréditaires, des algèbres de chemins des carquois et des carquois des algèbres : si C est un *carquois* (*i.e.,* un graphe orienté) et k un corps commutatif, on définit l'*algèbre des chemins* kC de C comme l'algèbre sur k, dont le k-espace vectoriel sous-jacent possède une base constituée des *chemins* $\bullet \to \bullet \to \cdots \to \bullet$ dans C, et dont la multiplication est définie sur les éléments de la base par la composition des chemins dans l'ordre inverse si les chemins sont composables de cette manière et zéro sinon. Par exemple, à tout sommet x de C correspond un chemin de longueur nulle qui fournit un idempotent e_x. Une algèbre libre est une algèbre de chemins pour le carquois constitué d'un unique sommet. L'algèbre kC est de type fini si et seulement si C a un nombre fini de sommets et d'arêtes, et est de dimension finie si de plus il n'y a pas de cycle orienté. Une *représentation* d'un carquois C associe à tout sommet x de C un espace vectoriel V_x et à toute arête $\overset{x}{\bullet}\!\to\!\overset{y}{\bullet}$ une application linéaire $V_x \to V_y$ entre les espaces vectoriels correspondants. Les représentations de C sont naturellement en bijection avec les kC-modules. Une représentation de C étant fixée, on forme le kC-module d'espace vectoriel sous-jacent $V := \bigoplus_x V_x$ et d'action d'un élément de base $\overset{x_1}{\bullet} \to \cdots \to \overset{x_2}{\bullet}$ sur V donnée par la composition des applications

$$V \to V_{x_1} \to \cdots \to V_{x_2} \hookrightarrow V.$$

Ainsi, par exemple, l'action de l'idempotent e_x est donnée par la projection sur V_x. Réciproquement, étant donné un kC-module V, on définit une représentation de C en posant $V_x := e_x V$. Si c est un élément de base de kC correspondant à une arête $\overset{x}{\bullet}\!\to\!\overset{y}{\bullet}$ on a $e_y c = c = c e_x$, et c envoie V_x sur V_y. L'algèbre des chemins d'un carquois possédant un nombre fini de sommets est héréditaire. Le chapitre comprend aussi l'énoncé de la trichotomie des types (fini, modéré et sauvage) des représentations d'algèbres. L'auteur étudie les types de représentations des carquois et des algèbres, dont le théorème de Gabriel. On introduit les catégories de foncteurs ainsi que l'algèbre de Auslander. L'auteur présente la méthode des filtrations fonctorielles, qui est ensuite appliquée à la construction des modules indécomposables des groupes diédraux. On en vient alors aux suites d'Auslander-Reiten (pour les algèbres de dimension finie), aux morphismes irréductibles et à la preuve par Auslander du théorème de Rojter. La section suivante porte sur les diagrammes de Dynkin et euclidiens, les transformations de Coxeter, les groupes de Weyl, l'algèbre d'Auslander et les suites presque scindées, avec comme conséquences les résultats de Riedtmann et de Webb sur la structure des carquois d'Auslander-Reiten.

Le cinquième chapitre étudie les anneaux de représentations et les anneaux de Burnside, il comprend en particulier les congruences de Dress pour l'anneau de Burnside, la preuve de Tom Dieck de la caractérisation de Dress des groupes résolubles en termes d'idempotents dans l'anneau de Burnside. On y trouve aussi le résultat de Benson et Parker qui dit que la forme complexe de l'anneau de représentation d'un groupe est somme directe de l'image de l'induction et du noyau de la restriction, les théorèmes classiques d'induction d'Artin, Brauer, Colon et Dress de l'anneau de représentation d'un groupe et la description, due à Benson et Carlson et généralisant des résultats de Green et de O'Reilly, d'un assez grand quotient de celui-ci ne contenant aucun élément nilpotent non nul.

Le dernier chapitre du premier volume porte sur la théorie classique des blocs : il comprend les trois principaux théorèmes de Brauer (sous leur forme générale), la théorie de Clifford des blocs, la description, due à Brauer, Thompson, Green et Dade, des blocs à groupe de défaut cyclique (ainsi que la description de leur carquois d'Auslander-Reiten). La dernière partie fournit une esquisse de la description d'Erdman des blocs dont le groupe de défaut est un groupe de Klein.

Le premier chapitre du second volume passe rapidement en revue les points suivants : groupes d'homotopie, espaces de lacets, CW complexes, homologie cellulaire, fibrés, ensembles simpliciaux (dont la suite exacte de Milnor des inclusions d'ensemble simpliciaux). Dans le deuxième chapitre, l'homologie (et la cohomologie) des groupes topologiques est introduite via l'espace $K(G,1)$ d'Eilenberg et Mac Lane du groupe topologique G, qui est un

CW complexe de groupe fondamental G lui-même et dont les groupes d'homotopies de degrés supérieurs sont triviaux. Ce chapitre traite de la classification des G-fibrés principaux à bases paracompactes (il contient la construction de Milnor d'un G-fibré principal universel), développe la K-théorie des espaces compacts et introduit la théorie de la cohomologie généralisée, avec, en particulier, la définition des opérations d'Adams et leur application au calcul par Quillen de l'anneau de cohomologie des groupes généraux linéaires sur les corps finis, les énoncés (avec des références précises pour les démonstrations) du théorème de périodicité de Bott et du théorème de complétude d'Atiyah reliant l'anneau de Grothendieck des représentations complexes de dimension finie de G à la K-théorie de l'espace classifiant. Les classes de Chern et de Stiefel-Whitney sont introduites ainsi que le transfert d'un groupe topologique H à un groupe topologique G, considéré comme une application stable de la base du G-fibré principal universel de Milnor de H sur celle du G-fibré principal universel de Milnor de G, et la conjecture de Segal (prouvée par Carlson en 1984) qui dit essentiellement que les applications stables entre les espaces classifiants sont engendrés par les transferts et les homomorphismes de groupes.

Les suites spectrales sont l'objet du troisième chapitre : elles sont introduites via le calcul de la cohomologie des CW complexes filtrés et d'une fibration de Serre des CW complexes, puis sont étudiées en particulier la suite spectrale d'un couple exact, celle d'un complexe double, la suite spectrale de Lyndon, Hochschild et Serre d'une extension de groupes, la suite spectrale de Künneth, la suite spectrale d'Eilenberg et Moore associée à un diagramme de relèvements de fibrations de CW complexes et la suite spectrale d'Atiyah.

Le quatrième chapitre comprend la preuve due à Evens que, pour tout AG-module M de type fini sur un anneau noethérien A, le $H^*(G,A)$-module $H^*(G,M)$ est de type fini, les propriétés multiplicatives de la suite spectrale d'un couple exact obtenue à partir de l'homomorphisme de Bockstein, lesquelles relient cohomologies intégrale et modulaire, la démonstration d'un théorème de Serre sur l'annulation de certains produits d'opérateurs de Bockstein et la description des principales propriétés des opérations de Steenrod.

Le cinquième chapitre porte sur les variétés de modules. Il y est en particulier montré qu'un élément de $\mathrm{Ext}^*_{kG}(M,M)$, où k est un corps de caractéristique p, est nilpotent si et seulement si sa restriction à tout p-sous-groupe abélien élémentaire est nilpotente (résultat dû à Quillen lorsque $M=k$ et à Carlson dans le cas général). La preuve est utilisée pour démontrer le théorème de Chouinard selon lequel un kG-module M est projectif si et seulement si sa restriction à tout p-sous-groupe abélien élémentaire est projective. On présente deux démonstrations (l'une utilisant des variétés, l'autre de l'hypercohomologie), d'une généralisation, due à Benson et Carlson, du théorème d'Eisenbud (un module indécomposable de complexité un est soit projectif soit périodique) aux modules de complexité arbitraire : un module de complexité c possède une résolution périodique à c-feuillets qui s'exprime comme un produit tensoriel de complexes périodiques. Les sections suivantes traitent du théorème de Benson, Carlson et Robinson (étant donné un groupe fini G, il existe un entier naturel n, qui dépend de G, tel que, pour tout anneau commutatif A et tout AG-module M la cohomologie de Tate de M est nulle dès qu'elle s'annule en n degrés consécutifs).

Le sixième chapitre concerne les complexes G-simpliciaux (*i.e.,* les complexes simpliciaux munis d'une action d'un groupe fini G tels que l'image d'un simplexe sous l'action d'unélément de G soit encore un simplexe, et tels que si un élément de G stabilise un simplexe, il le stabilise point par point), et plus particulièrement le complexe $\mathcal{S}_p(G)$ des p-sous-groupes non triviaux de G, le complexe $\mathcal{A}_p(G)$ des p-sous-groupes abéliens élémentaires non triviaux de G et celui $\mathcal{B}_p(G)$ des p-sous-groupes P de G tels que $P = \mathrm{O}_p\left(\mathrm{Norm}_G(P)\right)$ (le plus grand p-sous-groupe distingué de $\mathrm{Norm}_G(P)$). On y démontre que les inclusions $\mathcal{A}_p(G) \hookrightarrow \mathcal{S}_p(G)$ et $\mathcal{B}_p(G) \hookrightarrow \mathcal{S}_p(G)$ sont toutes deux des équivalences G-homotopiques (résultats dûs respectivement à Quillen et Thévenaz, et à Bouc et Thévenaz) et que la caractéristique d'Euler de $\mathcal{S}_p(G)$ est congrue à un modulo la p-partie $|G|_p$ du cardinal de G (résultat dû à Brown). On y introduit le module de Steinberg généralisé à l'aide du module de Lefschetz réduit (*i.e.,* la somme alternée des groupes de chaînes) d'un complexe G-simplicial et l'on montre que c'est un module virtuel projectif (résultat dû à Quillen et Webb) qui, lorsque G est un groupe de Chevalley en caractéristique p, coïncide au signe près avec le module de Steinberg défini de manière classique via l'immeuble de Tits. La conjecture d'Alperin (les modules simples sont en nombre égal aux correspondants de Green simples), et sa reformulation due à Robinson et Webb en termes de l'invariant de Lefschetz de $\mathcal{S}_p(G)$, closent le chapitre.

Le septième et dernier chapitre est consacré à la théorie de Ronan et Smith des faisceaux sur les G-complexes simpliciaux. Il contient en particulier l'énoncé du théorème de Smith sur les modules simples des groupes de Chevalley en caractéristique p.

Chaque partie contient des exercices qui vont plus loin dans la théorie et sont en général faciles. Un très grand nombre de commentaires et de remarques font le lien entre les divers sujets, expliquent et résument les résultats et rappellent le développement historique. Les preuves sont élégantes et très souvent nouvelles.

A.-M. Aubert, ENS, Paris

Moduli of Curves
J. Harris et I. Morrison
Springer GTM 187, 1998

Ce livre présente quelques aspects de la théorie des modules des courbes algébriques *complexes* (bien que le cas de la caractéristique non nulle soit parfois évoqué).

Le lecteur familier avec les ouvrages du premier auteur retrouvera ici son style agréable et facile, et son approche très pédagogique, construite sur de nombreux exemples, des différents concepts et résultats. L'esprit diffère sensiblement de celui du livre « Geometry of Algebraic Curves, vol. I » de E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths and J. Harris (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 267, Springer-Verlag, 1985) ; ce présent texte devait à l'origine être incorporé dans la deuxième partie de cet ouvrage, annoncée depuis la publication de la première, mais les différences de styles et de points de vue étaient telles que ce projet a été abandonné. Plutôt que de chercher à écrire un traité exhaustif, les auteurs ont préféré choisir et développer des points particuliers, ce qui leur permet d'une part de se diversifier davantage, d'autre part de pousser beaucoup plus loin certains développements jusqu'à aborder des problèmes très récents. On trouvera aussi de nombreux commentaires et références sur l'état actuel d'avancement des connaissances.

La plupart des démonstrations ne sont pas reproduites dans tous leurs détails, l'idée étant plutôt de donner envie au lecteur d'en savoir plus en se reportant soit à des ouvrages de référence existants, soit à des articles publiés. Comme l'annoncent clairement les auteurs dans l'introduction, « our preference has been to focus on examples and applications rather than on foundations ».

Si ce style a ses adeptes, il a aussi ses détracteurs. Il est vrai que l'abondance d'explications, de commentaires et d'interprétations nuit parfois à la clarté de l'exposition. Je trouve aussi très regrettable cette mode récente de transformer en exercices les points délicats ou fastidieux des démonstrations. Comme dans tous les livres, il y a des fautes, mais sans que cela devienne un problème (j'ai relevé plus bas quelques exemples).

En conclusion, ce n'est pas un livre que le spécialiste à la recherche d'une référence trouvera très pratique ni très complet. En revanche, le lecteur s'initiant au domaine sera surement passionné tant l'enthousiasme des auteurs est communicatif ; ce livre est plus un roman qu'un dictionnaire, et je l'ai lu avec plaisir.

Je vais maintenant passer rapidement en revue ce qu'on peut (et ce qu'on ne peut pas) trouver dans ce livre.

Le premier chapitre s'intitule « Parameter spaces : constructions and examples ». Après quelques pages de discussions sur la représentation des foncteurs, les espaces de modules fins et grossiers et leurs différences, illustrées par des exemples, la construction de Grothendieck des schémas de Hilbert est expliquée dans ses grandes lignes, et son espace tangent de Zariski est déterminé par un calcul explicite qui met bien en valeur l'importance de la platitude. L'exemple du schéma de Hilbert qui contient les cubiques rationnelles de $\mathbb{P}^3$ est traité en détail (en partie sous forme d'exercices), ainsi que les diverses pathologies que l'on rencontre. Quelques problèmes ouverts sont mentionnés, comme celui de caractériser les courbes rigides dans $\mathbb{P}^3$, ou de minorer la dimension des composantes du schéma de Hilbert des courbes. Un autre calcul d'espace tangent est donné pour la variété de Severi $V_{d,g}$ des courbes planes de degré d et genre g fixés.

Le second chapitre s'intitule « Basic facts about moduli spaces of curves », et passe en revue les diverses constructions de cet espace, ainsi que ses propriétés géométriques, topologiques et cohomologiques. Il est de nature essentiellement expositoire et aucune démonstration n'est donnée (certaines seront données plus tard). On commence de nouveau par des exemples explicites en genre ≤ 3 qui expliquent pourquoi il n'y a pas d'espace de modules fin, et comment on peut y remédier en ajoutant des points marqués ou des structures de niveau. Trois constructions de $\mathcal{M}_g$ sont expliquées (de façon brève et informelle, le but étant surtout de donner des références) : comme quotient de l'espace de Teichmüller, à partir de celle de l'espace de modules des variétés abéliennes principalement polarisées, et comme quotient en Théorie Géométrique des Invariants (c'est la construction qui sera expliquée en détail au chapitre quatre). Les sujets suivants sont abordés : dimension des sous-variétés complètes de $\mathcal{M}_g$ (théorème de Diaz), travaux de Harer sur la stabilité de la cohomologie de $\mathcal{M}_g$ et son calcul en petits degrés, conjecture de Faber sur la structure du sous-anneau de l'anneau de Chow $A^\bullet(\mathcal{M}_g)$ engendré par les classes « tautologiques » κ_i, problèmes analogues pour la courbe universelle et les schémas de Hilbert. Le chapitre se termine par une présentation des formules de Witten-Kontsevich sur les nombres d'intersections des classes canoniques de $A^1(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ et par une discussion rapide (quatre pages) des espaces de modules d'applications stables, des invariants de Gromov-Witten et de la cohomologie quantique.

Le chapitre trois, « Techniques », commence par une étude des propriétés élémentaires des courbes stables (parfois, mais pas de façon systématique, appelées ici « moduli stable », ce que je trouve troublant) : faisceau dualisant, théorème de Riemann-Roch, automorphismes. Les arguments suggérés sont de nature élémentaire, mais les démonstrations sont laissées en exercice. Suit une discussion tout aussi élémentaire de différents problèmes de déformation au premier ordre, où quelques exemples sont traités explicitement et certains très complètement (comme celui des déformations d'un morphisme $C \to \mathbb{P}^2$ avec conditions de tangence le long d'une droite, qui sera utilisé dans la suite pour la démonstration de l'irréductibilité des variétés de Severi $V_{d,g}$). On passe ensuite aux réductions stable et semi-stable, illustrées par quinze pages d'exemples simples mais instructifs, et dont la démonstration de l'existence n'est qu'esquissée. Dans un « interlude », les auteurs définissent de façon très détaillée et terre-à-terre (ce n'est pas un reproche) le « groupe des classes de diviseurs rationelles sur le champ » (il est dommage ici que la notation fluctue entre $\mathrm{Pic}_{\mathrm{fun}}(\overline{\mathcal{M}}_g) \otimes \mathbb{Q}$ et $\mathrm{Pic}_{\mathrm{fun}}(\overline{\mathcal{M}}_g)$), en évitant toute référence aux champs algébriques (ce qu'on pourra regretter). Comme il est de règle dans cet ouvrage, on étudie ce groupe (et ses liens avec $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_g) \otimes \mathbb{Q}$) beaucoup plus sur des exemples que par la théorie abstraite. On passe ensuite au théorème de Grothendieck-Riemann-Roch, avec comme application l'expression des classes de Chern du fibré de Hodge en fonctions des classes tautologiques κ_i sur $\mathcal{M}_g$ puis sur $\overline{\mathcal{M}}_g$, et à la formule de Porteous, avec comme application le calcul de la classe du lieu hyperelliptique dans $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_3) \otimes \mathbb{Q}$. Le chapitre se termine en expliquant par des exemples (pas de démonstration) comment la notion de « revêtement admissible » permet de compactifier le schéma de Hurwitz $\mathcal{H}_{d,g}$ des courbes de genre g munies d'un revêtement de degré d de $\mathbb{P}^1$.

Le chapitre quatre est consacré à la construction de $\overline{\mathcal{M}}_g$ par la Théorie Géométrique des Invariants. Fidèles à leur philosophie, les auteurs limitent leur ambition à un survol rapide de la théorie, que je trouve cependant trop approximatif. Il est presque indispensable d'avoir sous la main le livre [GIT] (« Geometric Invariant Theory », de J. Fogarty, F. Kirwan et D. Mumford, 3e éd., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2), 34, Springer-Verlag, 1994) pour vérifier les énoncés. On parle par exemple de valeurs de polynômes homogènes en des points de l'espace projectif (p. 197) ; dans la démonstration du critère de Hilbert-Nagata, un point essentiel est escamoté (le fait que l'opérateur de Reynolds préserve tout idéal stable) ; un des points essentiels de la construction, la surjectivité de l'application quotient (ou, de façon équivalente, le fait que l'image d'un fermé invariant est fermée, c'est-à-dire la propriété de « quotient géométrique », dans la terminologie de [GIT]), a été oublié ; l'introduction au critère de Hilbert-Mumford est fausse (au bas de la page 200, « x non stable » est équivalent à « $\mu_\lambda(x) \geq 0$ ou $\mu_{-\lambda}(x) \geq 0$ », pas à la première de ces inégalités seulement).

On passe ensuite à la construction de Gieseker de $\overline{\mathcal{M}}_g$ (cet argument apparaît déjà dans le livre de Mumford, « Stability of projective varieties », l'Ens. Math. **23** (1977), 39–110). Pour une courbe *lisse,* il n'y a pas de problème : le point du schéma de Hilbert correspondant au plongement 5-canonique est stable pour l'action du groupe spécial linéaire. Pour les courbes singulières, on ne sait montrer que les implications suivantes : C courbe stable $\Rightarrow$ $[C]$ semi-stable $\Rightarrow$ C courbe « potentiellement stable », notion *ad hoc* intermédiaire entre stabilité et semi-stabilité. On a besoin pour conclure un argument de dégénérescence. Les démonstrations sont presque complètes, mais je ne trouve pas le cheminement des idées particulièrement clairement présenté (je pense par exemple à l'avant-dernier paragraphe de la page 220). Le chapitre se termine par quelques pages sur les progrès accomplis depuis ces travaux de Gieseker, principalement en ce qui concerne les variétés de dimension supérieure (travaux de Karu, Kollár, Viehweg).

Le chapitre cinq est consacré aux systèmes linéaires limites et à leur application aux problèmes de Brill-Noether (l'existence d'un g^r_d est équivalente à $\rho = g-(r+1)(g-d+r) \geq 0$) et Gieseker-Petri (lissité de G^r_d) pour une courbe générale. L'idée est de déduire des propriétés des systèmes linéaires sur une courbe lisse en étudiant leur limite sur une courbe singulière simple dont la jacobienne est compacte. Cette théorie, dont le principe est élémentaire, se prête bien au style du livre et à sa philosophie d'apprendre par l'exemple, et c'est à ma connaissance la première fois qu'elle apparaît dans un livre.

On trouve dans le sixième et dernier chapitre, « Geometry of moduli spaces : selected results », de nombreux exemples d'application des techniques présentées dans les chapitres précédents ; il est aussi très riche en problèmes ouverts. Les démonstrations sont rarement complètes, mais suffisament détaillées pour satisfaire la curiosité du lecteur. On trouve ainsi des (esquisses de) démonstrations de résultats déjà mentionés (irréductibilité de $\mathcal{M}_g$, théorème de Diaz, irréductibilité des variétés de Severi $V_{d,g}$), une étude détaillée du groupe de Picard du lieu hyperelliptique dans $\overline{\mathcal{M}}_g$, une discussion des diviseurs amples sur $\overline{\mathcal{M}}_g$ et le calcul des classes des lieux de Brill-Noether qui sont des diviseurs ($\rho = -1$), qui entraîne que $\overline{\mathcal{M}}_g$ est de type général pour $g \geq 24$. On termine par quelques spéculations passionnantes sur des applications arithmétiques de ce résultat : si on croit à la conjecture de Lang, presque toutes les courbes de genre $g \geq 24$ définies sur $\mathbb{Q}$ devraient correspondre à des points de $\overline{\mathcal{M}}_g$ contenus dans une sous-variété propre ; il est suggéré que cette sous-variété pourrait être contenue dans un lieu de Brill-Noether (avec $\rho < 0$) : après tout, on ne connaît aucune courbe définie sur $\mathbb{Q}$ qui vérifie l'équivalence du théorème de Brill-Noether !

O. Debarre, Université Louis Pasteur, Strasbourg

Dynamical Systems and Semisimple Groups, an introduction
Renato Feres
Cambridge Tracts in math, 126, Cambridge University Press, 1998

Comme son titre l'indique clairement, le livre [1] de Renato Feres se veut une introduction aux systèmes dynamiques, et plus précisemment à l'étude des actions sur les variétés de groupes tels que $SL(n,\mathbb{Z})$ ou $SL(n,\mathbb{R})$, pour $n \geqslant 3$.

Le programme de recherche dans lequel se place cet ouvrage, souvent appelé programme de Zimmer, est de comprendre ces actions, en particulier lorsqu'elles préservent des structures géométriques. On s'attend à ce que ces actions soient plus rigides, plus rares et plus classifiables que les actions de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ en raison de la structure si particulière de ces « gros » groupes. Un outil fondamental est alors la superrigidité de Margulis-Zimmer qui permet de comprendre les actions mesurables de ces groupes sur les fibrés principaux.

L'un des buts affichés du livre de R. Feres est de donner une preuve de ce résultat remarquable, ainsi qu'une extension dans le cadre continu ou lisse.

Cependant, comme nous allons le voir, il ne faut pas limiter cet ouvrage à ce seul but : il contient toute une série de résultats fondamentaux dans différents sujets, du théorème de Birkhoff au théorème de Rosenlicht en passant par la classification des représentations de $SL(2,\mathbb{C})$, avec des preuves modernes, efficaces et quelquefois inédites sous forme de livre. Les exercices permettent d'apporter toutes sortes de compléments, ce qui permet de couvrir de trés nombreux exemples de base des sytémes dynamiques : décalage, rotations irrationelles, difféomorphimes d'Anosov . . . Ce livre est vraiment une introduction à la théorie ergodique vue sous un angle géométrique.

Il me semble que *Dynamical Systems and Semisimple Groups* a toutes les qualités pour devenir un texte de référence, agréable, facilement consultable, et comparable en cela à la série des GTM. Je ne pense pas qu'il existe sur le sujet de textes aussi introductifs. Il n'est pas réellement possible de le comparer aux deux monuments du sujet : le traîté très complet de G. Margulis [3] et le livre de R. Zimmer [4].

Il a à la fois des ambitions moins grandes et un cadre plus large. Il part de connaissances plus élémentaires, et énonce des résultats de base dans de nombreux sujets sortant du cadre strict de la superrigidité. Par ailleurs, il adopte un point de vue et une problématique beaucoup plus proche de la géométrie différentielle (et symétriquement plus éloignés de la théorie ergodique) : les chapitres sur les structures géométriques et la superrigidité lisse n'ont pas d'équivalents dans ces deux textes ; inversement, il n'aborde pas l'arithméticité, effleure seulement la propriété T et se restreint au cas des groupes définis sur $\mathbb{R}$. En fait, le livre de R. Feres sert plus d'introduction à la lecture de Margulis et Zimmer qu'il ne les concurrence.

Les notions requises pour lire cet ouvrage ne dépassent pas en théorie celles du programme de Maîtrise. Ceci est littéralement vrai, mais une petite expérience en géométrie différentielle en facilitera grandement la lecture. Ainsi, si les définitions des fibrés principaux et des structures géométriques sont explicitement données, avoir pratiqué auparavant le fibré des repères et les métriques riemaniennes rendra ces objets moins opaques. Par contre, les chapitres de théorie des groupes de Lie, de géométrie algébrique ou de théorie de la mesure, peuvent s'aborder sans complexes.

Pour ne pas dépasser 250 pages, R. Feres a du faire quelques choix. Certains théorèmes fondamentaux, en particulier ceux de dynamique hyperbolique, sont seulement énoncés : leurs preuves alourdiraient considérablement le texte, et il existe bien souvent de bonnes références sur ces sujets. De même, pour faire un cours aussi rapide sur les groupes réductifs, un biais a été choisi : celui de les voir sous l'angle des groupes linéaires stables par involution de Cartan. Il s'agit à mon avis d'un péché véniel : il y a suffisamment d'excellents ouvrages sur les groupes semisimples pour s'y reporter en cas d'angoisse sur la généralité des hypothèses choisies. Les choix faits par R. Feres sont clairement explicites et ne paraissent pas vraiment contestables.

Les rédactions des démonstrations sont très fouillées (peut-être quelquefois trop ...) et des plus affutées en particulier en ce qui concerne Birkhoff, Moore et bien sûr la superrigidité de Margulis-Zimmer.

Je recommande la lecture de cet ouvrage qui me semble tout particulièrement destiné à des lecteurs, novices ou experts, intéressé par la géométrie différentielle et ses interactions avec la théorie ergodique et la théorie des groupes de Lie.

Examinons pour conclure, chapitre par chapitre, le contenu de *Dynamical Systems and Semisimple Groups, an introduction.*

1. Terminologie et constructions de bases pour les actions de groupes sur les espaces topologiques. Les difféomorphismes d'Anosov sont définis de même que sont énoncés les résultats sur la structure des variétés stables et instables.

2. Mesures invariantes, récurrence de Poincaré, entropie, désintégration des mesures (non démontrée ...) *etc.*

2. Théorie élémentaire des groupes de Lie : application exponentielle, sous-groupes fermés, homomorphismes continus *etc.* Vocabulaire des actions sur les variétés.

3. Introduisant rapidement à la géométrie algébrique à l'ancienne, insistant sur le caractère noethérien, il vise à démontrer le théorème de Rosenlicht donnant la structure des actions algébriques sur les variétés algébriques. Il énonce les résultats sur le radical unipotent des groupes linéaires algébriques.

4. Petite zoologie des groupes classiques.

Les quatres premiers chapitres ont été élémentaires. Avec les suivants on entre dans le vif du sujet.

5. Structures géométriques : définitions, réduction des structures. Structure géométrique invariante par un groupe : enveloppe de l'action d'un groupe.

6. Groupes semisimples : décomposition de Cartan et d'Iwasawa, rang réel, racines, groupes de Weyl. L'un des buts de ce chapitre est de démontrer que les groupes de rang plus grand que 2 sont engendrés par des centralisateurs.

7. Théorie ergodique : théorèmes de Moore, de Birkhoff. Introduction aux méthodes spectrales : moyennabilité et propriété T.

8 Théorème d'Osseledets.

9 Superrigidité de Zimmer-Margulis. R. Feres et moi-même, dans [2], avons mis au point la preuve exposée dans ce chapitre. Sensiblement différente des preuves classiques de [3] et [4] elle prétend être plus élémentaire et rapide. Elle repose tout de même fondamentalement sur la même stratégie.

Le livre se conclut par un appendice succint sur les réseaux : $SL(n,\mathbb{Z})$ est un réseau dans $SL(n,\mathbb{R})$; enfin construction de réseaux cocompacts de ce dernier groupe.

Références

[1] R. Feres
Dynamical systems and semisimple groups
Cambridge Tracts in Mathematics **126**, 250 p, 1998

[2] R. Feres ; F. Labourie
Topological Superrigity and Anosov actions of lattices
à paraître aux Annales de l'Ens (1997).

[3] G. Margulis
Discrete Subgroups of Semisimple Lie groups
Springer-Verlag, New York, 1991

[4] R. Zimmer
Ergodic Theory and Semisimple Groups
Monograph in Mathematics, Birkhaüser, Boston, 1984.

F. Labourie, Université Paris-Sud

Random Graphs
V. F. Kolchin
Encyclopedia of Mathematics, Cambridge, 1999

Ce livre est l'un des tous premiers à traiter systématiquement des propriétés probabilistes de structures fondamentales en mathématiques discrètes. Y sont couverts les arbres, les graphes, les matrices booléennes et les permutations. On part d'une description (exacte) de structures combinatoires par séries génératrices de dénombrement pour aboutir aux lois (asymptotiques et probabilistes) qui régissent les objets de grande grande taille. Le domaine peut être qualifié de « combinatoire probabiliste » et l'approche dans ce cadre est analytique plutôt que stochastique.

La démarche de Kolchin consiste à exploiter systématiquement la représentabilité de paramètres combinatoires par sommes de variables aléatoires. Elle s'inscrit dans un courant bien développé parmi l'École russe depuis les années 1960. Le livre de Kolchin fait d'ailleurs suite à deux ouvrages antérieurs de l'auteur qui sont devenus des classiques [3,4]. Il complète aussi agréablement deux livres de Sachkov parus sur des thèmes voisins dans cette même collection de l'*Encyclopedia of Mathematics and its Applications* ; voir notamment l'excellent traité [5] originellement publié en 1978 !

En ouverture, l'ouvrage présente de manière accessible les quelques notions nécessaires à l'ensemble : probabilités discrètes, fonctions caractéristiques, convergence en loi, propriétés centrales et locales limites (c-à-d, convergence des fonctions de repartitions ou approximation des densités), analyse asymptotique et méthode du col. Il est suivi de ce que l'École russe a baptisé « schéma général d'allocations ». Grosso modo, un grand nombre de classes combinatoires sont « décomposables » : une permutation se décompose en cycles, un graphe en ses composantes connexes, une forêt en ses arbres composants. Cette décomposabilité induit des relations simples entre les séries génératrices de dénombrement. Soit $\mathcal{C}$ une classe combinatoire (les « composants ») et C_n le nombre d'objets dans $\mathcal{C}$ de taille n. On introduit les séries génératrices exponentielles, $C(z) := \sum C_n z^n/n!$. Alors, le fait de former sur une classe primitive $\mathcal{C}$ des objets structurés plus complexes (des « composites »), tels des suites ou des ensembles, des k-suites ou des k-ensembles, se traduit en séries génératrices par

$$\frac{1}{1-C(z)}, \quad e^{C(z)}, \quad C(z)^k, \quad \frac{1}{k!}C(z)^k.$$

Cette démarche désormais classique en analyse combinatoire moderne a été joliment formalisée et développée par Foata et Schützenberger dans les années 1970. Il est clair dès lors qu'un grand nombre de propriétés, asymptotiques ou non, accompagnent de telles relations. C'est le but de Kolchin de montrer toute la finesse de l'usage qui peut en être fait dans le cas des structures fondamentales discrètes.

Pour analyser les objets composites de taille n formés sur des composantes de type $\mathcal{C}$, le procédé suivi par Kolchin consiste à introduire systématiquement des variables aléatoires définies par

$$\Pr\{\xi\} = \frac{1}{C(x)}\frac{C_m x^m}{m!}.$$

De fait certaines des caractéristiques principales d'objets composites s'expriment comme sommes de copies indépendantes de ξ. Il est intéressant d'observer que la fonction caractéristique de ξ n'est alors autre qu'une forme normalisée de de la série génératrice de dénombrement de C, soit $C(x+e^{it})/C(x)$. L'analyse de telles fonctions caractéristiques rejoint alors l'analyse directe des séries de dénombrement dans le plan complexe qui est la base du courant de « combinatoire analytique » : *Fourier rejoint ici Cauchy.* Naturellement les problèmes traités échappent largement au cadre classique du théorème de la limite centrale et les déformations de contours astucieuses se conjuguent avec la méthode du col.

Le chapitre 1 illustre la démarche d'ensemble par une discussion extensive des forêts d'arbres non enracinés. Les arbres sont des graphes connexes sans cycles, ici étiquetés, dont on sait depuis Cayley qu'ils sont dénombrés par n^{n-2}. Ils sont d'ailleurs reliés au produit d'un processus de branchement à la Galton-Watson dont la loi de reproduction est de Poisson. On trouvera dans ce chapitre des estimations précises du nombre de forêts de taille totale n comportant N arbres ainsi que de la distribution de la taille du plus grand arbre dans une forêt. Les expressions mettent en jeu la fonction de Gauss (e^{-x^2}) dans le cas simple ou la fonction d'Airy ($\mathrm{Ai}(z)$, l'une des solutions de $y'' - zy = 0$) dans les régions spéciales, ce selon les résultats d'analyses de col.

Le chapitre 2 discute le modèle célèbre de percolation sur le graphe complet introduit par Erdös et Rényi vers 1959. Le livre est alors conforme à son parti pris analytique, lequel fournit des estimations complémentaires fines à ce que fournit l'approche probabiliste classique illustrée par le traité encyclopédique de Bollobás [2]. Soit $\mathcal{G}_{n,T}$ le modèle de graphe aléatoire à n sommets et T arêtes. Alors, si T est suffisamment en deça de $n/2$, le graphe est « sous-critique » et il ne comporte que des arbres et des composantes connexes unicycliques. Lorsque n s'approche de $n/2$, la structure devient plus complexe, et les analyses préparées au chapitre précédent mettent en évidence des phénomènes de type Airy. Ces résultats se transposent pour l'essentiel au modèle où les arêtes sont choisies indépendamment avec probabilité p pour peu que $T \approx n^2p/2$. Ce chapitre par son orientation analytique peut alors servir d'excellente introduction au « giant paper on the giant component » de Janson, Knuth, Łuczak et Pittel (*Random Structures and Algorithms* 3 (1993), 233-358) dont l'exploitation reste sans doute encore très largement à faire.

Le chapitre 3 développe des travaux récents portant sur les systèmes d'équations linéaires sur un corps fini. On y trouve le comportement précis du rang d'une matrice aléatoire à coefficients dans GF(2), dans les cas dense, creux, carré, ou rectangulaire. La reconstructibilité de solutions de systèmes linéaires est aussi étudiée. Ces problèmes sont susceptibles d'intéresser certaines branches de la cryptographie moderne pour laquelle les fonctions booléennes, les corps finis, et leurs propriétés statistiques sont des objets de base. Les phénomènes de seuil mis en évidence rappellent aussi ceux que l'on constate souvent en algorithmique et complexité des problèmes NP-complets : la transition entre problèmes sous-contraints et problèmes sur-contraints y est une sorte de transition de phase brusque.

Les chapitres 4 et 5 enfin concluent par une discussion poussée des propriétés des permutations vis à vis de la décomposition en cycles. La loi du nombre de cycles est asymptotiquement gaussienne (résultat classique dû à Goncharov en 1942) et l'on obtient facilement divers résultats quantitatifs de grande déviations. Il est également possible d'imposer diverses contraintes portant sur le nombre ou la longueur des cycles. Dans ce dernier cas, les problèmes énumératifs se relient à l'analyse du nombre de solutions d'équations dans le groupe symétrique et l'analyse de col prévaut alors.

Le livre de Kolchin obéit bien à la charte de la collection telle que décrite par Rota (récemment disparu) : « *This series is devoted to significant topics [. . .] for which a detailed development of the abstract theory is less important than a thorough and concrete exploration of the implications and applications* ». Tout au plus pourra-t-on regretter que la consigne ait été parfois un peu trop bien respectée et que manque à l'occasion un peu de lyrisme et de perspective. Ce défaut, somme toute léger, est largement contrebalancé par les notes historiques et bibliographiques de fin de chapitre. Le niveau est homogène et les prérequis par ailleurs peu volumineux sont bien couverts en début d'ouvrage. Les estimations données peuvent paraître un peu techniques de prime abord mais elles sont précises et complètes.

On dispose ainsi d'un ouvrage solide et utile qui mérite clairement de figurer dans les bibliothèques de chercheurs intéressés aux propriétés asymptotiques et probabilsites des structures discrètes. Le livre de Kolchin peut alors avantageusement être complété par deux ouvrages récents de la même collection : celui de Sachkov déjà nommé [5], et celui de Bergeron, Labelle et Leroux pour une présentation élégante de la combinatoire énumérative moderne [1].

[1] F. Bergeron, G. Labelle, and P. Leroux. *Combinatorial species and tree-like structures.* Cambridge, 1998.

[2] B. Bollobás. *Random Graphs.* Academic Press, 1985.

[3] V. F. Kolchin. *Random Mappings.* Optimization Software Inc., 1986. (Traduit de *Slučajnye Otobraženija*, Nauka, Moscow, 1984.)

[4] V. F. Kolchin, B. A. Sevastyanov, and V. P. Chistyakov. *Random Allocations.* Wiley, 1978. (Traduit de *Slučajnye Razmeščeniya*, Nauka, 1976.)

[5] V. N. Sachkov. *Probabilistic methods in combinatorial analysis.* Cambridge 1997. (Adapté de *Verojatnostnye Metody v Kombinatornom Analize*, Nauka, 1978.)

P. Flajolet, INRIA Rocquencourt

Six lectures on commutative algebra
J. Elias, J.M. Giral, R.M. Miró-Roig, S. Zarzuela, éditeurs
Progress in Math 166, Birkhäuser, 1998

Ce livre est la reproduction de 6 séries de cours d'algèbre commutative ayant eu lieu en Catalogne durant l'été 96. Le but en est évidemment de faire un état du sujet et de ses perspectives alors que les méthodes numériques (en particulier le programme Macaulay) ont grandement contribué, depuis 20 ans, à changer les orientations et les présentations combinatoires.

Les avancées ainsi permises sont particulièrement présentes dans le cour de M. L. Green : un anneau de polynômes peut être aisément gradué de tel sorte que chaque espace de la graduation soit de dimension 1. A tout idéal homogène, on associe alors un idéal gradué. Pour étudier l'idéal gradué ainsi associé, l'idée est de le « déplacer » à l'aide d'un élément du groupe linéaire de façon à ce qu'il devienne stable sous l'action du groupe des matrices triangulaires supérieures. Ceci est possible grâce à un théorème de Galligo et même grandement indépendant des choix. On a ainsi construit à partir de l'idéal de départ, un idéal intial générique et l'objet du cours de M. Green est d'étudier les conséquences d'une telle construction, en particulier à l'aide de résolutions universelles libres de ces idéaux dont la combinatoire se prête aux méthodes numériques. La fin de son cours est consacré à diverses généralisations quand l'algèbre de polynôme est remplacé par une algèbre extérieure ce qui est lié à l'homologie simpliciale des complexes à nombre fini de sommets.

Le cours d'Avramov se situe au delà du champ d'application des ordinateurs en étudiant les algèbres à résolution libre non finie. La structure la plus riche que l'on puisse mettre sur une telle résolution est celle d'une algèbre différentielle graduée à la Cartan-Eilenberg. Avramov explique cela en donnant des résultats assez complet pour les anneaux locaux de

Golod (anneaux se situant à l'opposé des anneaux d'intersection complète ; la résolution libre de leur corps résiduel à une « croissance » maximale).

Le cours d'Hunecke est entièrement consacré à ses travaux communs avec Hochster sur la complétion suivante des idéaux, appelé « tight closure » : à l'idéal I on associe I^* défini par :

$$I^* := \{x \mid \exists c \quad cx^k \in I^k, \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

Le cours de Schenzel est de facture classique : il s'agit des applications de la cohomologie locale (sans avoir peur des suites spectrales) à l'étude des variétés projectives. Les résolutions libres et les fonctions de Hilbert associées à l'anneau des coordonnées des variètés projectives sont aussi l'objet du cours de Valla ; ce cours est fortement influencé par les travaux de Stanley. Il s'agit de comprendre quelles contraintes sont imposées aux polynômes de Hilbert d'une algèbre graduée par des propriétés de l'algèbre comme d'être de Cohen-Macaulay - ce cas est connu par un théorème de Macaulay réinterprété par Stanley - ou d'être intègre - ce cas est ouvert.

Les fonctions de Hilbert permettent de définir naturellement la notion de multiplicité d'un module ; le cours de Vasconcelos est consacré à des généralisations de cette mesure numérique des modules. Ces généralisations font intervenir la cohomologie et ont pour perspective de donner des renseignements sur les générateurs (minimaux nécessaire) d'une algèbre graduée en tant que module de type fini sur une de ses sous-algèbres qui est une algèbre de polynôme.

Comme on le voit, ce livre est un peu différent d'un compte-rendu d'école d'été classique puisque chaque auteur présente (en termes simples) des travaux récents qui sont en général au cœur de leurs recherches actuelles. Il est ainsi fait une présentation attrayante et dynamique de l'algèbre commutative actuelle.

C. Mœglin, CNRS, Université de Paris 7

Characters of finite groups, Part 1.
Y. G. Berkovich, E. M. Zhmud'
Trans. of Math. Mono. 172, publications de l'AMS, 1998

Le fil conducteur de ce livre est la théorie classique des caractères avec une présentation précise de l'œuvre des pères fondateurs de cette théorie. Mais l'originalité du livre tient en ce que les auteurs ajoutent de nombreux corollaires concernant des propriétés fines des groupes finis (non réductifs) et ceci dès le 2e chapitre. Par exemple, on trouve dans ce livre une description complète des groupes ayant beaucoup d'involutions. L'apport des auteurs est particulièrement sensible quand il s'agit de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe admette une représentation fidèle de longueur au plus k, où k est un entier arbitraire. Cette condition est liée au nombre de sous-groupes engendrés par des éléments pris dans au plus k classes de conjugaison.

Ce livre s'adresse donc avant tout aux chercheurs ayant besoin de propriétés fines des groupes finis ; il ne remplace en aucun cas un livre de base comme celui de J.- P. Serre. L'avantage de ce livre est qu'il est bien construit, que l'introduction est exhaustive et l'index des notations particulièrement bien fait, permettant sans problème une lecture non linéaire. La partie 2, quand à elle, donne de nombreuses classification de groupes dont les caractères vérifient certaines propriétés.

Ce livre est la traduction d'un manuscript (non publié) écrit en Russe datant de 1990.

C. M.

Éléments de géométrie, actions de groupes
Rached Mneimné
Nouvelle bibliothèque mathématique, Cassini, 1997

Livre — Le livre de Rached Mneimné que Cassini nous propose depuis 1997 devrait remplir de bonheur bien des lecteurs. Sous un titre anodin (ou sybillin, comme on voudra), c'est d'un traité d'algèbre linéaire qu'il s'agit.

Je précise. Il s'agit d'une synthèse originale (et que je trouve très réussie) entre les « basses » mathématiques, celles qu'on enseigne en DEUG et les « hautes », celles qu'on utilise pour démontrer ses propres théorèmes.

J'ai parlé de traité, mais il s'agit *vraiment* d'un livre. Ce n'est pas la suite convenue « définition-théorème-démonstration » dont nous avons hélas tant l'habitude, mais bien un texte écrit, discursif, voire digressif, constitué d'une foule d'exemples et de liens entre ces exemples, exemples

– d'opérations de groupes, on s'en doute — si j'ai bien compris, l'algèbre linéaire, c'est l'opération du groupe linéaire[1] sur les matrices, il y a donc un chapitre assez avancé sur les classes de similitude,
– de foules de « petits » groupes (ils opèrent partout)
– de toutes sortes de matrices 2×2 avec par exemple
    – dans le groupe symétrique ou ailleurs, $GL(2, \mathbb{F}_q)$ et ses potes $SL(2, \mathbb{F}_q)$ et $PSL(2, \mathbb{F}_q)$
    – le birapport et $PSL(2, \mathbb{R})$, $PSL(2, \mathbb{C})$
    – les classes de similitude dans les matrices 2×2 réelles et les quadriques affines.

La « note » (dans ce livre, les chapitres s'appellent des notes) sur le birapport est remarquable. Je ne pense pas que les lectrices et lecteurs s'initieront au birapport en la lisant, une familiarité — et peut-être même un peu plus — avec le sujet est nécessaire. Par contre, la lecture de ce chapitre leur permettra de faire le lien entre le birapport et différents classiques de la géométrie plane (le théorème de Pascal, le groupe circulaire), ce qui, certes n'est pas très original comme je le présente mais l'est assez comme Mneimné le présente dans le livre.

Mon goût personnel m'aurait poussée vers un peu plus d'applications à la géométrie euclidienne (la plupart des problèmes d'angles et de cocyclicité sont justiciables d'un traitement par le birapport[2] qui leur ôte une partie de l'ennui qu'ils semblent porter en eux).

Il est clair que le goût de Mneimné le pousse plutôt vers la géométrie algébrique et surtout les groupes algébriques. Qui s'en plaindrait ? Toutes les manipulations faites aveuglément sur les matrices sont des opérations *algébriques* et si ceci a aussi des conséquences sur la topologie et la géométrie des ensembles de matrices, disons-le !

À qui s'adresse ce livre ? — À nous, d'abord. J'ai appris beaucoup en le lisant, en l'ouvrant au hasard ou en en utilisant l'index de façon systématique pour explorer de façon transversale[3] une notion élémentaire (je vous conseille d'essayer avec le « rang »).

À nos étudiants un peu avancés ou un peu curieux, ensuite. Je l'ai d'ailleurs découvert, quelques mois après sa parution grâce à un agrégatif (d'ailleurs agrégé depuis) qui me l'avait signalé comme « plein de trucs utiles pour nous ». Depuis, j'essaie de convaincre ses successeurs que c'est *le* livre d'algèbre linéaire dont ils ont besoin. Il est clair que l'organisation synthétique du matériau dans ce livre est particulièrement adaptée à ces étudiants. L'auteur est, on le sait[4], un vieux routier de la préparation à l'agrégation, il ne s'en cache d'ailleurs pas. Oui, c'est un livre que les agrégatifs devraient utiliser, même si, ou parce que, le chapitre sur les classes de similitude est bien ambitieux.

L'éditeur — Je ne résiste pas à une remarque[5] sur *Cassini*. Il ne me semble pas qu'un machin bachotant étiqueté « Préparation à l'agrégation » puisse être d'une quelconque utilité à un futur enseignant, même si celui-ci prépare un concours. Ce dont ces étudiants ont besoin, c'est d'ouvrages de mathématiques, qui les aident à enrichir, organiser et synthétiser leurs connaissances.

---

1 Hélas, nos étudiants arrêtent d'étudier l'algèbre linéaire après avoir aveuglément jordanisé des matrices en deuxième année de DEUG... juste avant qu'on veuille bien leur dire ce qu'est une opération de groupe, dans un contexte disjoint.

2 Voir par exemple le théorème des six birapports de Perrin et ses applications, qu'on ne trouve que dans les meilleurs livres de géométrie.

3 Ce langage technocratique, pour me donner l'occasion de signaler que je suis en désaccord avec la définition de la transversalité que donne Mneimné à la page 59.

4 On sait qu'il est déjà l'auteur d'un grand classique, « le » Mneimné-Testard [1].

5 « remarque [...] que nous introduisons ici parce qu'elle est irrésistible », comme dit Saramago.

Le livre de Mneimné est cela, je l'ai dit. J'ai le plaisir d'ajouter que, chez *Cassini*, c'est presque une règle. En plus, les livres y sont bien relus, la typographie est très agréable et soignée... j'ai eu bien du mal à trouver une faute[6] dans le Mneimné.

Alors préférez les ovales aux ellipses, oubliez Marine Porto, ses « l'épreuve de jardinage à l'oral de l'agrégation » et ses con-frères et précipitez-vous chez Cassini. En plus du livre de Mneimné (dont il nous annonce trois petits frères !) et dans un catalogue général déjà impressionnant, il vient de publier un petit bijou, le petit guide de calcul différentiel (de Rouvière) [2] dont je rêvais depuis longtemps.

Références

[1] R. Mneimné et F. Testard – *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, Méthodes, Hermann, 1986.

[2] F. Rouviere – *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini Paris, 1999.

M. Audin, Université Louis Pasteur et CNRS, Strasbourg

Les plus belles formules mathématiques
Lionel Salem, Frédéric Testard et Coralie Salem
Le sel et le fer, Cassini, 1998

Cassini vient aussi de rééditer ce livre plublié en 1990 par Interédition. Parmi les auteurs l'un est chimiste, l'autre mathématicien et la troisième déssinatrice. Le résultat est un livre beau à regarder et surprenant à lire : il s'agit de 49 « formules » mathématiques dont certaines sont très simples ($(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$) d'autres plus subtiles (*tout nombre entier est somme de 4 carrés, théorème du à Lagrange*) présentées et très généralement démontrées sur les pages de gauche. La page de droite est un dessin (en général) expliquant la démonstration. Les démonstrations présentées sont élégantes, en principe compréhensible par tout un chacun. Voilà un livre grand public qui utilise l'aspect ludique des mathématiques pour éviter toute problématique sur leur abstraction.

C. M.

Dites un chiffre
Malcolm E. Lines
Nouvelle bibliothèque scientifique, Flammarion, 1999

Ce livre est lui aussi un livre grand public de mathématiques écrit par un non mathématicien ; l'auteur est physicien. Lui aussi semble être un enthousiaste des mathématiques et part du principe que cet enthousiasme doit pouvoir se transmettre à quiconque, par exemple un historien spécialiste du moyen-âge. De fait, les sujets traités dans ce livre sont des sujets à la mode : la cryptographie, le chaos, les problèmes NP (comment trouver un algorithme pour répartir au mieux des objets dans 3 malles), les fractales (ou comment calculer la longueur d'une côte rocheuse) ... ces sujets sont bien choisis, maintenant le lecteur en alerte. Toutefois les méthodes mathématiques sont complètement inexistantes dans ce livre. C'est une présentation, réussie, de certains champs d'application des mathématiques mais, me semble-t-il pas une invitation à faire des mathématiques ni même à chercher à voir comment elles fonctionnent pour pouvoir les utiliser au mieux.

C. M.

[6] Mais j'y suis arrivée, l'auteur peut me contacter.

Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques. (Textes rassemblés et préparés par Bernard Blochs, Jean-Claude Régnier)
Georges Glaeser
La pensée Sauvage, éditions,Grenoble 1999

Cet ouvrage est construit à partir de cours de D.E.A. de didactique des mathématiques donnés à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg de 1975 à 1988 ; ces cours représentaient 800 pages dont certaines déjà publiées comme brochures de l'A.P.M.E.P.(76, Analyse et synthèse ; 96 fondements de l'évaluation). Il a donc fallu les transformer pour rendre l'ouvrage plus accessible. Ce corpus de base est complété par cinq textes écrits par des amis de Georges Glaeser, vieux routiers de la didactique.

Dans le premier, François Pluvinage retrace les grandes étapes de la vie de Georges Glaeser, son rôle moteur dans le développement de l'IREM, du D.E.A., du rallye d' Alsace, de la collection « le livre du problème », et son action de précurseur pour baser la didactique sur des expérimentations soigneusement contrôlées.

Après une introduction où il décrit son propre apprentissage et la part prise par son équipe dans l'organisation de la communauté des chercheurs en didactique, Georges Glaeser consacre le premier chapitre à la mathématique et son enseignement. Il y brosse à grands traits mais avec fougue le projet mathématique puis combat sans faiblesse quelques mythes : assimiler la mathématique à un savoir constitué, déroulé linéairement et figé depuis des siècles, la présenter comme une prison réglée par des interdits et ne laissant aucune place à l'imagination ; il analyse alors l'échec en maths puis dénonce la bureaucratie et la lourdeur administrative.

Le second chapitre, consacré aux racines historiques de la didactique des maths, montre sur des exemples élémentaires comment a profondément évolué, par son public et ses méthodes, l'enseignement destiné aux enfants et adolescents ainsi que la formation des maîtres sans oublier la pédagogie mondaine à la Clairaut et les leçons particulières. Abordant la période contemporaine, il condamne trois hérésies : la pédagogie sans élèves, celle des opinions et celle du ministère puis rend un vibrant hommage aux innovateurs de la pédagogie heuristique : Wagenschein, Polya et Blutel.

Le troisième (Une théorie des situations didactiques, processus de courte durée) rentre dans le vif du sujet. Après avoir précisé ce qu'est pour lui l'éducation mathématique, l'auteur décrit à l'aide d'exemples ce que sont une situation didactique, la transmission éducative, un contrat et une variable didactiques, présente les trois versants de la compréhension (psychologique, scientifique et de la communication) et privilégie finalement l'heuristique conçue comme une étude des phénomènes de la compréhension.

Le quatrième (Une conception génétique, processus de longue durée) explore et critique le modèle piagétien.

Le cinquième (Epistémologie et didactique), après avoir rejeté une vision artificielle de l'histoire, attribuant la mathématique « à un nombre infime d'individu (sic) incommodés par les bourdonnements d'un essaim de caisses de résonance », développe le concept d'obstacle épistémologique introduit par Bachelard et tente une classification. Il se termine par une réflexion sur les contre-exemples et leur caractère plus ou moins monstrueux.

En conclusion « une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques veut être un encouragement à poursuivre de nouvelles investigations dans un champ de recherche plus étendu. »

Pour terminer, Guy Brousseau compare dans un « manifeste pour la didactique des mathématiques » le travail des équipes de Strasbourg et de Bordeaux puis présente rapidement l'état actuel des recherches françaises, Gérard Vergnaud donne le point de vue d'un psychologue, Guy Noël s'interroge sur le concept de problème et trois collègues de l'I.P.N. de Mexico rappellent ce que leur équipe doit à Georges Glaeser.

Comme le dit l'auteur dans son introduction , cet ouvrage gagnera à être relu plusieurs fois et cela de façons différentes ; il intéressera aussi bien les mathématiciens, les chercheurs en didactique, les enseignants, les parents élèves qui y trouveront de nombreux exemples accessibles sans connaissances approfondies ; chacun pourra compléter tel ou tel point en se référant à la bibliographie.

Regrettons toutefois que , par suite d'une impression trop hâtive, aucune relecture n'ait éliminé du texte final de très nombreuses coquilles, jusqu'à une dizaine par page, qui supprimant lettres et mots rendent certaines phrases incompréhensibles.

Remercions Georges Glaeser, dont les « Mathématiques pour l'élève professeur » ont depuis trente ans influencé de nombreux collègues et qui annonce une histoire de l'enseignement de notre discipline, de nous donner cet ouvrage où il a mis, une fois de plus, tout son coeur, sa fougue et sa passion.

P.L. Hennequin, Université de Clermont-Ferrand II