LIVRES

Gröbner Bases an Applications
Editeurs B. Buchberger et F. Winkler
London Mathematical Society, LNS 251, 1998

Ce livre est d'une certaine façon l'aboutissement des évènements qui ont eu lieu durant l'année 97–98 où a été organisé le « Special year on Gröbner Bases ».

Durant cette année a eu lieu en particulier un cours intensif destiné aux jeunes chercheurs et une conférence : « 33 years of Gröbner bases ».

On trouve donc dans ce volume, outre une partie disons pédagogique (tutorials) sur les bases de Gröbner, introduites (à tout seigneur tout honneur) par B. Buchberger, et qui donne un aperçu sur les nombreux champs d'application de ces bases de Gröbner, un certain nombre d'articles qui décrivent des travaux récents de recherche sur ces sujets.

C'est donc un livre de référence sur les bases de Gröbner, varié et intéressant.

A. Szpirglas, Université de Poitiers

Théorie de Galois, 122 exercices corrigés, niveau 1 . Théorie de Galois, 115 exercices corrigés, niveau 2
Mohamed Ayard
Ellipses, 1997

Le premier s'adresse aux étudiants de second cycle de mathématiques (licence ou maîtrise), le second aux étudiants de maîtrise.

L'ensemble des deux tomes est recommandable à tous ceux qui préparent l'agrégation de mathématiques.

Chacun des tomes contient un chapitre central de théorie de Galois proprement dite, précédé de généralités sur les extensions (corps de décomposition, normalité, séparabilité).

Le tome 1 se conclut par un dernier quart traitant de cyclotomie, d'extensions abélienne, d'extensions par radicaux et d'extensions transcendantes.

Le tome 2 reprend ces derniers thèmes auxquels s'ajoutent un peu de théorie de Kummer, puis des exercices sur les extensions linéairement disjointes et les polynômes à plusieurs indéterminées. Il se termine par un chapitre traitant d'éléments entiers sur un anneau.

Les livres d'exercices sur ce sujet sont rares ; cela rend ces livres précieux. Les exemples nombreux permettent une approche solide et rapide des problématiques de la théorie. Certains exercices sont faits de résultats importants, ce qui permet d'insister sur l'importance de leurs preuves.

A la fin de chaque tome est consignée une dizaine de problèmes permettant à l'étudiant de faire le point.

N. Pouyanne, Université de Versailles, Saint-Quentin

Introduction to Functional Analysis
Reinhold Meise-Dietmar
Oxford Science, 1997

Ce livre est plus qu'une introduction à l'analyse fonctionnelle. Après quelques rappels de topologie dans une première partie, la deuxième traite des grands théorèmes, Hahn-Banach, Baire et ses conséquences. Dans cette partie les définitions des espaces de Banach, de Hilbert, du dual, de la réflexivité sont données. Ces notions sont appliquées dans l'étude des espaces L^p, des fonctions continues, des espaces de Sobolev (après des rappels sur la transformée de Fourier).

La troisième partie traite de l'analyse spectrale. Naturellement, les auteurs traitent d'abord des opérateurs compacts, puis des opérateurs normaux bornés via la théorie de Gelfand, enfin le cas des opérateurs auto-adjoint non bornés est présenté.

La quatrième partie est une étude des espaces vectoriels topologiques. Différents cas sont considérés, espaces de Fréchet, espaces nucléaires, étude de l'espace dual. Les espaces de suites (à poids) sont étudiés assez extensivement. Ce cadre n'est pas purement abstrait puisqu'il contient comme cas particulier les fonctions C^∞ sur le tore et la classe de Schwartz. C'est la partie qui amuse le plus les auteurs et elle contient certains de leurs résultats récents et inédits.

Chaque chapitre se termine par une dizaine d'exercices de niveaux variés.

Les trois premières parties sont classiques, les preuves m'ont semblé claires et concises. La dernière partie peut servir de référence sur un sujet qui n'est pratiquement plus enseigné en France.

L. Robiano, Université de Versailles, Saint-Quentin

Eléments d'analyse fonctionnelle, Cours et exercices
Francis Hirsch et Gilles Lacombe
Masson, Enseignement des Mathématiques, 1997

Issu d'un cours de maîtrise, ce livre, très agréable à lire aborde les bases essentielles de l'analyse fonctionnelle en s'appuyant sur un minimun de prérequis (programme de licence). La première partie, espaces fonctionnels et leurs duals, est organisée en quatre chapitres : espace des fonctions continues sur un compact, espaces localement compacts et mesures de Radon, espaces de Hilbert, espaces L^P. La deuxième partie est consacrée aux opérateurs (partout définis) : théorie spectrale, opérateurs compacts. La troisième partie aborde la théorie des distributions en quatre chapitres : définitions et exemples, multiplication et dérivation, convolution, Laplacien sur un ouvert (borné de R^d). Les solutions fondamentales des opérateurs différentiels classiques sont étudiées et le dernier chapitre est consacré au problème de Dirichlet. De nombreux résultats des deux premières parties sont ainsi réinvestis.

De nombreux exercices détaillés, applications et aussi compléments de cours, sont proposés à la fin de chaque chapitre.

Cet ouvrage destiné à des étudiants de maîtrise devrait intéresser les agrégatifs et peut aussi servir de première référence pour des étudiants de troisième cycle.

J. Pian, Université de Versailles, Saint-Quentin

Topologie
H. Queffélec
Masson, 1998

Dans son nouveau livre, Hervé Queffélec présente de manière concise et efficace les outils de topologie contenus dans le programme du deuxième cycle universitaire de mathématiques. L'auteur a choisi de restreindre le nombre de notions de topologie générale étudiées en se plaçant le plus souvent dans le cadre des espaces métriques. Cette restriction lui a permis d'approfondir à travers les exemples la compréhension des outils introduits et d'aller relativement loin dans les applications. Ce choix rend le livre facilement accessible et agréable à lire. A ceci s'ajoute une présentation claire et précise du cours et de nombreux exercices divers, intéressants et complètement corrigés. Il s'agit d'une excellente introduction à la topologie générale donnant les bases nécessaires pour aborder les ouvrages plus spécialisés ou développant les applications classiques en analyse fonctionnelle comme l'ouvrage récent de Hirsch et Lacombe dans la même collection.

M. Besbes, Université de Versailles, Saint-Quentin

An Invitation to Arithmetic Geometry
DINO LORENZINI
Graduate Studies in Mathematics, vol. 9, American Mathematical Society, 1996–97

Ce livre se situe au confluent de la théorie algébrique des nombres, de l'algèbre commutative, de la géométrie algébrique et de la géométrie arithmétique : en guise d'invitation à la géométrie arithmétique, Dino Lorenzini propose dans ce livre l'étude comparée des anneaux d'entiers de corps de nombres et des courbes algébriques. C'est la fameuse analogie entre « corps de nombres » et « corps de fonctions » (d'une variable). Le concept central est ici celui d'anneau de Dedekind. Leurs propriétés élémentaires sont étudiées : factorisation des idéaux, extensions, valuations, discriminant et ramification, groupe de classes d'idéaux.

Comme ce livre se veut introductif, aucun bagage de géométrie algébrique n'est supposé connu du lecteur et l'auteur la présente de manière à mon avis un peu surprenante : d'un côté, la plupart des courbes (affines ou projectives) sont planes, et donc définies par une équation polynômiale ; d'un autre, la définition générale de courbe (lisse) qu'il donne est celle d'un corps K (de degré de transcendence 1 sur un corps de base k) et d'un ensemble de valuations de K triviales sur k. Cette dernière définition n'est pas si géométrique que cela...

Le théorème de Riemann–Roch pour les courbes complètes lisses est démontré, ainsi que le théorème de dualité et la formule de Riemann-Hurwitz. Deux chapitres sont consacrés aux fonctions zêta. Le premier traite à la fois des corps de fonctions et des corps de nombres. L'équation fonctionnelle et la formule (analytique) du nombre de classes sont énoncées et démontrées dans le cas géométrique : l'auteur n'est pas allé jusqu'à donner les démonstrations d'analyse nécessaires en théorie algébrique des nombres. De même, le théorème des unités de Dirichlet n'est qu'énoncé alors que son analogue géométrique (comparaison des groupes de classes d'une courbe complète et d'un ouvert non vide) est démontré. Le second chapitre prouve l'hypothèse de Riemann pour les courbes algébriques selon la méthode de Stepanov. L'auteur donne aussi quelques cas explicites à base de sommes de Jacobi (certaines courbes hyperelliptiques).

Un chapitre final survole quelques sujets plus avancés (conjecture de Mordell, variétés abéliennes, jacobiennes, représentations galoisiennes, conjectures de Weil et problème de Galois inverse). Un appendice rappelle essentiellement sans démonstration quelques résultats de théorie des corps (lemme de Gauß, théorie de Galois, corps finis). Enfin, la plupart des chapitres se termine par de nombreux exercices, environ 200 au total. Un index clôt les 397 pages d'un livre très riche, parfois touffu et fatalement un peu trop gros pour nos cours de DEA semestriels.

A. Chambert-Loir, Université Paris 6

Topics in Classical Automorphic Forms
H. IWANIEC
Graduate Studies in Math., 17, A.M.S., 1997

Notons $\mathbb{H}$ le demi-plan de Poincaré des nombres complexes de parties imaginaires > 0. Soit k un entier pair $\geqslant 2$. Une forme modulaire cuspidale (ou parabolique) de poids k pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ est une fonction $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, holomorphe, vérifiant la relation

$$(*) \qquad f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z)$$

pour tous $z \in \mathbb{H}$ et $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, et telle que $f(z)$ tende vers 0 quand $Im(z)$ tend vers $+\infty$.

Cette définition classique peut être généralisée de diverses manières. On peut remplacer le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ par un groupe de congruence ou même un groupe « fuchsien », glisser un caractère dans la relation (*), élargir la condition de croissance, ce qui introduit les séries d'Eisenstein. On peut introduire des formes de poids demi-entier ou remplacer la condition d'holomorphie par celle d'être fonction propre du laplacien, ce qui conduit aux formes de Maass. On peut considérer les formes modulaires comme des fonctions sur $SL_2(\mathbb{R})$, puis remplacer SL_2 par un groupe réductif quelconque, cadre dans lequel se développe la « philosophie » de Langlands.

Ce qui confère à l'étude des formes modulaires un intérêt considérable est qu'elles sont intimement liées à d'autres objets de nature arithmétique. Citons-en trois : les formes quadratiques définies positives sur un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel (théorie des séries thêta), les courbes elliptiques définies sur $\mathbb{Q}$, les représentations de dimension 2 du groupe de Galois de $\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$, où $\bar{\mathbb{Q}}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$. Hecke a introduit des opérateurs T_n pour tout entier $n \geqslant 1$ qui agissent sur l'espace des formes modulaires cuspidales. Ces opérateurs se diagonalisent dans une même base. A tout élément f de cette base est donc associée une famille de valeurs propres $(\lambda_f(n))_{n\geqslant 1}$. L'étude de ces familles et de leurs propriétés arithmétiques est le cœur du problème.

Après bien d'autres, le livre d'Iwaniec nous offre un large panorama de la théorie classique des formes modulaires. Il évoque ainsi les groupes fuchsiens, les séries d'Eisenstein, les séries de Poincaré, les opérateurs de Hecke, les fonctions L attachées aux formes modulaires et leurs équations fonctionnelles, les théorèmes réciproques, les courbes elliptiques, les séries thêta, les formes modulaires de poids 1 et leur connexion avec les fonctions L d'Artin, les fonctions L de paires etc. Tout cela n'est pas très nouveau et plusieurs questions sont seulement survolées. Néanmoins, le caractère un peu exhaustif de ce recensement des divers aspects de la théorie rendent ce livre utile au lecteur désireux de s'investir dans ce domaine. L'ouvrage est facile à lire et possède une qualité appréciable : les énoncés sont précis.

Mais l'originalité de ce livre vient des deux ou trois chapitres concernant la spécialité de l'auteur, à savoir les questions d'estimations, de majorations. La plus célèbre question dans ce registre est la conjecture de Ramanujan-Petersson. Soit f une forme modulaire cuspidale de poids $k \geqslant 2$ pour un groupe de congruence. Notons $a_f(n))_{n\geqslant 1}$ ses coefficients de Fourier. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c > 0$ tel que pour tout $n \geqslant 1$, $|a_f(n)| \leqslant cn^{\frac{k-1}{2}+\varepsilon}$. Ceci a été prouvé par Deligne, la démonstration nécessite des résultats profonds de géométrie algébrique. Mais la généralisation à d'autres situations (par exemple les formes de Maass) reste ouverte. D'autre part, de nombreuses questions du même genre se posent, qui justifient le développement de méthodes spécifiques. Il arrive fréquemment que certaines majorations soient inaccessibles, mais que l'on puisse les attraper « en moyenne ». Par exemple, pour le problème ci-dessus, s'il est très difficile d'estimer $|a_f(n)|$, il l'est nettement moins d'estimer

$$\sum_{n\leqslant N} |a_f(n)|^2.$$

Iwaniec est un spécialiste de ces questions, ce qui nous vaut deux chapitres particulièrement intéressants sur les estimations des sommes de Kloosterman et des coefficients des formes modulaires. Il y revient un peu plus tard à propos des séries thêta avec une brève échappée sur la méthode du cercle. On regrette un peu que l'auteur n'ait pas développé davantage ces questions. En tout cas, ces passages confèrent à ce livre une singularité qui le distingue de bon nombre de ses prédecesseurs.

J.-L. Waldspurger, CNRS/Université de Paris 7

Brownian motion, obstacles and random media
Alain-Sol Sznitman
Springer Monographs in Mathematics, 1998

Il s'agit d'un livre d'un niveau très avancé qui présente des résultats récents concernant des problèmes liés à l'évolution aléatoire d'une particule dans un environnement qui est lui-même aléatoire. Ce sujet a connu de nombreux développements durant ces dernières années (en grande partie dûs à l'auteur et à ses élèves). Ce livre est particulièrement bien venu dans la mesure où il commençait à devenir difficile pour un « non-spécialiste » d'avoir une vue d'ensemble sur ce sujet, en l'absence de livre de référence (ce que celui-ci est appelé à devenir).

Un des modèles étudiés est le suivant. On répartit des obstacles aléatoirement dans l'espace de telle sorte que la présence d'un obstacle ou non à un certain lieu est indépendante de cet endroit et n'influence pas la présence ou non d'un autre obstacle à un autre endroit (on dit alors que ces obstacles sont poissonniens en référence à la loi de Poisson). Une fois que cet environnement aléatoire est déterminé, on fait partir un mouvement brownien d'un certain point fixé et l'on conditionne (en un sens bien précis) par exemple sa trajectoire à éviter tous les obstacles. On souhaite alors étudier le comportement (par exemple le comportement asymptotique lorsque le temps tend vers l'infini) de la trajectoire de la particule.

Malgré le fait qu'il s'agisse de questions très naturelles et de prime abord simples, les problèmes deviennent vite très complexes. Afin de pouvoir les étudier, il faut d'abord comprendre et combiner un certain nombre d'outils mathématiques élaborés (par exemple le calcul stochastique et la formule de Feynman-Kac, la théorie du potentiel, des estimations de valeurs propres principales du Laplacien dans des domaines compliqués, la théorie des grandes déviations etc.). La première partie du livre présente de manière claire, autonome et didactique ces différents outils. Cette partie est particulièrement utile car elle regroupe de manière concise des résultats variés qu'il était jusqu'à présent nécessaire d'aller piocher dans divers ouvrages spécialisés.

Dans une seconde partie un peu plus longue, l'auteur s'intéresse à l'étude proprement dite du mouvement brownien en présence d'obstacles poissoniens. Il a choisi une approche didactique (en insistant sur les idées et techniques principales) plutôt qu'une vision encyclopédique. Sans sacrifier la précision nécessaire à la compréhension des démonstrations compliquées, les preuves sont toujours commentées par explications des idées sous-jacentes. L'auteur présente tout d'abord des techniques et outils (comme la méthode d'« agrandissement des obstacles » et les exposants de Lyapounov) puis il s'intéresse aux phénomèmes dits de « localisation » et de « confinement » : On peut dire par exemple heuristiquement qu'une particule « typique » aura tendance à rester longtemps dans certaines parties « favorables » de l'espace. Le livre s'achève avec un court chapitre présentant une vue d'ensemble sur les résultats et certains problèmes ouverts reliés à la thématique de l'environnement aléatoire.

W. Werner, Université Paris-Sud

Birational geometry of algebraic varieties

J. Kollar et S. Mori

Cambridge Tracts in Mathematics 134, Cambridge University Press, 1998

Ce livre expose la théorie des modèles minimaux de la géométrie algébrique complexe, issue essentiellement des travaux de S. Mori, Y. Kawamata, V. Shokurov et Y. Miyaoka durant la décennie 1980-90. En dimension deux, elle se réduit aux assertions classiques suivantes : si X est une surface projective complexe lisse et si son fibré canonique K_X n'est pas « nef » (ie : s'il existe sur X une courbe effective C telle que $K_X \cdot C < 0$), alors X admet une « contraction extrémale » $\varphi : X \to Y$ sur Y,possédant les propriétés suivantes : Y est une varieté projective lisse, telle que : $\rho(X) = \rho(Y) + 1$, et $(-K_X)$ est φ-ample. Il y a trois types de telles contractions : une fibration birationelle (la contraction d'une (-1)-courbe) et deux fibrantes (le réglage de X sur une courbe et l'application constante si $X = \mathbb{P}_2$).

Les contractions non fibrantes peuvent être itérées (X reste une surface lisse) et après un nombre fini de contractions de (-1)-courbes on obtient une surface X', $X' = \mathbb{P}_2$, réglée ou « minimale » (ie : $K_{X'}$ est nef, auquel cas $K_{X'}$ est engendré par ses sections globales).

Le programme des modèles minimaux consiste alors en toute dimension à :

A. Construire une contraction extrémale si K_X n'est pas nef.

B. Itérer (si possible) ces contractions pour aboutir en un nombre fini d'étapes à X' birationnelle à X telle que : ou bien $K_{X'}$ est nef, ou bien : X' admet une contraction extrémale fibrante $\varphi' : X' \to Y'$ (à fibres génériques Fano avec Y' de dimension plus petite).

En dimension trois déjà, deux phénomènes apparaissent, qui introduisent des complications considérables, à la fois techniques et conceptuelles, dans la réalisation de ce programme :

(1) Y n'est plus lisse, en général ; elle peut avoir des singularités dites « terminales ». Ceci conduit naturellement à se placer dans la catégorie des varietés $\mathbb{Q}$-factorielles (à singularités) terminales. Ces notions sont introduites au §2 de manière détaillée, ainsi que l'importante notion de « discrépance » due à M. Reid, qui mesure les singularités de manière adéquate dans ce contexte. Pour X,variété $\mathbb{Q}$-factorielle terminale avec K_X non nef, il existe une contraction extrémale $\varphi : X \to Y$, ce qui réalise en toute dimension la partie A du programme dans ce

cadre. Les démonstrations sont exposées de manière transparente aux §§ 2 et 3 du livre, basées sur l'approche cohomologique de Kawamata,qui procède par récurrence sur la dimension de X, par une utilisation subtile de raffinements du théorème d'annulation de Kodaira. Le §1 expose l'approche géométrique originale de S. Mori, basée sur la théorie des déformations des courbes en caractéristique $p > 0$, qui permet de construire des courbes rationnelles contractées par φ.
(2) Il existe des contractions extrémales birationnelles « petites » (ie : dont le lieu exceptionnel dans X est de codimension deux ou plus. Ce cas n'existe donc pas pour les surfaces). Alors Y n'est plus $\mathbb{Q}$-factorielle et on ne peut itérer le processus. Le programme consiste alors en la construction du « flip » $\varphi^+ : X^+ \to Y$ de $\varphi : X \to Y$; il s'agit d'une transformation birationelle $\psi : X \to X^+$ isomorphe en codimension 1, avec X^+ est une variété $\mathbb{Q}$-factorielle terminale et ou K_{X^+} est φ^+-ample. On continue le programme en remplacant X par X^+.

L'existence des « flips » et l'aboutissement du programme en un nombre fini d'étapes ne sont connus qu'en dimension trois, grâce à la classification par S. Mori des petites contractions, basée sur la connaissance fine des singularités elliptiques et canoniques des surfaces. Cette partie est la plus difficile du programme.

Les §§ 4-7 du livre exposent la construction des « flips » (dans le cas « semi-stable », du moins, mais en version « log » où l'on considère, non K_X,mais plus généralement un diviseur du type $(K_X + \triangle)$, nécessité dans les récurrences sur la dimension.

Plus précisément, le §4 (resp. 5) établit les résultats utilisés sur les singularités canoniques et elliptiques des surfaces (resp. en dimension trois où ces singularités apparaissent comme sections hyperplanes génériques locales des singularités canoniques de Gorenstein). Le §6 construit les « flops » terminaux d'abord, puis canoniques ensuite par descente « crépante » (les « flops » sont les flips dans le cas particulier où K_X est $\mathbb{Q}$-trivial, relativement à φ et servent d'intermédiaires dans la construction de ces derniers en général). Le §7 enfin construit les flips semi-stables (cette hypothèse permet de traiter X comme une famille de surfaces) et en fournit trois applications à des problèmes de modules.

Pour la premiere fois, la totalité des techniques utilisées à ce jour dans la théorie des modèles minimaux est exposée dans un livre, en ne supposant connus que les résultats réellement standards de la géométrie algébrique.

Par exemple, les résultats sur les singularités des surfaces sont établis en détail, sans admettre aucun résultat « bien connu ». Les démonstrations sont rédigées avec un soin extrême, de manière transparente et sont aussi simples que possible. Ce livre rend donc enfin accessibles à un large public ces développements spectaculaires, mais dont la difficulté technique et les préliminaires dispersés dans la littérature avaient empêché (en particulier en France qui a accumulé un retard notable en ce domaine) la diffusion au-delà d'un cercle beaucoup trop restreint de spécialistes.

F. Campana, Université de Nancy

Interpolation, Identification and Sampling
Jonathan R. Partington
Oxford, LMS monographs, 1997

Comme l'indique le titre, les trois mots clés de l'ouvrage de J.R. Partington sont : interpolation, reconstruction, échantillonnage ; on pourrait y ajouter les mots robustesse, robustesse restreinte comme nous le verrons plus loin. Le contexte est toujours le suivant : on a un espace de Banach X de fonctions analytiques d'une variable, définies sur un domaine E et vérifiant des conditions de croissance ou de régularité quand la variable tend vers la frontière du domaine (typiquement X est l'espace de Hardy Y_p à spectre de fréquence limité) ; on a également une suite (z_k) de points de E (quelquefois une partie plus compliquée de E) ; l'interpolation consiste à trouver la ou les $f \in X$ ayant des valeurs imposées sur les z_k ; la reconstruction (quand on sait que les $f(z_k)$ déterminent f) consiste à trouver des algorithmes (linéaires ou non) permettant de reconstituer f à partir des $f(z_k)$, et si possible de façon robuste, c'est-à-dire qu'une erreur sur les valeurs observées $f(z_k)$ n'affectera pas trop l'algorithme ; un algorithme peut manquer de robustesse mais avoir cependant une robustesse restreinte au sens suivant : si on sait déjà que $f \in K$, une sous-classe de X, alors l'algorithme est robuste sur f ; un exemple typique donné par Partington est celui de l'interpolation de

Lagrange L_n : la norme de L_n explose lentement vers l'infini, si bien que, quand f appartient à une certaine sous-classe K de H_∞, la forte petitesse (selon une estimation de Babenko) de la n-ième largeur (width) de K vient compenser la faible explosion de L_n et que $L_n(f) \to f$ dès que $f \in K$. Enfin, l'échantillonnage est une variante de la reconstruction dans le cas où $E = \mathbb{R}$ et où les points z_k sont régulièrement espacés : $z_{k+1} - z_k$ est constant ; la généralisation au cas où $z_{k+1} - z_k$ est à peu près constant (à la fois majoré et minoré) est également traitée.

L'ouvrage est divisé en huit chapitres ; les deux premiers chapitres exposent un matériel plus ou moins classique sur les espaces de Hardy et les opérateurs entre ces espaces : produits de Blaschke, théorème de factorisation de Riesz, théorème de Fatou et sa généralisation par Rudin-Carleson (un compact de mesure nulle du bord du disque est d'interpolation isométrique pour l'algèbre du disque A), fonctions intérieures et extérieures.

Ensuite sont décrits les opérateurs de Toeplitz et de Hankel : le point de vue choisi pour ces derniers est qu'ils agissent de H_2 vers son orthogonal $H_2^\perp$ et que si (a_{ij}) est leur matrice sur les bases canoniques, (a_{ij}) ne dépend que de $i + j$; l'auteur démontre les théorèmes fondamentaux de Nehari et Hartman : Γ est de Hankel si et seulement si $a_{ij} = \tilde{\psi}(-i-j)$, où le symbole ψ est dans L_∞ et peut être choisi de manière que $||\psi||_\infty = ||\Gamma||$; Γ est compact si et seulement si le symbole ψ peut être somme d'une fonction analytique bornée et d'une fonction continue ; le théorème de Nehari intervient à son tour dans la preuve d'un théorème auquel Partington (s'inspirant du livre de Nikolskii sur le shift) fait jouer un rôle central : le théorème de commutation de Sarason. Ce théorème permet d'obtenir simplement plusieurs résultats : par exemple, les théorèmes d'interpolation de Nevanlinna-Pick ou de Carathéodory-Fejér, ou bien la caractérisation des suites (z_k) du disque unité pour lesquelles la suite normalisée des noyaux reproduisants (dans H_2) correspondants est une base inconditionnelle de l'espace qu'elle engendre : ce sont exactement les suites d'interpolation au sens de Carleson.

Dans la suite de l'ouvrage, les opérateurs de Toeplitz ou de Hankel continuent à jouer un grand rôle ; par exemple, les opérateurs de Toeplitz interviennent dans la preuve d'un théorème de Patil : si K est un compact de mesure positive du bord du disque (donc un ensemble déterminant pour H_2), la formule de reconstruction de Goluzin-Krylov de f à partir de ses valeurs observées sur K converge non seulement sur les compacts du disque mais encore au sens de la norme H_2. Comme on l'a déjà dit, la robustesse est une préoccupation constante : elle peut avoir lieu avec des algorithmes linéaires, comme la formule d'interpolation de Jackson (qui jouait déjà un rôle important dans les travaux de S. Bernstein sur les séries de Fourier absolument convergentes) ; mais ces derniers se révèlent parfois insuffisants et l'auteur développe une méthode robuste non linéaire de reconstruction basée sur un principe de minimax abstrait : étant donné une suite uniformément bornée (ψ_n) de formes linéaires sur un espace normé X, on peut reconstruire de façon robuste $x \in X$ à partir des « valeurs observées » $\psi_n(x)$ si et seulement si la suite (ψ_n) norme presque l'espace X. Dans les cas qui nous intéressent, cela fait jouer un rôle privilégié aux suites (z_n) du disque telles que $sup_n|f(z_n)|$ soit de l'ordre de grandeur de $||f||_\infty$ pour $f \in A$, l'algèbre du disque.

L'échantillonnage enfin pour les fonctions à spectre de fréquence limité est abordé au chapitre 7, avec l'outil du théorème de Paley-Wiener et la formule de Whittaker-Kotelnikov-Shannon dont le caractère robuste s'exprime par une inégalité du type « frame » :

$$A||f||^2 \leqslant \sum |f(t_k)|^2$$

où les t_k régulièrement espacés sont les points d'observation et A une constante positive. Le dernier chapitre est consacré à des applications (notamment aux systèmes différentiels linéaires retardés) et prétend infirmer la célèbre phrase de Hardy dans son apologie d'un mathématicien : « I have never done something "useful". »

L'ouvrage de J.R. Partington, rédigé avec la qualité qu'on retrouve dans toutes les monographies d'Oxford, mérite de grands éloges : on y trouve les idées directrices, l'historique, des preuves claires et complètes ; le lecteur pourra y apprendre une foule de résultats et aussi de techniques empruntées à des domaines variés : théorie des opérateurs, méthodes probabilistes ou algébriques (théorie des corps finis) pour évaluer le coût de certains algorithmes, méthodes hilbertiennes (frames, ondelettes) variées, méthodes non linéaires (minimax, théorème antipodal de Borsuk), etc. De plus, une bibliographie de 211 titres, presque « up-to-date », vient compléter le livre ; même si l'on peut faire la (petite) réserve que l'ouvrage paraît parfois un peu décousu d'un chapitre à l'autre et qu'on ne voit pas toujours clairement où l'on va, cette monographie est à recommander chaudement aussi bien au thésard débutant qu'au mathématicien expérimenté.

H. Queffélec, Univerité de Lille 1

Geometry of sets and measures in Euclidean Spaces
Pertti Mattila
Cambridge studies in advanced mathematics, 44, 1995 réédité 1999

Quel est le sujet principal de la théorie géométrique de la mesure ? Il pourrait se décrire, dans un sens classique, par les mots-clef : rectifiabilité, projections, intersections. Les mesures, et surtout les mesures de Hausdorff, servent d'outil d'analyse. Auparavant on cherchait surtout à obtenir certaines propriétés géométriques des ensembles à partir de leur analyse en termes de mesure. On fait plus maintenant : on généralise tous les acquis précédents aux mesures elles-même, qui d'outils d'analyse sont devenues le véritable objet de la théorie. Après le livre de Mattila, le titre du prochain livre sur ces questions sera peut-être : *Géométrie des mesures.* Voici, en gros, le programme. Et c'est bien celui de l'ouvrage en question, dont je dois dire qu'il comble un vide qui devenait de plus en plus important avec les années. De plus, c'est enfin un livre que l'on peut mettre dans toutes les mains...

Le sujet lui-même a déjà été traité. Tout le monde a vu le livre *Geometric Measure Theory* (1975), de H. Federer. Ce fut un peu le Bourbaki de cette théorie, un ouvrage exhaustif pour l'époque, complètement auto-suffisant et totalement hermétique. Je ne veux pas discuter l'utilité de cet ouvrage, ce n'est pas mon propos et comme telle célèbre collection d'ouvrages mathématiques, c'est un bel ornement de bibliothèque. Je n'ose m'étendre sur l'impact négatif de ces œuvres si habilement écrites. Equipées d'une redoutable machinerie de notations et de symboles derrière lesquels se dissimulent les concepts, ils ont découragé bien des jeunes chercheurs de se frayer des pistes plus originales. Je soupçonne même que c'était l'effet visé. De l'ordre ! enfin, dans la matière concernée. Comme dans une Cité interdite, que nul n'ose y pénétrer sans en adopter tout d'abord les traditions évoluées et le langage sophistiqué, inconnus du peuple. Pour y entrer il faut presque changer de nature.

Quel rapport pouvait-il y avoir, par exemple, entre la théorie à la Federer et les conceptions de B. Mandelbrot, à qui l'on a longtemps reproché d'être imaginatives, de susciter un certain enthousiasme et de ne pas reposer sur un corps de doctrine suffisamment précis ? Aucun, apparemment... Pourtant nos article des années 1980 étaient catalogués 28A75 dans le classement de l'AMS, il devait bien y avoir un point commun...

C'est tout le mérite de Pertti Mattila d'avoir réussi à publier un ouvrage extrêmement rigoureux et pourtant simple et facile à lire. Il ne faut pas sous-estimer la quantité de travail qu'il peut y avoir derrière la transparence des méthodes et la limpidité du style. Je ne peux dire que les articles de Mattila eux-même soient simples et amusants. Ils sont techniquement très solides. Mais ce mathématicien finlandais à travaillé une vingtaine d'années sur les problèmes les plus ardus sans jamais céder à la facilité et de ce long mûrissement il est sorti ce livre agréable et réduit à l'essentiel. Tout ou presque s'y trouve des développements récents, les théorèmes mais encore mieux les nouvelles techniques de démonstration (qui font grand usage des transformations de Fourier de mesures). Ce n'est pas le livre de G.A. Edgar : *Measure, Topology and Fractal Geometry* (1990) qui reste introductif, ni ceux de K. Falconer : *Geometru of Fractal Sets* (1985) et *Fractal Geometry* (1990), beaucoup plus tournés vers l'analyse des objets fractals. Il est représentatif d'une nouvelle école de théorie géométrique de la mesure telle que la fondent D. Preiss, K. Falconer, L. Olsen et P. Mattila lui-même (cette courte liste n'est pas exhaustive). Avoir rassemblé l'essentiel à l'intérieur de 300 pages est une performance digne d'être notée.

Dans les premiers chapitres Mattila rappelle les notions de base, en particulier les lemmes de recouvrement (Vitali, Besicovitch), les mesures invariantes par des groupes de transformations (essentiel pour des énoncés du type : cette propriété est vraie pour *presque toute* droite, ou *presque toute direction* d'hyperplan, etc.). Les mesures et dimension de recouvrement (Hausdorff), les mesures et dimension d'empilement (Tricot), les théorèmes de densité locale (Chap. 6), les capacités et le lemme de Frostman (chap. 8) constituent la base de ce qui va suivre et permettent tout de suite de parler des propriétés de projection d'un ensemble de

$\mathbb{R}^n$ sur un hyperplan de dimension m, et d'intersection d'un ensemble par des hyperplans. Les chapitres suivants constituent le noyau solide de l'ouvrage : on y trouve d'abord une étude de la *porosité*, une notion de lacunarité due à l'auteur et on y introduit des techniques d'analyse de Fourier pour la dimension de l'*ensemble distance* $D(A) = \{|x - y|/x, y \in A\}$. Ces techniques permettent aussi de parler d'*intersection de mesures* (chap. 13), appliquée au problème de la dimension de l'intersection de deux ensembles. On y donne les limites de validité de la formule

$$\dim(A \cap f(B)) = \dim A + \dim B - n$$

dans un espace euclidien de dimension n, où f est une similitude. Le chapitre 14 introduit la notion de *mesure tangente* et démontre le fameux théorème de Marstrand :

Soit $s > 0$. On suppose qu'il existe une mesure de Radon μ sur $\mathbb{R}^n$ telle que la densité

$$\Theta^s(\mu, a) = \lim_{r \to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{(2r)^s}$$

existe, avec une valeur finie non nulle, μ-presque partout. Alors s est un entier.

Les chapitres suivants traitent de la rectifiabilité et plus précisément de la m-rectifiabilité. Un ensemble de $\mathbb{R}^n$ est *m-rectifiable* s'il existe une suite au plus dénombrable (f_i) d'applications lipschitziennes $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que la m-mesure de Hausdorff $H^m(E - \cup f_i(\mathbb{R}^m))$ est nulle. L'ensemble E est *totalement non m-rectifiable* si pour tout F m-rectifiable, $H^m(E \cap F) = 0$. Le chapitre 15 caractérise la m-rectifiabilité par l'existence de m-plans tangents (à préciser dans le texte !). Le chapitre 16 généralise aux *mesures m-rectifiables* et aux *mesures tangentes*. Le chapitre 17 traite du problème le plus difficile : relier la m-rectifiabilité à l'existence presque partout de la densité locale. Une ancienne conjecture proposait l'équivalence suivante :

Si $H^m(E) < +\infty$, alors E est m-rectifiable si et seulement si la limite $\Theta(E, x)$ existe pour H^m- presque tout $x \in E$.

Cette limite est alors, presque partout, égale à 1. La conjecture a été finalement démontrée en toute généralité par D. Preiss dans un article considérable (dans le fond et dans la forme) qui ne pouvait être résumé dans ce livre, mais les principaux arguments y sont. Enfin, le chapitre 18 reprend le résultat de Besicovitch et Federer sur les projections d'ensembles irréguliers :

Si $H^m(E) < +\infty$, E est totalement non m-rectifiable si et seulement si la mesure H^m de sa projection sur presque toute variété de dimension m est nulle.

Les deux derniers chapitres relient cette notion de rectifiabilité avec la capacité analytique et les intégrales singulières.

On voit que dans cet ouvrage la problématique reste très classique. Un grand mérite est d'avoir rassemblé ces résultats en un exposé clair. Un autre grand mérite est d'avoir réduit les techniques de démonstration à l'essentiel, de façon très élégante parfois. Il prépare bien la voie aux idées dominantes actuelles : par exemple, l'utilisation intensive des mesures et dimension d'empilement pour reconstruire une théorie semblable dans un autre système de mesures. Ou encore, effectuer le passage, assez difficile, de la géométrie des ensembles à celle des mesures. Ce dernier point mérite d'être souligné. Depuis l'existence de mesures invariantes liées aux propriétés ergodiques d'un système itéré de fonctions (J.E. Hutchinson 1982) et l'introduction des *dimensions de mesures* (L.S. Young 1986), la théorie s'est presque entièrement tournée vers les propriétés dimensionnelles des mesures et de la définition des mesures projections, mesures intersections, mesures m-rectifiables... On peut partir de là soit pour travailler sur la *désintégration* des mesures, soit pour étudier les *spectres multifractals* dont la dimension de mesure n'est qu'une des valeurs caractéristiques. Je ne saurais trop recommander la lecture de l'ouvrage de Mattila à ceux qui possèdent un bon bagage sur la théorie de la mesure et intégration. Il reste encore beaucoup de sujets de recherche intéressants dans ce domaine ; cet ouvrage en balise parfaitement les contours. Ajoutons que Mattila montre une honnêteté scrupuleuse dans ses références et que la bibliographie a une trentaine de pages. Un ouvrage de bibliothèque indispensable, donc. Mais pas pour la décoration.

C. Tricot, Université de Clermont-Ferrand II

Mathematical Theory of Thermodynamic Limits Thomas-Fermi Type Models
I. Catto, C. Le Bris et P.L. Lions
Oxford, 1998

A priori le sujet de ce livre peut paraître marginal pour un mathématicien, puisqu'il s'agit de donner une justification rigoureuse à des procédures de moyennisation lors du passage de l'étude de systèmes physico-chimiques finis de molécules à des systèmes infinis. Ce passage a pour nom la théorie de la limite thermodynamique. Les modèles dont il s'agit sont issus de la chimie moléculaire quantique et la problématique est très simplement schématisée dans les premières lignes de l'introduction : soit une molécule à N électrons et N noyaux de charge unitaire, à niveau fondamental d'énergie et à densité minimisante d'énergie ; quand N tend vers l'infini l'énergie par unité de volume et la densité admettent-elles des limites ? Que décrivent ces limites ? Pour pouvoir aborder ce problème il faut à la fois disposer d'un modèle spatial qui permet de dire comment se répartit l'augmentation du nombre de molécules et d'un modèle physique qui décrit les interactions entre les molécules. Le modèle spatial est on ne peut plus simple puisqu'il consiste à remplir les points du réseau $\mathbb{Z}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, le mode de remplissage étant régulier (une définition exacte en est donnée). Le modèle physique qui décrit les interactions moléculaires est beaucoup plus complexe. Sous sa forme le plus simple il s'agit du modèle de Thomas-Fermi (TF). Introduit pour la première fois à la fin des années 20, ce modèle avait fait l'objet d'une étude mathématique très poussée de la part de Lieb et Simon en 1977. Dans ce modèle l'énergie moléculaire s'écrit alors

$$E_\Lambda^{TF}(\rho) + 1/2 \sum_{y\neq z\in\Lambda} \frac{1}{|y-z|} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho^{5/3} d^3x - \int_{\mathbb{R}^3} \Big(\sum_{k\in\Lambda} \frac{1}{|x-k|} \rho(x) d^3x$$
$$+1/2 \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(x)\rho(y)}{|x-y|} d^3x d^3y + 1/2 \sum_{y\neq z\in\Lambda} \frac{1}{|y-z|}$$

(dans la formule précédente Λ est un sous-ensemble « raisonnablement distribué » de $\mathbb{Z}^3$ de cardinal $|\Lambda|$, quantité qui représente le volume à une constante près). L'expression ci-dessus contient à la fois un terme cinétique pour les électrons et les termes de répulsion coulombienne entre électrons $1/2 \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(x)\rho(y)}{|x-y|} d^3x d^3y$, et entre nucléons $1/2 \sum_{y\neq z\in\Lambda} \frac{1}{|y-z|}$. Lieb et Simon ont d'abord établi l'existence d'un densité minimisante ρ_Λ à savoir

$$I_\Lambda^{TF} = inf\Big\{ E_\Lambda^{TF}(\rho) + 1/2 \sum_{y\neq z\in\Lambda} \frac{1}{|y-z|} : \rho \geqslant 0, \rho \in L^1 \cap L^{5/3}, \int_{\mathbb{R}^3} \rho d^3x = |\Lambda| \Big\}.$$

Puis ils ont montré l'existence d'une limite thermodynamique, c'est-à-dire

$$lim_{|\Lambda|\to\infty} I_\Lambda^{TF} = I_{per}^{TF} + 1/2M$$

et $lim_{|\Lambda|\to\infty} \rho_\Lambda = \rho_{per}$ dans $L^1_{loc} \cap L^{5/3}_{loc}$ où I^{TF}_{per} et ρ_{per} sont les énergies et densité correspondant à des problèmes $\mathbb{Z}^3$-périodiques sur $\mathbb{R}^3$ et où M est une constante positive calculable à partir des données (en fait M a les caractéristiques d'une masse). Le modèle de Thomas-Fermi, s'il est d'une relative simplicité mathématique, présente un défaut fondamental au niveau de l'existence (ou plutôt la non-existence) des liaisons moléculaires stables (condition liée à un résultat de Teller). Le modèle développé dans ce livre est le modèle de Thomas-Fermi-von Weizäcker (TFW). L'énergie dans un tel système s'exprime de la façon suivante

$$E_\Lambda^{TF}(\rho) = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\sqrt{\rho}|^2 d^3x + \int_{\mathbb{R}^3} \rho^{5/3} d^3x$$
$$-\int_{\mathbb{R}^3} \Big(\sum_{k\in\Lambda} \frac{1}{|x-k|} \rho(x) d^3x + 1/2 \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(x)\rho(y)}{|x-y|} d^3x d^3y$$

ce qui conduit à un nouveau problème de minimisation :

$$I_\Lambda^{TF} = inf\Big\{ E_\Lambda^{TF}(\rho) + 1/2 \sum_{y\neq z\in\Lambda} \frac{1}{|y-z|} : \rho \geqslant 0, \sqrt{\rho} \in H^1(\mathbb{R}^3), \int_{\mathbb{R}^3} \rho d^3x = |\Lambda| \Big\}.$$

Ce problème admet une unique densité minimisante. Les trois questions auxquelles les auteurs tentent de répondre sont les suivantes :

(i) Existe-t-il une limite ($|\Lambda| \to \infty$) à l'énergie par unité de volume $|\Lambda|^{-1} I_\Lambda^{TF}$?

(ii) La densité ρ_Λ a-t-elle une limite ρ_∞ ?

(iii) La densité asymptotique ρ_∞ a-t-elle la même périodicité que les noyaux ?

Dans la première partie du livre les auteurs remplacent l'interaction coulombienne (à longue portée, ce qui la rend difficile à maîtriser) par une interaction à courte portée, dite de Yukawa, c'est à dire que partout le potentiel coulombien $|x|^{-1}$ est remplacé par le potentiel de Yukawa $V(x) = |x|^{-1} exp(-a|x|)$ $(a > 0)$. Cette approche permet de mettre en avant les techniques qui permettent de traiter les difficultés mathématiques induites par l'ajout du terme $\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\sqrt{\rho}|^2 d^3x$ à l'énergie de Thomas-Fermi. L'étude de ce modèle TFW simplifié permet d'apporter des réponses positives au trois questions énoncées plus haut. Le reste du livre traite du cas coulombien et les résultats de convergence présentent des similarités d'énoncés avec ceux de Lieb et Simon, à savoir

$$lim_{|\Lambda|\to\infty} I_\Lambda^{TF} = I_{per}^{TF} + 1/2M$$

et $lim_{|\Lambda|\to\infty} \sqrt{\rho}_\Lambda = \sqrt{\rho}_{per}$ dans $H^1_{loc}(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^3)$ où I_{per}^{TF}, ρ_{per} et M ont la même interprétation que dans le cas du modèle de Thomas-Fermi. Les techniques utilisées sont cependant incomparablement plus élaborées et reposent essentiellement sur la théorie des équations (voire systèmes) elliptiques non-linéaires et les méthodes variationnelles. Un exemple typique est le résultat d'existence et d'unicité pour le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + cu^{7/3} - \Phi u = 0 \\ u \geqslant 0 \\ -\Delta\Phi = 4\pi(\mu - u^2) \end{cases}$$

où $c > 0$ et μ est une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^3$ vérifiant des conditions de bornitude locale et de croissance uniformes. En résumé ce livre, de prime abord assez pointu, rassemble avant tout de beaux résultats de mathématiques et il est essentiellement à la portée de tout mathématicien rompu à l'étude des équations elliptiques. Même si on n'est pas obsédé par le problème de la stabilité de la matière, la perspective de voir s'ériger une imposante construction mathématique associée à un ensemble de réflexions sur les aspects importants de la physique atomique contemporaine, peut inciter à lire cet ouvrage qui, n'en doutons pas, réjouira tous ceux qui pensent que le champ d'application de l'analyse des équations elliptiques semi-linéaires ne se limite pas à des problèmes académiques. La lecture de ce livre pourrait aussi être très utile à tout physicien intéressé par la justification du passage des systèmes finis aux systèmes à nombres infinis de molécules. Notons enfin que les auteurs préparent une suite logique à cet ouvrage, à savoir l'étude de la limite thermodynamique dans le modèle plus élaboré de Hartree-Fock.

L. Véron, Université François Rabelais à Tours

Fourier créateur de la physique mathématique

JEAN DHOMBRES, JEAN-BERNARD ROBERT

Belin, 1998

Etant mathématicien et habitant Auxerre, je me suis naturellement intéressé à Fourier, le plus illustre de ses fils, mais dont la notoriété dans sa ville natale ne dépasse pas le cercle minuscule de quelques initiés. Par hasard j'ai acquis, au milieu d'un lot, l'*Annuaire historique du département de l'Yonne* de l'année 1871/72 qui contient un article de E. Duché (ancien membre du conseil général de l'Yonne) intitulé *Joseph Fourier sa vie son œuvre* qui résume en une vingtaine de pages la vie de son héros, j'ai aussi consulté divers manuscrits de Fourier conservés précieusement à la bibliothèque de la ville et édités en 1858 par l'archiviste et érudit auxerrois A. Challe. Surtout, j'ai profité de ma présence à Auxerre pour lire dans leur édition originale quelques œuvres de Fourier. Découvrir les séries de Fourier dans le bel exemplaire de la *Théorie de la chaleur* que l'auteur a offert à son ingrate cité avec sa dédicace *« offert par l'auteur à la bibliothèque de la ville d'Auxerre »* calligraphiée d'une écriture légèrement tremblée, suivre avec Fourier les incroyables calculs qui l'ont conduit à l'égalité

$$\pi/4 = \cos y - \frac{1}{3}\cos 3y + \frac{1}{5}\cos 5y - \frac{1}{7}\cos 7y + \frac{1}{9}\cos 9y + \cdots$$

pour $]-\pi/2, \pi/2[$, lire les 92 pages *in folio* de sa Préface historique, *Description de l'Egypte* qui est la relation officielle de « l'Expédition d'égypte » et à la suite continuer en consultant les quelque vingt ouvrages gravés relatant la découverte des monuments de l'antiquité égyptienne par les savants que le général Bonaparte a emmenés avec lui, est un rare bonheur.

Ainsi familiarisé avec la vie et l'œuvre du grand savant par mes quelques « recherches » d'amateur, j'attendais avec impatience et curiosité la parution annoncée du *Fourier* des éditions Belin dans leur collection *un Savant, une époque*.

La tâche n'était pas aisée, tant est riche la vie de Fourier, tant est complexe le personnage sous une apparence assez linéaire, et tant il est difficile d'analyser en profondeur son œuvre scientifique dans son époque, à l'interface des XVIII^e et XIX^e siècles et se prolongeant vigoureusement jusqu'à nos jours. *A priori* c'était d'ailleurs une gageure de réunir dans un seul ouvrage homogène la biographie d'un homme extraordinaire, une histoire des mathématiques et de la physique de son temps et une réflexion philosophique sur l'évolution des sciences. Il a fallu 750 pages aux auteurs pour mener leur projet à bien et pas une n'est de trop.

De fait, il y a trois niveaux de lecture dans ce *Fourier*, non juxtaposés, mais se complétant harmonieusement, se mêlant intimement au fur et à mesure que le lecteur progresse dans l'ouvrage. Le premier nous raconte comment un enfant issu d'une famille très pauvre, rapidement orphelin, a réussi, après des aventures dignes des romans populaires et qui pourraient inspirer un cinéaste désirant donner un éclairage original de la Révolution française, à obtenir les plus hautes distinctions du monde de l'esprit, élu à l'Académie des sciences dont il a été le secrétaire perpétuel, puis à l'Académie française. Mais dès le premier chapitre nous sommes prévenus que là ne se borne pas l'ambition des auteurs, ce qui aurait d'ailleurs pu être une ambition raisonnable. En effet avant même de nous présenter le héros de l'histoire, ou de nous introduire dans le monde de l'Ancien Régime finissant que le lecteur est sensé connaître (ou qu'il découvrira en lisant la suite), c'est dans la science que nous sommes conviés à pénétrer, à travers notamment une série de portraits des figures marquantes de ce temps. Le lecteur mathématicien dont l'intérêt ne s'était pas encore porté sur l'histoire de sa discipline, ou sur certains de ses chapitres, découvrira dans le deuxième niveau de lecture une science passionnante dont il ne soupçonnait pas la richesse, il verra comment sont nés, comment ont été compris et vécus par les contemporains quelques-uns des plus célèbres théorèmes de l'analyse. Les mathématiques et la physique âgées de deux cents ans surgissent alors dans notre monde actuel comme pourvues d'une éternelle jeunesse. Enfin J. Dhombres et J.-B. Robert conduisent leurs lecteurs à un troisième niveau de lecture qui est de réflexion, domaine ordinaire du mathématicien certes, mais cependant peut-être dépaysant pour beaucoup dans la mesure où ici la réflexion porte en quelque sorte sur le domaine usuel de leur réflexion ordinaire. L'avantage d'une telle écriture, c'est qu'elle permet, si elle est réussie, ce qui est le cas ici comme je l'ai déjà indiqué, de faire découvrir au lecteur intéressé par l'un des niveaux, que les deux autres, qui lui sont intimement liés dans la présentation, méritent aussi son attention. Le « lecteur type » auquel est destiné l'ouvrage est probablement un être cultivé, ayant des connaissances de mathématiques et de physique comparables à celles d'un bon élève d'une classe de terminale. Certaines parties des deux derniers chapitres ne lui sont donc pas accessibles dans leur intégralité. Cela n'est pas gênant, tant ce qui précède est intéressant pour tous et ce qui suit fondamental quand on en comprend le sens ! Dans le même ordre d'idées, certaines notes paraîtront naïves ou pédantes, voire inutiles au mathématicien ou au physicien : mais ceux-ci doivent comprendre que des lecteurs moins spécialisés mais néanmoins intéressés ont besoin de savoir ce que signifient certaines notions qui pour nous font partie du tout-courant et même parfois, plus fondamentalement encore, j'ose le dire, il est important qu'ils puissent constater *de visu* que tout en sciences est sujet à définition précise (confer Sokal et Brickmont et leur *Imposture intellectuelle* pour expliciter davantage cette remarque), précision et rigueur en science, en mathématique en particulier, étant l'un des thèmes majeurs de ce que j'ai appelé le troisième niveau.

Venons-en à la structure de l'ouvrage.

Après un court chapitre où l'on nous présente d'abord les principaux personnages de cette histoire, Lagrange, Laplace et Monge, ses professeurs à l'École normale de l'an III, mais aussi Bertollet, Biot, Cauchy, Poisson, puis la science de leur temps, les auteurs consacrent six chapitres à la vie de Fourier depuis son enfance à Auxerre où il est né en 1768, jusqu'à sa mort à Paris en 1830. La vie de Fourier, comme aussi son œuvre scientifique, est paradoxale car à la fois extraordinairement riche et extrêmement solitaire. Ces deux composantes opposées en font un homme singulier, à part, que ses biographes cherchent et réussissent, à cerner tout au long de sa vie et finalement à nous faire comprendre. Autre paradoxe, ce modéré n'a cessé de s'engager dans la vie politique et, pas assez jacobin pour les jacobins, trop révolutionnaire pour les bourgeois d'Auxerre ou pour les royalistes de la seconde Restauration, il fut condamné à mort par les Jacobins (et sauvé par la chute de Robespierre) emprisonné par la « terreur blanche » quelques mois plus tard ; révoqué par Napoléon en 1815 à son retour de l'Ile d'Elbe, sa pension est supprimée par décret par Louis XVIII qui s'opposera à son élection à l'Académie des sciences un an plus tard car il avait servi l'Empereur. Rude époque pour un savant qui a dû attendre d'être académicien pour pouvoir enfin se consacrer entièrement à la science. Inutile d'essayer de présenter ici comment J. Dhombres et J.-B. Robert conduisent leur personnage durant près de 60 ans pendant l'une des périodes les plus troublées de la France mais probablement aussi l'une des plus exhaltantes ! Ils auraient pu écrire une vie romancée, inventant des dialogues, mais ils ont préféré rester historiens et rendre leur texte malgré tout aussi vivant grâce à la richesse de leur documentation et je ne peux qu'approuver leur choix. Je n'en dis donc pas plus sur ce point, laissant au lecteur le plaisir de découvrir, comme dans les bons romans d'aventures, les péripéties de la vie de celui qui a, en plus de ses aventures, su imprimer si profondément sa marque à la science que nous en ressentons encore les effets aujourd'hui.

Les deux derniers chapitres sont plus spécialement consacrés à ce que j'ai appelé le second et le troisième niveau. Dans le chapitre VIII le lecteur suivra Fourier découvrant l'équation de la chaleur et comment il s'y prend pour la résoudre dans certains cas. Le calcul différentiel et intégral est alors très proche de son interprétation physique. Particulièrement intéressante est la manière dont Fourier « prouve » l'unicité des solutions (confer p. 543 et suivantes). Mais ce qu'il faut absolument lire c'est la partie consacrée à l'apparition de la première série de Fourier, qui provient de la solution d'équilibre thermique d'une plaque de la forme d'une demi bande rectangulaire de largeur $[-\pi/2, \pi/2]$, de longueur infinie et d'épaisseur négligeable. Le petit côté est maintenu à la température 1 et les côtés infinis à la température 0. Comment Fourier arrive à la solution ($\nu(x,y)$ désigne la température au point de coordonnées (x,y), $x \geqslant 0, y \in [-\pi/2, \pi/2]$)

$$\nu(x,y) = ae^{-x}\cos y + be^{-3x}\cos 3y + ce^{-5x}\cos 5y + \cdots$$

est longuement expliqué et commenté à partir de la page 523. Alors, comme dit Fourier, « *il nous reste à déterminer les constantes* ... » Il prend donc $x = 0$ et, compte tenu des conditions initiales, $\nu(0,y) = 1$, obtenant l'égalité

$$1 = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + \cdots$$

c'est-à-dire une équation à une infinité d'inconnues d'un type entièrement nouveau. Comment progresser vers la solution ? En dérivant successivement une infinité de fois et en faisant chaque fois $y = 0$! *i.e*

$$1 = a + b + c + \cdots$$

$$0 = a + 3^2 b + 5^2 c + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Nous sommes encore loin de la fin des calculs de Fourier qui arrivera au résultat correct parce qu'il reconnaîtra dans $a, b, c \ldots$ des intégrales de Wallis. Beaucoup plus tard il arrivera, mais en utilisant sa connaissance de son premier exemple explicite, à la formule simple donnant les « coefficients de Fourier ». C'est qu'entre temps il lui aura fallu étendre la notion même de fonction qui, essentiellement donnée par une formule avant lui, acquiert dans son livre un statut proche de celui que nous lui connaissons aujourd'hui : en particulier son domaine de définition est dégagé et est appelé à jouer un rôle important. Dans le même ordre d'idées, c'est dans la *Théorie de la chaleur* qu'apparaît pour la première fois la notation $\int_a^b$ qui s'est imposée depuis et que la notion d'intégrale définie (et non simplement de primitive) d'une fonction « arbitraire » commence à prendre forme.

Encouragé par ses découvertes obtenues par l'étude de la lame rectangulaire décrite ci-dessus, Fourier applique sa méthode à d'autres solides : armille, sphère, cylindre plein, demi-plan. A chaque fois il doit résoudre une équation aux dérivées partielles avec des conditions imposées au bord. J. Dhombres et J.-B. Robert montrent à travers ces exemples à quel point, sur cette notion comme sur les précédentes, une fois encore, Fourier est novateur. Le problème du cylindre le conduit aux fonctions de Bessel (que le mathématicien E. Heine intitule d'ailleurs *die Fourier-Bessel'sche Funktion* dans un article de 1868) et le demi-plan ... à la transformée de Fourier.

Le dernier chapitre, « un homme et la construction d'une postérité » est un chapitre plus philosophique qu'historique. Les auteurs y explorent plusieurs pistes intéressantes comme par exemple la genèse et le sens de l'opposition entre mathématiques pures et appliquées et la notion de rigueur dans les sciences. Ils montrent en particulier comment les séries de Fourier ont permis de *tester* en quelque sorte les concepts nouveaux introduits en analyse par Cauchy : *N'est-il point savoureux de vérifier que le mathématicien Fourier auquel on reproche dès 1807 une rigueur insuffisante — et la mesure de cette rigueur est pourtant à ce moment-là l'ancienne mesure de l'analyse algébrique d'Euler et Lagrange — soit précisement celui qui ait permis de tester la nouvelle rigueur, celle apportée par Cauchy. La tester pour la trouver insuffisante !*(p. 657).

L'imposant ouvrage de J. Dhombres et J.-B. Robert trouvera, je l'espère, de très nombreux lecteurs. Tous y apprendront une impressionnante quantité de choses nouvelles et ils y découvriront un homme, Fourier !

M. Zisman, Université Paris 7