

Le débat sur les « maths modernes » est-il dépassé ?

Frédéric PHAM (*Laboratoire J.-A. Dieudonné et IREM de Nice*)

« *Ouvrons-nous sans frilosité* », nous recommandait Jean-Pierre Bourguignon dans un article de cette *Gazette* ([5]), auquel je ne peux qu'applaudir. Mais comment et depuis quand sommes-nous frileux ? Était-il frileux, celui qui écrivait¹

L'irruption des ensembles dans la mathématique y fait souffler une pensée nouvelle, chaude, subtile et attrayante, tout empreinte d'humanisme et d'humanité. (...) Impossible de parler sans recourir à la démarche ensembliste : le substantif le plus primitif définit l'ensemble des objets auquel il s'applique. Ainsi les ensembles sont présents dès les débuts de la vie culturelle de l'humanité et de l'individu. (...) La mathématique est partout. C'est en tout qu'il faut apprendre à la découvrir.

Un tel texte fait sourire aujourd'hui et on aura vite fait de le cataloguer au musée des illusions d'une époque révolue. Vraiment révolue ? J'avoue que la belle unanimité avec laquelle on condamne aujourd'hui les « excès », les « erreurs pédagogiques » de l'époque dite des « maths modernes » me paraît fort suspecte. Et l'empressement des collègues à déclarer « je ne suis pas bourbakiste » me semble davantage relever de l'exorcisme que d'un usage raisonné du langage. En chargeant le nom de Bourbaki de tous les péchés, en faisant de lui le prototype du mauvais-pédagogue-qui-dévide-un-discours-hypergénéral-sans-expliquer -les-motivations-ni-faire-de-dessins, on se dispense à bon compte d'analyser une vision des mathématiques qui, quoi qu'on en dise, est encore solidement implantée dans l'esprit de chacun d'entre nous, mathématiciens d'aujourd'hui. Et quand je dis *nous*, je m'inclus dans le lot ! Sauf que le physicien théoricien que j'étais à mes débuts n'a jamais cessé de bousculer le confort du bourbakiste que j'ai appris à devenir² ! C'est ce physicien qui a inspiré beaucoup des questions qui vont suivre. Collègues qui savez ce que c'est que les mathématiques, veuillez excuser sa naïveté !

¹ G. Papy (1975), cité par D. Nordon dans [13].

² Extrait de mes archives personnelles : « Je dois vous avouer que comme très ancien (École centrale 1905) je ne pénètre pas facilement le super-bourbakisme de vos écrits » (lettre de Solomon Lefschetz datée du 18/6/68).

Les étonnements d'un huron

On lui expliqua ce que c'était que le pape et l'Ingénu fut encore plus étonné qu'auparavant.

(Voltaire, l'Ingénu, chap.5)

Alors que la filière maths-physique est depuis longtemps réputée filière « noble » à l'université, tous les professeurs et leurs étudiants savent pourtant que « les différentielles du mathématicien ne sont pas celles du physicien ». Il y a dix ans, profitant de ce que j'enseignais dans une filière moins « noble » (Sciences pour l'Ingénieur), j'ai pris la liberté de glisser en douce à mes étudiants de première année un peu du calcul différentiel que j'aime : pour calculer la tangente à une courbe C , – disons, le cercle d'équation

$$x^2 + y^2 + 2x + y = 10 \quad (1)$$

je leur ai appris à « différentier » l'équation, c'est-à-dire à écrire

$$2x dx + 2y dy + 2dx + dy = 0 \quad (2)$$

et à interpréter dx , dy comme des « accroissements le long de la tangente » (au point (x, y) choisi).

« La méthode est drôlement simple », — m'ont dit les étudiants. — « Pourquoi est-ce qu'on ne nous l'a pas apprise en Terminale ? »

« Recette de physicien », m'ont dit mes collègues, « manque de rigueur », « dissimulation d'un théorème profond » (le théorème des fonctions implicites)... J'avoue que moi-même à l'époque je n'aurais sans doute pas osé enseigner ainsi dans la « filière noble ». Car le bourbakiste en moi pensait, comme mes collègues, que « la bonne façon » de comprendre l'équation (2) est de considérer que x et y « sont » les fonctions $C \rightarrow \mathbb{R}$, restrictions à C de la première et deuxième projection canonique de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, de sorte que dx et dy « sont » les *différentielles* de ces fonctions (notion qui n'a de sens que parce que C est une *sous-variété* de \mathbb{R}^2).

Mais comment comprendre ainsi l'écriture différentielle de la dérivée d'une fonction composée

$$(dz = g'(y) dy, \quad dy = f'(x) dx) \Rightarrow dz = g'(y) f'(x) dx \quad ? \quad (3)$$

Va-t-il falloir, pour comprendre le dy , considérer y comme la restriction au graphe de f de la deuxième projection de \mathbb{R}^2 ? ou bien comme la restriction au graphe de g de la première projection? ou bien faut-il se placer dans \mathbb{R}^3 , sur la courbe d'équations $(y = f(x), z = g(y))$? Devant la difficulté de choisir, faut-il renoncer aux notations différentielles dans (3), les considérant comme de vieilles reliques à jeter aux poubelles de l'histoire des mathématiques (ou à laisser aux physiciens, qui-ont-sans-doute-leurs-raisons-certainement-forestimables-de-tenir-à-ces-vieilleseries)?

Il y a pourtant une réponse très simple, aussi simple que l'œuf de Christophe Colomb, que je suis stupéfait de n'avoir vraiment comprise que tout récemment : *il ne faut pas demander « ce que c'est »* que y et dy , etc., car le formalisme différentiel de Leibniz tire justement sa force de la possibilité *d'interpréter une même variable de diverses façons*.

C'est d'ailleurs à cela que servent les variables, *dans n'importe quel formalisme mathématique* ! Par exemple un collégien qui apprend pour la première fois à calculer avec des *lettres* ne se demande-t-il pas avec inquiétude « ce que c'est que x », et ne voit-il pas comme une sorte de miracle ces calculs qui resteront valides *quelle que soit l'interprétation de x* ? (ici, « interprétation » = attribution d'une valeur numérique).

« Halte-là, tu triches ! » — me dira Purtheuma³. « Dans le cas du calcul algébrique du collègue on peut déclarer x comme une variable *de type nombre réel* (par exemple) et les calculs sur x se font selon les règles bien codifiées attachées à ce type de variables. *Quel est le type des dx* du calcul différentiel de Leibniz ? »

J'avoue ne pas être aussi savant que Purtheuma sur la « théorie des types ». Mais je n'en ai pas moins le sentiment de comprendre le calcul littéral du collègue (sans doute pas assez pour pouvoir implanter ma compréhension sur un ordinateur, mais assez pour pouvoir me dire mathématicien !). Et je crois être enfin parvenu, tout récemment, à une compréhension aussi solide du calcul différentiel de Leibniz. Mais en discuter ici m'entraînerait trop loin (cf. [15]). Aussi n'est-ce pas de différentielles que je veux parler ici, mais de *l'usage des variables en mathématiques*.

« En toute rigueur j'aurais dû écrire des Hom »

Depuis que j'enseigne les mathématiques, l'un de mes principaux sujets de perplexité est la difficulté qu'ont les étudiants à interpréter géométriquement des calculs, ou inversement à traduire sous forme « calculatoire » des énoncés géométriques. Constatant l'étendue du désastre en Maîtrise, nous sommes nombreux à diagnostiquer une compréhension insuffisante de l'algèbre linéaire, prenant sa source dès la première année d'université. J'ai longtemps pensé que le nœud de la difficulté se trouvait dans la notion de *dualité* : en effet, que sont les « coordonnées » x_1, \dots, x_n dans la traduction « calculatoire » d'un problème de géométrie vectorielle, sinon des *fonctions linéaires sur l'espace E considéré*, formant une *base de l'espace dual* ? Après de nombreuses tentatives pour « faire passer en douceur » cette idée en DEUG 1ère année (dont une particulièrement désastreuse en 96-97), il m'apparaît aujourd'hui que

(1) la notion de *fonction linéaire sur un espace vectoriel* exige, pour être maîtrisée sous tous ses aspects, un long temps de maturation et il est illusoire d'espérer la circonscrire dans le cadre d'un enseignement semestriel ;

(2) ne pas maîtriser cette notion n'empêche pas les étudiants de savoir raisonner sur les *coordonnées*.

Exercice n° 1. — *On donne explicitement un changement de base et l'on demande d'explicitier les coordonnées dans une base en fonction des coordonnées dans l'autre.*

³ L'ethnie des *Purtheumas* a été étudiée par Didier Nordon ([14]).

Dans le cas $n = 2$ (vecteurs du plan) cet exercice peut être posé tel quel à un lycéen, qui saura le résoudre sans rien savoir sur les « fonctions linéaires » et sur « l'espace dual » ! (les coordonnées d'un vecteur dans une base sont des *nombres* et le fait que ces nombres « soient fonctions linéaires du vecteur » n'a pas besoin ici de focaliser l'attention).

J'ai repensé à cet exemple un jour où j'écoutais en séminaire un jeune et brillant géomètre nous parler de...⁴. Le séminaire ne se déroulait pas du tout selon le rituel décrit par Didier Nordon dans [14] : aucun signe de somnolence sur les bancs, échanges *non incantatoires* entre l'orateur et l'auditoire (pourtant composé de non spécialistes)... Soudain l'orateur s'est arrêté devant l'équation qu'il venait d'écrire et a proféré ces mots :

J'ai fait là un abus de notation. En réalité, devant cette équation il faudrait un quantificateur « pour tout u », et les v, w, \dots sont fonctions linéaires de u . En toute rigueur j'aurais dû écrire des Hom.

Il m'est alors venu une bouffée de reconnaissance pour l'orateur : ton équation a été très bien amenée (ai-je pensé), merci, mille fois merci de ne pas avoir « écrit des Hom » ! Mais de quel « abus » t'excuses-tu et en quoi as-tu ainsi failli à la rigueur ? Ton équation n'était-elle pas juste ? Bien sûr il y manquait une information, que tu as rajoutée au moyen d'un commentaire « méta », en langage non formalisé. Mais mettre en forme le commentaire « v est fonction linéaire de u » est à la portée du premier mathématicien venu, de sorte que tu es d'avance absous par Bourbaki ([6]) :

« l'emploi des ressources de la rhétorique devient dès lors légitime, pourvu que demeure inchangée la possibilité de formaliser le texte ».

Ce n'est donc pas un impératif de « rigueur » qui aurait pu t'inciter à « écrire des Hom » (incitation à laquelle ton flair pédagogique t'a fait résister). C'est l'idée qu'en principe *la bonne formalisation* de ton idée doit s'écrire avec des « Hom ». Mais *quel* principe et qu'entend-on par *la bonne formalisation* ?

Variables muettes et mathématiques aveugles

Les mathématiciens d'aujourd'hui ont une curieuse tendance à s'excuser à tout bout de champ de leurs « abus de langage » ou « abus de notation », comme s'ils voulaient détourner notre attention de ce qu'ils disent ou écrivent *réellement* pour la diriger vers un texte formalisé virtuel qu'ils nous demandent de deviner « à l'horizon » (cf. l'Introduction du traité de Bourbaki [6], p.7). Certes, cette aspiration à une « formalisation complète » a fait accomplir durant ce siècle de grands progrès à la pensée mathématique et par exemple l'exercice consistant à « restituer », dans un fragment de texte mathématique en langage courant, les « quantificateurs sous-entendus » est certainement très formateur pour l'esprit.

Mais il peut être instructif *aussi* de s'interroger sur les textes mathématiques *tels qu'ils sont écrits en réalité* ! Voici quelques questions que l'on peut se poser pour analyser un tel texte, ou lorsqu'on se propose d'en écrire un.

⁴ Le sujet importe peu pour mon propos. En fait il s'agissait des singularités des champs de vecteurs holomorphes.

– Niveau de formalisation : de quelle façon le texte est-il ventilé entre *formules* d'une part, *discours en langage courant* d'autre part ?

– Choix des variables : comment le choix des variables contribue-t-il à rendre les formules *lisibles* (formellement simples) et à rendre le texte *parlant* (porteur de sens) ?

Cette question du *sens* fait référence à un *contexte*, qui peut être celui du texte lui-même, ou aussi le *contexte culturel* du public visé et l'un des rôles des variables est de *renvoyer à ce contexte* : soit qu'elles aient déjà joué un rôle important dans la partie précédente du texte, soit qu'elles renvoient à la culture du lecteur (variables ayant un « sens physique » si l'exposé s'adresse à des physiciens, etc.).

Derrière ces deux questions se profile la délicate question de *l'abstraction* : le texte met-il en jeu plusieurs *niveaux d'abstraction* et par quels procédés fait-il passer d'un niveau à l'autre ? A cet égard, le mot *fonction* me paraît jouer un rôle charnière : par exemple comparez les expressions

« u est fonction sinusoidale de t »,

et

« la fonction sinus est périodique ».

Dans la première, le mot « fonction » joue un rôle « méta », et sert à nous informer sur une *relation* entre les variables. La seconde *fait abstraction des variables*, ce qui permet de *s'affranchir du contexte*. Le mot « fonction » y perd son rôle « méta » pour devenir un *concept mathématique*, dont on pourra trouver la définition dans n'importe quel dictionnaire moderne de mathématiques. Mais pourquoi donc n'y a-t-il aujourd'hui que les *dictionnaires de langue* pour mentionner le *premier* usage du mot « fonction » (l'usage « méta ») ? Je ne peux m'empêcher de voir là un effet pervers du succès de la théorie des ensembles, qui a permis aux mathématiciens de « chasser le méta de leur science ». Au lieu de s'interroger sur le rôle sémantique des variables et sur l'opportunité éventuelle de faire parfois *abstraction du sens*, on dispose grâce à la théorie des ensembles d'un procédé automatique pour faire abstraction des variables, à savoir la *collectivisation* : au lieu de raisonner sur une propriété $\mathcal{P}(x)$ on introduit l'ensemble P (si c'en est un) des valeurs de x vérifiant la propriété \mathcal{P} . Ainsi par exemple dans l'interprétation « bourbakiste » de la formule (1) du §1 x et y ne sont plus des *variables numériques* mais des *fonctions sur C* , fonctions qui sont d'ailleurs *fixées*, de sorte que la formule (1) cesse d'être une formule ouverte (à valeur de vérité dépendant des valeurs des variables) pour devenir une formule *close* (et vraie!).

Mesure-t-on bien tout le chemin dans l'abstraction qu'il a fallu parcourir pour en arriver là ? Est-elle si innocente, la démarche « collectivisante » consistant à poser

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 2x + y = 10\}$$

de façon à *rendre muettes les variables numériques x et y* , puis à *ré-utiliser les lettres x et y dans un sens plus abstrait* ?

Certes, ce type de « collectivisation » procure au mathématicien qui la maîtrise un grand confort dans l'abstraction ; mais s'il n'y prend pas garde, il risque

ainsi *sans même s'en rendre compte* de travailler à un niveau d'abstraction inutilement élevé, privant son auditoire ou son lecteur des *fenêtres ouvertes sur le sens* que sont les variables de bas niveau et lui demandant ainsi des efforts que la nature du problème ne justifiait peut-être pas.

Donnons un autre exemple : quand pour discuter les solutions d'un système d'équations linéaires on passe par la notion d'*application linéaire* (avec les notions corrélatives de « noyau » et d'« image »), il faut être conscient du fait qu'on a transformé en « variables muettes » les inconnues du système, c'est-à-dire peut-être *les seuls objets qui (dans le contexte étudié) étaient parlants pour le public visé!* (lire à ce sujet le très intéressant article de P. Lombard [11], sur lequel je reviendrai plus loin).

Loin de moi l'idée de faire le procès de l'abstraction, démarche mathématique par excellence! Mais décider *en toute conscience* de fermer momentanément certaines fenêtres est tout autre chose que de s'enfermer définitivement, par crainte des courants d'air, dans un monde où toutes les fenêtres sont murées — ce monde des Purtheumas dont Didier Nordon nous dit que bien peu de gens en reviennent, une fois qu'ils ont réussi l'exploit d'y pénétrer!

Petit test : êtes-vous Purtheuma ?

(1) Pensez-vous que dans le polynôme à une indéterminée $X^2 + X + 1$ la lettre X « désigne » la suite $(0, 1, 0, 0, \dots)$, tandis que le « 1 » est un « abus de notation » pour la suite $(1, 0, 0, 0, \dots)$?

(2) Une *relation* est-elle pour vous un couple formé par un ensemble produit et un sous-ensemble de ce produit? Etes-vous d'accord pour dire⁵ qu'« en toute rigueur il n'est de relation qu'entre ensembles »?

Exemple. — Expliquez ce qu'est pour vous une *relation de dépendance linéaire*.

(3) En feuilletant un polycopié niçois d'algèbre linéaire de DEUG 1ère année vous tombez sur l'énoncé suivant ([16], §5) :

Théorème 5.1. — *Soit (u_1, \dots, u_n) un n -uplet de vecteurs tel que r d'entre ses membres soient linéairement indépendants et pas davantage. Alors parmi les relations vérifiées par ce n -uplet on peut en trouver $n-r$ qui soient linéairement indépendantes et pas davantage.*

Vous dites-vous

— Cet énoncé ne mérite pas d'être appelé « théorème ». Il s'agit tout au plus d'une paraphrase, en langage intuitif, du théorème $\dim \ker f = n - \dim \operatorname{Im} f$ pour une application linéaire $f : \mathbb{K}^n \rightarrow E$

ou bien

— Tiens! Voyons un peu comment l'auteur s'y est pris pour donner un statut mathématique précis à cet énoncé!?

Le regard de la logique

95% des mathématiciens se moquent éperdument de ce que peuvent faire tous les logiciens... Cela ne les intéresse absolument pas.

(J. Dieudonné [7])

⁵ (avec Stella Baruk [3])

Depuis quelques années on entend souvent les enseignants de mathématiques se plaindre de ce que les étudiants « ne savent plus raisonner », « manquent de logique »... A vrai dire ils se plaignent de bien d'autres « manques » encore et à les entendre on peut penser que les étudiants d'aujourd'hui n'apprennent plus rien au lycée ! Mais cette plainte du « manque de logique » me semble mériter une attention particulière, car on ne l'entend pas seulement chez les mathématiciens mais aussi chez les collègues d'autres disciplines scientifiques (par contre, je n'ai jamais entendu un physicien se plaindre de ce que nos étudiants maîtrisent mal la théorie des ensembles !). En rapprochant ce constat de la phrase lapidaire de Dieudonné rappelée ci-dessus, un ingénu pourrait être tenté de penser que si les étudiants d'aujourd'hui « manquent de logique », c'est la faute des mathématiciens ! Pour leur défense, ceux-ci pourront rétorquer que le mot « logique » recouvre en fait plusieurs choses assez différentes :

- (1) Un *art* de « raisonner juste », bien commun de tous les scientifiques mais que les mathématiciens pensent maîtriser au plus haut degré.
- (2) Une *discipline mathématique*, née des efforts des mathématiciens pour transformer « l'art » ci-dessus en une *science*.
- (3) Un *système* érigé au début du vingtième siècle, réputé garantir le « bien-fondé » des mathématiques.

Il ne viendrait à l'idée d'aucun mathématicien de déprécier la logique au sens 1. Quant à la logique au sens 3, on apprend en lisant la suite du texte de Dieudonné que « ce système répond exactement aux besoins de tous les mathématiciens » (j'aurais pourtant aimé lire quelque chose sur le rôle purement académique de « mythe fondateur » que ce système joue dans la communauté des mathématiciens : n'est-il pas vrai que *dans leurs pratiques* les mathématiciens se soucient fort peu de Zermelo-Frankel et que s'il leur arrive d'y faire allusion ce n'est que de façon incantatoire, histoire d'impressionner les étudiants ?).

Mais que dire de la logique au sens 2 ? Depuis l'époque où Dieudonné écrivait, elle a sans doute gagné en respectabilité, nourrie comme elle l'a été par les problèmes concrets posés par l'informatique. Mais je ne suis pas sûr que tous les mathématiciens soient bien conscients de la différence fondamentale qui sépare les acceptions 2 et 3 du mot « logique », *indépendamment de toute considération historique* : c'est la différence entre une *science* et un *système*. Un système se veut *fermé*, alors que la démarche scientifique se veut *ouverte*, sous-entendant l'existence de « réalités » qu'il s'agit de « modéliser », l'idée que nous nous faisons de ces réalités pouvant évoluer, de sorte que l'adéquation du modèle à la réalité n'est jamais acquise définitivement. Il serait intéressant de faire un sondage parmi les mathématiciens, pour leur demander de répondre à la question suivante :

les mathématiques sont-elles une science au sens précédent ?

Les partisans du OUI seront-ils minoritaires⁶? J'aurai au moins le réconfort de pouvoir y compter quelques grands noms, comme en témoignent les citations suivantes.

V. Arnold [2] :

Le schéma de construction d'une théorie mathématique ressemble tout à fait à celui de n'importe laquelle des autres sciences naturelles. Au début nous étudions certains objets, nous faisons des observations dans différentes circonstances. Puis nous cherchons à trouver les limites d'applications de nos observations, nous cherchons des contre-exemples, en évitant de trop généraliser...

Y. Manin [12] :

In this book mathematical logic is presented both as part of mathematics and the result of its self-perception. (...) Foundational problems are for the most part passed over in silence. Most likely, logic is capable of justifying mathematics to the same extent than biology is capable of justifying life.

Dès lors que l'on regarde la pensée mathématique (et les textes qui la traduisent) comme une *réalité vivante*, on devrait tout naturellement s'intéresser à la logique (au sens 2) et aux outils conceptuels qu'elle nous fournit pour mettre en relation les divers niveaux de formalisation qui constituent la pratique des mathématiques⁷. Encore faut-il comprendre ici la logique comme *science* au plein sens du mot, sans la réduire à son seul aspect *formel*. Une lecture très éclairante à ce sujet est celle de Quine ([17]), dont je vous propose d'encadrer en lettres d'or l'extrait suivant :

La tâche qui consiste ainsi à paraphraser un énoncé et à isoler sa structure significative est tout aussi capitale pour la logique que le test, ou preuve, d'implication auquel cette tâche préliminaire ouvre la voie.

J'ai découvert Quine grâce à la thèse de Viviane Durand-Guerrier [9], qui contient d'intéressantes analyses du « manque de logique » des étudiants, ainsi que des non-dits ou incohérences qui sous-tendent la « logique » de leurs professeurs. Un exemple universellement répandu de « non-dit » consiste à *sous-entendre les quantificateurs*, comme lorsque l'on écrit « si $x > 0$, alors $x^3 + x > 0$ » (le quantificateur $\forall x$ est sous-entendu). V. Durand-Guerrier donne l'exemple d'un manuel dont les auteurs, plus scrupuleux, édictent la règle suivante : « quand une proposition, notamment une implication ou une équivalence, est donnée sans quantificateurs, c'est le quantificateur universel qui est sous-entendu ». Elle fait remarquer que cinq pages avant, le même manuel

⁶ Parmi les partisans du NON, on peut compter notre actuel ministre [1]. Il est vrai qu'il n'est pas mathématicien, mais son opinion doit sans doute quelque chose aux professeurs de mathématiques qu'il a eus sur les bancs de l'université! Le texte de Dieudonné déjà cité nous apprend que les 5% de mathématiciens qui s'intéressent à la logique sont notamment « ... les constructivistes américains, tels Bishop et ses élèves, qui sont fortement troublés par les difficultés des rapports des mathématiques avec le réel, etc., toutes choses dont les mathématiciens, les autres 95%, se moquent éperdument ».

⁷ Par exemple lorsque l'on fait un « calcul en coordonnées » un premier niveau de formalisation est celui du calcul lui-même, qui porte sur des variables *numériques*; le passage à l'interprétation géométrique se fait via une *interprétation des variables* (notion de « système de coordonnées »). Ainsi comprise comme une notion « méta », la notion de système de coordonnées est tout à fait accessible à un débutant. C'est d'avoir voulu la mathématiser trop tôt qui m'a valu les déboires auxquels je faisais allusion au début du §2.

proposait des exercices dont les énoncés violaient cette règle (le signe \Rightarrow y apparaissait dans des énoncés ouverts, où aucun quantificateur ne pouvait raisonnablement être sous-entendu)! De telles contradictions me paraissent très révélatrices d'une tension entre la *pratique réelle* des mathématiques, où comme dans toute science on doit souvent travailler sur des énoncés *ouverts* et un *désir de fermeture* que résume le slogan (longuement discuté dans [9], chap.5) :

un énoncé mathématique est soit vrai soit faux!

J'ai fait l'expérience de cette tension l'an dernier en préparant avec un collègue une feuille d'exercices d'algèbre linéaire : je lui proposais une batterie d'exercices portant sur des triplets de vecteurs (u, v, w) non donnés explicitement mais sur lesquels on donnait certaines informations ; l'énoncé se terminait par la phrase : « les vecteurs (u, v, w) sont-ils linéairement indépendants ? » — suivie d'une phrase que j'avais rajoutée par égard pour les étudiants (pour ne pas les prendre en traître!) : « dans chacun des cas proposés, cochez l'une des trois cases oui, non, l'information donnée ne permet pas de conclure ». Le collègue chargé de rédiger la feuille n'a pas aimé cette façon de poser la question, qu'il a trouvée trop insolite. Après d'intenses cogitations il a fini par adopter la formulation suivante :

la famille (u, v, w) est-elle nécessairement libre, ou nécessairement liée ?

Bravo! Il avait trouvé une façon élégante de *fermer la question*, de façon à ce qu'on ne puisse répondre que par oui ou par non!

Certes, sa formulation avait sur la mienne l'avantage de la concision. Mais le vrai problème que soulève cette anecdote est le suivant : *pourquoi évitons-nous de poser à nos étudiants des questions auxquelles la seule réponse raisonnable serait « on ne peut pas savoir, ça dépend⁸ » ?* Est-ce ainsi que nous allons former leur esprit scientifique ? Ou alors, « l'esprit mathématique » se distinguerait-il de l'esprit scientifique en général par sa plus grande propension à « fermer les énoncés », de façon à obtenir des vérités simples et définitives ? Le classement des mathématiques en numéro 1 dans la classification d'Auguste Comte signifierait alors qu'en fait « La Mathématique » est la *reine de toutes les scolastiques* (ce que confirme l'étymologie grecque : « mathétès » = élève). De ce point de vue, il est incontestable que la théorie mathématique par excellence est la théorie des ensembles, *cette merveilleuse machine à fermer les énoncés* (relire le §3)! Qu'il est confortable, ce formalisme qui « recouvre la totalité des mathématiques » et permet ainsi de ne plus se poser de questions sur les liens entre divers niveaux de formalisation! Plus question *d'interpréter* des variables⁹! Plus question de parler de « modèle », on vit sous le règne du *formalisme unique, réputé s'identifier à la réalité*, de sorte que « La Mathématique » toute entière est fermée sur elle-même!

⁸ Voir à ce sujet les expériences pédagogiques de Marc Legrand[10].

⁹ Le mot « variable » a-t-il d'ailleurs sa place dans l'édifice mathématique moderne ? Voyez comme le dictionnaire de Bouvier et Georges [4] est pudique et embarrassé à son sujet!

Alors, quand on vient nous parler de la logique du premier et du deuxième ordre¹⁰, de fonctions récursives et de modèles, théories très gentilles et très belles qui ont obtenu des résultats remarquables, nous, mathématiciens, nous ne voyons aucune objection à ce qu'on s'en occupe, mais cela nous laisse entièrement froids [7].

Dessine-moi un mouton

Aux temps bénis du « bourbakisme pur et dur » tout professeur de mathématiques qui se respectait mettait un point d'honneur à ne pas faire de dessins. Aujourd'hui au contraire il est de bon ton de dire « je ne suis pas bourbakiste, je fais des dessins »— et de s'étonner du peu d'empressement des étudiants à suivre le bon exemple : « on a beau leur dire, ils s'obstinent à ne pas faire de dessins ». Nos étudiants seraient-ils plus « bourbakistes » que leurs professeurs ?

Une expression familière me revient en mémoire, souvent entendue dans mon enfance, dans la bouche d'une aïeule agacée que ses paroles ne soient pas suivies d'effet : « on leur dit ça, c'est comme si on chantait ! ». Et si au lieu d'illustrer nos démonstrations par des dessins, nous essayions de les agrémenter par des chansons ? J'ai l'air de plaisanter, mais vous-êtes vous déjà interrogés sur le statut *réel* des dessins dans notre enseignement ? Vous arrive-t-il souvent de tenir un discours où *les dessins jouent un rôle clef*, c'est-à-dire qu'en supprimer les dessins lui ferait perdre toute cohérence ? Vous arrive-t-il parfois de proposer un exercice *dont la donnée est un dessin* ? A propos d'une notion comme celle de *produit scalaire*, vous arrive-t-il de faire travailler les étudiants sur *le produit scalaire de la géométrie du lycée, celui qui se mesure avec la règle et l'équerre* ? Non bien sûr, car cela obligerait à sortir du schéma « définition-théorème-démonstration » pour suivre le schéma « expérience-modèle-étude du modèle-conclusions-vérifications par l'expérience » (cf. Arnold [2] p.25) !

« Faire des dessins » n'est pas seulement un *art* que l'on pourrait apprendre par simple imitation. C'est une véritable *science*, qui met en jeu des *concepts* ! Quelle richesse de « non-dits » se cache dans la phrase « faisons un dessin dans \mathbb{R}^2 », devenue aujourd'hui si courante dans la bouche des universitaires qu'ils ne se rendent même plus compte de ce qu'elle a de comiquement absurde ! De grâce, acceptons de faire des dessins *dans le plan* (ou *au tableau*, ou *sur le papier*) et n'ayons pas peur de discuter *scientifiquement* de ce que cela signifie !

Vous voulez un exemple ? Voici, résumée en quelques lignes, une activité assez riche pour nourrir toute une séance de travaux dirigés de DEUG (on peut la voir comme une introduction géométrique à la réduction de Gauss des formes quadratiques, ou comme un introduction à « l'oubli de la structure euclidienne » en géométrie affine).

¹⁰ Une logique du deuxième ordre est une logique où les quantificateurs peuvent porter non seulement sur les *variables* de la théorie mais aussi sur des *relations* (au sens métamathématique) entre ces variables. Par exemple le chap.3 du livre de Manin [12] utilise une théorie logique où toutes les variables sont exclusivement *numériques*, mais où l'on peut néanmoins quantifier sur les *fonctions*. Il me semble que réfléchir à de telles logiques pourrait nous éclairer sur certaines des difficultés qu'ont nos étudiants à faire des raisonnements quelque peu généraux sur les fonctions (pour un étudiant frais émoulu du lycée, la notion de « fonction » n'est-elle pas une notion métamathématique, associée dans son esprit à certains types de *formules*?).

Les avatars d'un cercle

a) Dessiner la courbe $x^2 + y^2 = 1$, d'abord en interprétant x, y comme coordonnées dans un repère orthonormé du plan, puis comme coordonnées dans un repère quelconque (on pourra s'aider en coloriant d'abord la zone $(|x| \leq 1 |y| \leq 1)$).

b) Dans le repère dessiné ci-dessous, dessiner la courbe d'équation $x^2 - 6xy + 13y^2 = 1$ (idée : remarquer que le premier membre s'écrit $(x - 3y)^2 + 4y^2$, et se ramener au cas a) par un changement de coordonnées).

N.B. L'exercice b) peut être vu comme une illustration de la « dualité » *changement de repère/changement de coordonnées* : cf. l'exercice du n° 1.

J'ai été très frappé d'entendre l'an dernier deux collègues du secondaire discuter de la façon dont en classe de seconde elles montraient à leurs élèves comment dessiner la courbe $y = x^2 - x + 2$: « je me ramène au cas $y = x^2$ par une translation du plan »— disait l'une ; « moi, je préfère un changement de repère »— disait l'autre. Je me suis demandé en les écoutant ce qu'en penseraient nos collègues universitaires qui « dessinent dans \mathbb{R}^2 » ! J'ai pensé à ces cours de calcul différentiel de licence qui énoncent froidement :

Définition : on appelle *difféomorphisme*, ou *changement de coordonnées*,...

Voilà comment le refus des considérations « méta » (joint au souci louable de ne pas introduire de concepts trop sophistiqués comme ceux de « variété », etc.) conduit les universitaires à *tout mélanger, effaçant des distinctions dont l'importance pratique apparaît dès la classe de seconde* ! Si telle est notre conception des maths, alors soyons honnêtes et faisons comme ce collègue qui commence son premier cours de DEUG 1ère année en déclarant à ses étudiants : « ce que vous avez appris au lycée n'est pas des maths, maintenant vous allez commencer à faire des maths !¹¹ »

Loin de moi l'idée de proposer les « maths du lycée » comme un idéal à suivre à l'université ! Mais avant de nous lamenter sur le niveau des étudiants qui nous arrivent du lycée, nous ferions mieux de nous interroger sur notre propre responsabilité (à nous universitaires) dans la rupture secondaire/université. Quinze ou seize ans nous séparent aujourd'hui de la contre-réforme qui a consacré l'abandon des « maths modernes » au lycée. A mi-parcours, Philippe Lombard[11] écrivait ces lignes que je trouve tragiquement prémonitoires :

Les conditions sont ainsi réunies, soit d'une nouvelle crise, soit d'un nouveau rendez-vous manqué. Et ceux qui voudraient en apercevoir les causes les trouveraient sans peine : (...) on a formé — et (...) l'on forme toujours — des promotions entières de professeurs pour enseigner les mathématiques dans l'état d'esprit des programmes de 1970, alors que les programmes que l'on se propose de mettre en place supposent, pour fonctionner efficacement, une rupture presque totale avec cet état d'esprit.

En quoi la vision des mathématiques qui prévaut aujourd'hui à l'université est-elle *fondamentalement* différente de celle de l'époque dite « bourbakiste » ? Certes, on fait des dessins et peut-être (?) davantage de commentaires qu'autrefois, mais « comme si on chantait », car il ne faudrait surtout pas que ces « ornements » viennent entamer la solidité du bloc monolithique qu'est l'édifice formel. Changer *vraiment* d'état d'esprit, ce serait reconnaître pleinement

¹¹ Air connu : « ce traité prend les mathématiques à leur début » [6] !

aux mathématiques leur statut de *science expérimentale*, dont les concepts servent (comme dans toute autre science) à *interpréter ou prévoir des résultats d'expériences* (qu'elles soient graphiques, numériques,... ou expériences de manipulation de formules!).

Qu'on me comprenne bien : il ne s'agit pas de vider les mathématiques de leur caractère conceptuel, mais bien au contraire de *redonner aux concepts tout leur sens!*

« ... il n'est pas d'expérience (...), même simple et transparente au premier abord, qui ne se situe à l'intérieur d'un cadre théorique précis, hors duquel elle perdrait toute signification tant soit peu générale : il ne s'agit pas seulement d'observer, très attentivement et dans les moindres détails, ce qui se passe dans telle situation concrète que l'on a construite (...); l'important est de tenter d'identifier ce qui *va* se passer dans une *autre situation*, serait-elle très proche de la première. Et cette parcelle d'universalité que porte en elle une expérience (...) ne peut être perçue, dégagée et éventuellement délimitée qu'à travers les concepts introduits par la théorie, et les relations qu'elle postule entre eux¹².

Si les maths du lycée ont perdu tout caractère conceptuel, si la démarche qu'elles proposent aux élèves se réduit trop souvent à « observons..., constatons..., admettons... », n'est-ce pas parce que l'enseignement universitaire n'a su transmettre en fait de concepts mathématiques que des coquilles vides, déconnectées de toute expérimentation? Si les lycéens « ne savent plus raisonner », n'est-ce pas en partie parce que les mathématiques universitaires ont propagé une vision intégriste de la rigueur, inexportable au lycée car excluant toute réflexion sur les « formalisations partielles et incomplètes...¹³ » qui constituent la pratique des mathématiques? Ne restons-nous pas prisonniers d'une idéologie qui refuse de s'intéresser à la *réalité* des pratiques formelles, en dehors du *modèle* qu'en fournit la théorie des ensembles?

Je suis effaré de voir qu'aujourd'hui comme il y a vingt ans on continue commencer des cours de première année d'université par une semaine (sic) de « rappels de logique-et-de-théorie-des-ensembles »! Le mot « rappels » doit-il être compris ici comme « rappels de ce que les étudiants savaient autrefois en entrant à l'université, au bon vieux temps où on leur enseignait la théorie des ensembles dès la maternelle »? Dans le même état d'esprit, un enseignant de n -ième année commencera son cours par une semaine de « rappels de... » (insérer ici ce que les étudiants d'autrefois étaient censés savoir en entrant en n -ième année). L'avantage de cette scolastique est évident : les programmes sont d'une cohérence sans faille, du moins sur le papier, sans que les enseignants aient besoin de se fatiguer à se concerter pour harmoniser leurs enseignements! Le

¹² Bernard Diu[8] : il s'agit d'un ouvrage de vulgarisation racontant l'histoire des concepts de la thermodynamique. J'aime bien (entre autres) les réflexions sur l'enseignement par lesquelles commence le premier chapitre « Qu'est-ce que la physique? » (1er paragraphe : science théorique ou science expérimentale?).

¹³ Suite de la citation (Bourbaki[6]) : « ... dont le calcul algébrique usuel est l'exemple le plus connu ». Pour la version « intégriste » du « calcul algébrique usuel », cf. la question 1 du petit test : « Etes vous Purtheuma? ».

Autre exemple « d'intégrisme ensembliste », d'autant plus désolant qu'il est devenu réflexe conditionné chez la plupart des collègues : le concept de « relation d'équivalence » est automatiquement associé à ceux de « partition d'un ensemble » et d'« ensemble-quotient » : cf. la question 2 du petit test : « Etes vous Purtheuma? ».

professeur n'a pas besoin de se soucier de ce que les élèves savent vraiment, puisque de toutes façons il « rappelle » tout ce dont il va avoir besoin ! Au terme d'une scolarité ainsi conçue, nos étudiants auront « vu » toutes les mathématiques — comme ces touristes à qui un voyage organisé a fait « voir » toute la Chine (Pékin, la grande muraille, Canton, Shanghai...) en sept jours. Pourvu qu'on n'aie pas l'idée saugrenue de se demander ce qu'ils en ont *compris*, le système est d'une stabilité à toute épreuve. Sa seule source immédiate de fragilité est la possibilité de malentendus entre profs et élèves sur ce que ces derniers doivent faire pour être reçus à l'examen : sur ce point nous avons encore des progrès à faire et l'enseignement secondaire est en avance sur nous, avec son « bac » aux taux de réussite garantis !

Mais qui acceptera de croire qu'en empilant des caisses sur lesquelles on a collé l'étiquette « mouton » on fait un travail de berger ? Comment nos « petits princes », qu'on force à accepter ce jeu de « faire semblant », peuvent-ils y trouver un intérêt quelconque ? Réjouissons-nous si nombre d'entre eux trouvent le jeu stupide ! Peut-être est-ce grâce à eux que nous allons apprendre à faire évoluer notre vision des mathématiques. Mais notre collectivité saura-t-elle se donner la *liberté* indispensable à une telle évolution ? Ou faudra-t-il d'abord que tout le système implose, à l'instar de tel système politique qui s'est effondré en raison même de sa surstabilité ?

Références

- [1] C. ALLÈGRE *La défaite de Platon*, Fayard 1995
- [2] V. ARNOLD *Gazette des Mathématiciens* n° 78 (Octobre 1998)
- [3] S. BARUK *Dictionnaire des mathématiques élémentaires*
- [4] A. BOUVIER, M. GEORGES *Dictionnaire des mathématiques*, PUF 1979
- [5] J.-P. BOURGUIGNON *Gazette des Mathématiciens* n° 74 (Octobre 1997)
- [6] N. BOURBAKI *Théorie des Ensembles* Introduction.
- [7] J. DIEUDONNÉ in *Penser les mathématiques* (Séminaire de philosophie et mathématique de l'École normale supérieure, F. Guénard et G. Lelièvre éd.), Seuil 1982
- [8] B. DIU *Les atomes existent-ils vraiment ?*, Odile Jacob 1997
- [9] V. DURAND-GUERRIER *Logique et raisonnement mathématique* (Thèse, Univ. de Lyon I, 1996)
- [10] M. LEGRAND *Repères-IREM* 10, janv.1993 ; *Repères-IREM* 20 et 21, juil. et oct.1995
- [11] P. LOMBARD *Repères-IREM* 2, janvier 1991.
- [12] Y. MANIN *A course in mathematical logic* (english translation), Springer Verlag 1977.
- [13] D. NORDON *Les mathématiques pures n'existent pas* Actes Sud éd., 1981.
- [14] D. NORDON *Gazette des Mathématiciens* n° 67 (Janvier 1996).
- [15] F. PHAM *Calcul différentiel à l'ancienne* (chap.1 de la nouvelle édition de *Géométrie et calcul différentiel sur les variétés*), Dunod-Masson 1999
- [16] F. PHAM *Les mécanismes fondamentaux de l'algèbre linéaire* (prétirage PUPÉ n° 30, Nice, février 1998)
- [17] W. QUINE *Méthode de logique* Armand Colin 1972 (traduit par M. Clavelin)

Le bogue de l'an 2000

Est-ce bien sérieux ?

Martine OTTER (*Directeur Qualité & An2000 - Experian*)

Que risque-t-il réellement de se passer ?

Les problèmes sont identifiés. Les professionnels sont alertés. Des dizaines de milliers de programmeurs travaillent dans tous les pays du monde à la correction du bogue. Des techniques de tests sophistiquées sont mises en œuvre.

Alors, que va-t-il vraiment se passer ?

Première hypothèse : Il ne va rien se passer, ou rien que l'on pourra réellement imputer au passage à l'an 2000. Seulement le taux ordinaire de pannes et dysfonctionnements divers lié à la non qualité résiduelle de nos technologies. Cette hypothèse est quand même très optimiste compte tenu, non pas de la complexité du problème qui est finalement techniquement assez trivial, mais plutôt compte tenu de l'impossibilité de procéder à temps à l'ensemble des modifications et vérifications nécessaires sur l'ensemble des composants matériels et logiciels potentiellement concernés.

Deuxième hypothèse : Celle du scénario catastrophe.

- Quelques missiles russes, n'ayant pas reçu le signal convenu d'ordinateurs distants dans les bons délais, se déclenchent intempestivement et nous empêchent de nous poser d'autres questions,
- Quelques centrales nucléaires ne détectent plus convenablement la température des réacteurs et explosent.

Troisième hypothèse intermédiaire, celle de l'accumulation de perturbations diverses et erreurs de calcul dont la résolution nous demandera un peu de patience, d'énergie et d'humour :

- Retards dans le paiement des salaires, dans le versement des indemnités de chômage ou des remboursements de Sécurité Sociale,
- Commandes perdues, livrées en retard,
- Factures fausses,
- Intérêts mal composés,
- Cartes bancaires bloquées,
- Coupures intempestives d'électricité ou de téléphone,
- Quelques ruptures dans la chaîne du froid,
- Cloches des églises refusant de sonner le dimanche 2 janvier (elles croiront que c'est un mardi),
- Avions ne décollant pas, parce que les vérifications d'usage avant décollage détecteront des anomalies incongrues,
- Contrôleurs du ciel interdisant le décollage par erreur,
- Trains et métros s'interrompant brusquement à minuit.

Cette liste à la Prévert n'est sûrement pas la bonne. Il faudrait la compléter par les effets des festivités en tout genre, des risques de panique et par l'imagination sans borne des escrocs du monde entier.

A l'origine du bogue : La représentation informatique des dates

Qu'est-ce qu'une date ?

Question simple et complexe à la fois.

La date est une fonction croissante du temps utilisée pour repérer et classer les événements. Depuis le début de l'histoire, les civilisations humaines ont inventé diverses formes de notation de la date, fondées sur un décompte de jours solaires, de cycles solaires ou lunaires. Bien que subsistent des systèmes parallèles tels que le calendrier chinois, le calendrier arabe ou le calendrier juif, le plus répandu actuellement parmi ces systèmes de notation est celui utilisé dans notre calendrier Grégorien depuis 1582, date où Grégoire XIII, par l'effet d'une bulle papale réforma le vieux calendrier Julien en usage en Occident depuis Jules César, au prix d'une discontinuité de dix jours (on passa directement du 4 au 15 octobre 1582 à Rome, en Espagne et au Portugal, les autres pays d'Europe faisant disparaître ces dix jours à des dates s'étalant entre 1582 et 1752 pour l'Angleterre et la Suède). A l'époque dix jours d'écart dans les calendriers des différents pays d'Europe ne gênaient pas grand monde. Nous ne nous référerons donc dans la suite de cet article qu'au calendrier Grégorien.

La mesure du temps suppose le choix d'une origine et d'une unité de mesure. L'unité de mesure est la journée de 24 heures correspondant à l'intervalle entre 2 passages du soleil à son point le plus élevé dans le ciel. Le point 0 des années n'a été choisi qu'en 532 par le moine Denys Le Petit qui proposa de se référer à la date supposée de naissance du Christ comme début de l'ère chrétienne.

La date peut être représentée par un triplet de 3 nombres entiers :

Année, Mois, Jour_du_mois

Jour_du_mois est un entier qui varie de 1 à 28, 29, 30 ou 31, suivant le mois où l'on se situe.

Le mois, de Janvier à Décembre, est un entier variant cycliquement de 1 à 12.

L'année est un nombre entier qui vaut aujourd'hui 1999, que nous représenterons par aaaa. Les années ont 365 jours ou 366 pour les années bissextiles.

Représentation informatique de la date

La date est un type de données particulier utilisé par les ordinateurs et équipements électroniques divers.

Depuis le début de l'informatique, dans les années 1950, le stockage des dates sous forme numérique dans les fichiers ou dans la mémoire des ordinateurs a été effectué en ne prévoyant que 2 chiffres pour l'année, ce qui nous donne une valeur d'année modulo 100. Le coût de la mémoire et du stockage des données, sur bande magnétique puis sur disque magnétique, était si élevé que personne ne pouvait envisager de façon sérieuse de stocker la valeur d'une année sur 4 caractères. Jusque dans les années 70-80 on pensait d'ailleurs que la durée

de vie d'un logiciel ne dépasserait pas 20 ans et donc qu'aucune application existante ne fonctionnerait encore en l'an 2000.

Cette représentation quasi générale de l'année sur 2 chiffres est à l'origine de ce que nous appelons aujourd'hui le bogue (ou bug) de l'an 2000 : Le passage de 1999 à 2000 nous fera revenir à l'année 0 de ce cycle de 100 ans.

Des erreurs surviennent déjà

Une date représentée de façon interne par 6 chiffres : aammjj est en effet parfaitement ambiguë si l'on ne connaît pas son domaine de validité, c'est-à-dire les deux premiers chiffres de l'année. Dans les années 50, 60, voire 70, l'ambiguïté était rare. Les seuls logiciels s'intéressant à des événements futurs suffisamment éloignés dans le temps étaient les logiciels de calcul d'échéances de prêt, utilisés par les actuaires. Ces logiciels ont été modifiés ou réécrits les premiers pour éviter les erreurs de calcul :

Supposons que nous sommes le 1^{er} octobre 1980. Nous souscrivons un emprunt pour 20 ans. La date de fin prévue est donc le 1^{er} octobre 2000, représentée sur 6 chiffres en informatique sous la forme aammjj par 001001

A la fin du premier mois, le programme de calcul mensuel des échéances commence par un test de ce type :

Si date _du _jour < Date _de _fin

Prélever montant-échéance Sinon Clore le prêt.

Date _du _jour 801101 (1^{er} novembre 1980) est alors supérieur à
Date _de _fin 001001 (1^{er} octobre 2000) puisque $80 > 00$
et le prêt sera clos sans être remboursé. Amusant.

Les banquiers avaient (heureusement ou malheureusement suivant le point de vue auquel on se place) prévu le problème et les calculs de nos échéances se sont correctement effectués. L'intervalle de temps nous séparant du 1^{er} janvier 2000 diminue de jour en jour et des problèmes similaires apparaissent aujourd'hui lorsqu'une date calculée dans le futur atteint 00. Ceci concerne un nombre croissant de type d'événements divers :

— c'est le cas d'une date de péremption de produit frais ou de médicaments. Des stocks importants de médicaments ont été mis au pilon en 1998 du fait que la date du jour était supposée supérieure à la date de péremption indiquée sur l'emballage, lue automatiquement par un lecteur de code barre.

— C'est également le cas d'une date de fin de validité de carte bancaire. Certains terminaux commerçants ont refusé des paiements provenant de cartes dont la date de fin de validité était 00.

— De même, des permis de conduire accordés dans certains états des Etats-Unis pour 5 ans en 1995 ont dû être refaits car réputés périmés.

D'autres erreurs n'apparaîtront qu'à partir du 1^{er} janvier 2000

Un autre type de problème apparaîtra lorsque la date du jour passera à l'année 00 :

◊ Calculons l'âge d'une personne née le 3 février 1965. Si nous effectuons ce calcul le 3 février 1999, nous obtenons tout à fait normalement :

$$\text{Age} = \text{valeur_absolue_entière} (\text{Date_du_jour} - \text{Date_de_naissance}) = 99 - 65 = 34 \text{ ans}$$

Lorsque nous effectuerons ce calcul le 3 février 2000, nous obtiendrons cette fois, avec le même algorithme :

$$\text{Age} = \text{valeur_absolue_entière} (00 - 65) = 65 \text{ ans}$$

Décisions possibles entraînées par ce calcul :

- surprime d'assurance-vie
- droits liés à l'ancienneté dans le calcul du salaire
- calcul automatique des droits à la retraite
- envoi de publipostages ciblant le 3^e âge

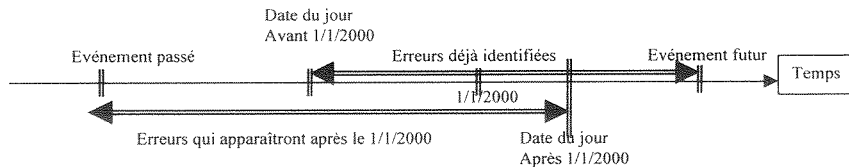
◊ Lorsque la date du jour fournie par l'ordinateur passera à 00, les licences de certains logiciels peuvent être déclarées périmées et les dits logiciels se retrouver inutilisables si le fournisseur n'a délivré aucun correctif (ou patch).

◊ Au passage du 31 décembre à minuit, des durées calculées, telles que des durées de communication téléphonique, passées à l'heure de pointe de souhait du nouvel an, pourront donner de bien curieux résultats :

Début d'appel : 31 décembre 1999 23h59mn
 Fin d'appel : 1^{er} janvier 2000 00h1mn
 Durée calculée d'appel : Fin d'appel – Début d'appel = 100ans – 2mn
 Soit un coût d'environ 9 Millions de francs.

On voit que des erreurs de calcul subsisteront pour les calculs de durée faisant intervenir des dates passées antérieures au 1^{er} janvier 2000.

Le schéma suivant fait apparaître les deux types d'erreur rencontrées suivant que l'on se situe avant ou après le premier janvier 2000.



La question du domaine de validité

Pour résumer le problème, utiliser une représentation de l'année sur 2 chiffres suppose que l'on travaille sur un intervalle de validité de 100 ans. L'hypothèse implicite faite par les informaticiens était qu'il s'agissait de l'intervalle 1900-1999.

2 solutions sont envisageables pour éviter ou corriger les erreurs :

- stocker l'année sur 4 chiffres au lieu de 2,
- prévoir pour chaque donnée de type date un mode d'emploi qui définisse l'intervalle de validité. Par exemple pour une date de péremption de médicament :

si $aa < 20$ alors Année = 20aa
 si $aa \geq 20$ alors Année = 19aa

La valeur pivot, égale ici à 20 peut se décaler de 1 chaque année. On suppose alors que le logiciel ou l'automate n'aura jamais à examiner de médicaments datant de plus de 80 ans.

Un tel algorithme, dit de fenêtrage, n'est pas applicable aux événements pour lesquels le domaine de validité couvrirait une période de plus de cent ans. Les dates de naissance des personnes vivantes rentrent dans cette catégorie. On ne peut décider sans autre information si quelqu'un né en 98 a un an ou 101 ans. Tout dépend du contexte.

Et le jour de la semaine risque aussi d'être faux

Le 1^{er} janvier 2000 sera-t-il un lundi, un mardi... ou un dimanche ?

Nous savons qu'il s'agira d'un samedi, jour à horaire d'ouverture particulier pour certaines activités. Or le 1^{er} janvier 1900 était un lundi. Un ordinateur non encore « compatible an 2000 » pourra considérer que le 1^{er} janvier 2000 est également un lundi (et pas un samedi).

Des dispositifs d'accès automatisés suivant les jours de la semaine (type digicode) risquent de fonctionner « comme un lundi » si leur horloge interne ne connaît que l'intervalle 00-99. Un système de contrôle sur une voie ferrée pourrait régler les aiguillages sur les horaires du lundi alors que les trains rouleraient suivant l'horaire du samedi.

Il n'y a pas que les logiciels

Le problème de l'an 2000 ne concerne malheureusement pas que les logiciels. L'ensemble des ordinateurs et équipements électroniques fonctionne en utilisant une ou plusieurs horloges internes qui en rythment le fonctionnement et fournissent une « date système » qui peut être utilisée à des fins diverses.

— Certains équipements peuvent déclencher une alarme si un signal particulier n'est pas détecté depuis un certain nombre de minutes, heures ou jours. On peut citer un ascenseur qui s'arrêterait le 31 décembre à minuit du fait qu'il n'aurait pas subi d'intervention de maintenance depuis plus de 100 ans.

— De même un TGV s'arrêterait brusquement du fait que son conducteur n'aurait pas actionné le dispositif de contrôle depuis plus du nombre de secondes normales.

Le fonctionnement d'un équipement électronique conditionnant un automatisme est beaucoup plus difficile à vérifier que celui d'un logiciel de gestion. Les tests de vieillissement sont la plupart du temps impossibles à réaliser.

En conclusion, quelques conseils de bon sens :

— avoir des relevés de comptes sur papier, des traces écrites de tous ses avoirs dématérialisés,

— diversifier ses moyens de paiement (si possible plusieurs comptes en banque dans des banques différentes, plusieurs cartes bancaires, des cartes de paiement multiples),

— éviter, voire supprimer, les autorisations de prélèvement automatiques,

— détenir quelques piles électriques, bougies et allumettes, un poste de radio fonctionnant sur pile,

— ne pas prévoir de déplacement en avion entre le 31 décembre et le premier janvier,

— se méfier des escrocs en tout genre.

Bibliographie :

Jean LEFORT *La saga des calendriers ou le frisson millénariste*, Bibliothèque pour la science, 1998

Quelques sites Internet français à consulter :

<http://www.an2000.gouv.fr/> Site officiel du gouvernement français sur le problème de l'an 2000.

<http://www.clusif.asso.fr> Position du CLUSIF (Club de la sécurité des systèmes d'information français) sur la Politique Gouvernementale Française.

<http://www.cigref.fr> Club informatique des Grandes Entreprises Françaises (Lobbying, aspects juridiques).

<http://blanche.polytechnique.fr/lactamme/Mosaic/descripteurs/An2000.01.Fra.html> Jean-François Colonna (Article sur les causes et conséquences).

<http://www.themis-rd.fr> Société THEMIS R&D (Commercial, aspects juridiques).