

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Kronecker. Sur le concept de nombre

Jacqueline BONIFACE

Introduction

L'article de Leopold Kronecker (1823-1891) « Sur le concept de nombre » (« Über den Zahlbegriff ») a été publié en 1887 dans le *Journal de Crelle*. Il s'agit du remaniement d'un texte paru, sous le même titre et la même année, dans le recueil pour le jubilé de doctorat d'Edouard Zeller, historien de la philosophie grecque. Helmholtz avait invité Kronecker à y participer en exposant sa conception du nombre ; le recueil commençait d'ailleurs par une dissertation de Helmholtz sur le même sujet.

Kronecker n'avait jamais auparavant rendu publique sa conception du nombre. Contrairement à sa manière habituelle de procéder : élaborer ses textes à l'occasion de ses cours à l'université, il écrit l'article sur le concept de nombre *avant* la série de cours, du semestre d'été 1891, donnée sur ce sujet¹ et qui fut la dernière qu'il professa. Le sujet l'intéresse pourtant depuis de nombreuses années, mais il suscite de violentes polémiques et Kronecker sait que ses idées sont déjà combattues avec vigueur par ses adversaires.

En effet, bien que Kronecker se situe dans le courant d'« arithmétisation » des mathématiques, selon lequel il s'agit de donner à l'ensemble des mathématiques la rigueur, reconnue par tous, de l'arithmétique, sa position cependant diffère de celle de la plupart de ses contemporains. Si tous partent des mêmes éléments de base, les nombres entiers, la démarche de Kronecker se fait en sens inverse de celle de Weierstrass, Cantor, Dedekind, ou Frege. A un processus d'*inclusion* de l'arithmétique dans l'analyse, qui caractérise les travaux de ces derniers et dont le but est de fonder l'analyse sur l'arithmétique, Kronecker oppose un mouvement de *rapatriement* de l'analyse au sein d'une arithmétique considérée comme *la* (seule) science du nombre. Loin de vouloir donner un fondement arithmétique aux concepts analytiques, il prétend écarter de la mathématique tous les concepts non arithmétiques, établissant entre ceux-ci et les concepts purement arithmétiques une différence *ontologique*. Il ne s'agit

¹ Kronecker souligne dans le premier cours de ce semestre d'été (cours du 6 mai 1891) qu'il n'avait jamais auparavant abordé ce thème dans un de ses cours.

donc pas pour Kronecker, comme c'est le cas pour Weierstrass ou Cantor, de redéfinir les concepts de l'analyse et des autres disciplines mathématiques en utilisant le nombre entier comme outil, ni comme c'est le cas pour Frege ou pour Dedekind, de donner un fondement au nombre entier qui permette, à partir de ce sol ferme et sûr, de reconstruire toute la mathématique. S'il s'accorde avec le projet d'arithmétisation de ses contemporains, c'est cependant dans un but tout différent, celui de *réduire* les mathématiques pures, c'est-à-dire l'arithmétique, l'algèbre et l'analyse, à une « arithmétique générale », en redonnant au nombre son sens restreint d'*arithmos*, de nombre entier positif. Cette réduction a pour raison de conserver au concept de nombre sa pureté originelle et sa signification liée au dénombrement, et devrait avoir pour stricte conséquence de ne conserver à l'intérieur de l'arithmétique que les nombres entiers positifs, et de rejeter à l'extérieur (c'est-à-dire, selon Kronecker de rapatrier vers les autres disciplines mathématiques, notamment la géométrie) toutes les autres grandeurs. Toutefois, Kronecker ne réserve pas le même sort à chacune de ces dernières.

Si les seuls *vrais* nombres sont bien pour Kronecker les nombres entiers positifs, les nombres négatifs et les nombres fractionnaires ne sont cependant pas absolument exclus de l'arithmétique ; ils sont appelés *grandeurs* plutôt que *nombres*, mais leur usage est toléré. Kronecker veut seulement éviter d'introduire les *concepts* de nombre négatif ou de nombre fractionnaire ; il montre que l'introduction de ces concepts peut être remplacée par l'utilisation des congruences et des indéterminées², qui va de plus *fonder* les règles de calcul des fractions.

Le sort réservé aux grandeurs irrationnelles est tout autre. Non seulement ces grandeurs ne sont pas des nombres, n'ont pas d'*existence arithmétique*, mais, à la différence des grandeurs négatives ou fractionnaires, elles n'ont pas droit de cité dans l'arithmétique. Les grandeurs irrationnelles sont des objets de la *géométrie* non de l'arithmétique et, selon Kronecker, il ne faut pas que les différents domaines scientifiques empiètent les uns sur les autres. Ce qui sépare radicalement les grandeurs irrationnelles des objets de l'arithmétique, est qu'elles ne peuvent être définies de façon constructive, c'est-à-dire par un nombre fini d'opérations arithmétiques, à partir de nombres entiers positifs. En effet, les définitions qui en ont été données nécessitent un recours soit à la notion de suite infinie (Heine, Cantor), soit à la notion de coupure (Dedekind), notions toutes deux non arithmétiques. Cependant, Kronecker réserve un sort particulier aux irrationnels de type algébrique. C'est bien sûr par l'introduction d'indéterminées qu'il est conduit aux fonctions entières, puis aux grandeurs algébriques et c'est avec une certaine réserve qu'il propose d'introduire ces grandeurs : cette introduction sera en effet jugée « superflue » dans tous les cas où il n'est pas nécessaire d'isoler les racines conjuguées d'une équation algébrique et Kronecker se donne pour tâche de montrer que l'« isolement lui-même peut aussi bien se faire sans l'introduction de nouveaux concepts »³.

² Cf. infra p. 60-61.

³ Cf. infra p. 63.

Il est intéressant de noter que plus de la moitié de l'article est consacrée au problème de la « séparation »⁴ des racines réelles d'une équation algébrique.

L'intérêt pour les racines réelles des équations algébriques est partagé par de nombreux mathématiciens du XIX^{ème} siècle. Kronecker cite d'ailleurs la méthode de Sturm⁵ qui, en 1829, donne un procédé particulièrement simple pour trouver le nombre exact de racines réelles d'une équation algébrique et une méthode de résolution numérique (c'est-à-dire de calcul approché des racines) inspirée de la procédure de Fourier⁶. C'est à partir de ses travaux sur les équations différentielles que Sturm avait été amené à étudier ce problème et l'on comprend que Kronecker ne se soit pas contenté de la résolution numérique de Sturm qui utilise la continuité des fonctions. Il rejette comme non purement mathématiques (c'est-à-dire comme non arithmétiques) les méthodes du calcul infinitésimal, mais par ailleurs, ne peut se satisfaire des résolutions algébriques, telles qu'elles avaient été établies notamment par Lagrange. En effet, la résolution générale des équations par les méthodes algébriques consiste à exprimer les racines comme fonctions des coefficients de l'équation. Une telle résolution ne se limite évidemment pas aux solutions entières ou même rationnelles, mais exprime également les solutions irrationnelles que Kronecker exclut par principe. C'est donc une troisième voie que recherche Kronecker : voie *arithmétique* qu'il cherche à tracer en remplaçant les théorèmes issus de la continuité des fonctions par de simples inégalités qui lui permettent d'obtenir, non une valeur, exacte ou approchée, de chaque racine réelle, mais une « séparation » de ces racines, c'est-à-dire des intervalles qui contiennent, chacun, une des racines et elle seule.

Soulignons encore la subtilité de la méthode de Kronecker et notamment de l'usage des deux nombres entiers notés « r ». Le premier donne, par un calcul immédiat, un intervalle contenant toutes les racines réelles de l'équation proposée⁷. Le deuxième, que nous avons noté \mathbf{r} , fournit un *analogon* arithmétique au fameux « ε » weierstrassien. En effet, étant choisi arbitrairement grand, son inverse donne un majorant « aussi petit que l'on veut » de la fonction $f(x)$ sur un intervalle aux bornes duquel la fonction $f(x)$ change de signe⁸ et dont l'amplitude est aussi fonction de l'inverse de \mathbf{r} .

Aujourd'hui, les idées de celui qui fut, aux côtés de Kummer et de Weierstrass, membre influent de l'Académie de Berlin, de 1860 jusqu'en 1891 (année de sa mort) et notamment sa philosophie mathématique, restent encore peu connues. On retient en général de Kronecker, outre son conflit avec Cantor et Weierstrass⁹, son projet de réduction des mathématiques aux nombres entiers

⁴ Cf. §suivant.

⁵ Pour une analyse très détaillée du théorème de Sturm, de ses sources et de son actualité, cf. Sinaceur 1991.

⁶ La méthode de Fourier était basée sur l'utilisation de fonctions dérivées de la fonction associée à l'équation à résoudre et sur des considérations géométriques. Pour plus de précisions cf. H. Sinaceur, op. cit., particulièrement chap. 4.

⁷ Cf. infra p. 63.

⁸ Notons que Kronecker ne dit pas que la fonction $f(x)$ s'annule sur cet intervalle. Il évite ainsi toute considération de continuité et se contente d'identifier une racine réelle d'une équation algébrique à un intervalle sur lequel la fonction change de signe une fois et une seule et dont les bornes sont des rationnels, voire des entiers.

⁹ Nous n'insisterons pas sur ces conflits et renvoyons aux nombreux articles de H. Edwards.

naturels et son finitisme¹⁰. Mais une connaissance souvent trop superficielle de sa position la fait paraître comme dogmatique et dépassée, tout comme la disparition de la majeure partie de sa correspondance ne nous laisse, des conflits qu'il a eus avec eux, que la version de ses adversaires. Une analyse attentive de la démarche de Kronecker en montre toutefois la très grande rigueur et le regain d'intérêt pour les méthodes algorithmiques, dû au développement des ordinateurs, s'accompagnera peut-être d'un retour à son arithmétique finitaire. Il paraissait donc opportun de proposer la traduction française¹¹ d'un texte dans lequel Kronecker développe ses idées sur le concept de nombre et qui constitue une des seules sources éditées de ses vues sur le sujet¹².

Bibliographie

EDWARDS (H. M.) [1987] An appreciation of Kronecker, *The mathematical Intelligencer*, vol. 9, n° 1, Springer, New-York.

[1988] Kronecker's Place in History, *Minnesota Studies in the Philosophy of Science*, vol. XI : History and Philosophy of Modern Mathematics, University of Minnesota Press, Minneapolis.

FOURIER (J.) [1831] Remarques générales sur l'application des principes de l'analyse algébrique aux équations transcendentes, *Mémoires de l'Académie royale des sciences* 9, F. Didot, Paris. Œuvres II, pp. 185-219.

KRONECKER (L.) *Werke*, 5 vols, éd. par K. Hensel, Leipzig, 1895-1930, réimp. New-York, 1968.

[1887] Über den Zahlbegriff, *Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 101, p. 337-355, *Werke* vol. 3, p. 249-74.

[1891] Cours du semestre d'été 1891, manuscrit inédit, Strasbourg, Bibl. Univ. L. Pasteur.

LAGRANGE (J.L.) [1767] Mémoire sur la résolution des équations numériques, *Mémoires de l'Académie de Berlin*, t. 23, p. 311-352.

[1770-71] Réflexions sur la résolution algébrique des équations. Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences de Berlin, dans *Œuvres* III, pp. 205-424

MARGENSTERN (M.) [1995] L'école constructive de Markov, *Revue d'histoire des mathématiques*, T1, F.2.

SIEG (W.) [1984] Foundations for analysis and proof theory, *Synthese* 60, 159-200.

SINACEUR (H.) [1991] *Corps et Modèles*, Vrin Mathesis, Paris.

[1993] Du formalisme à la constructivité : le finitisme, *Revue internationale de Philosophie*, 4, pp. 251-284.

WEBB (J.C.) [1980] Mechanism, mentalism, and metamathematics. An essay on finitism. D. Reidel Publ. Co, Dordrecht-Boston-London.

¹⁰ Margenstern, par exemple, [Margenstern 1995, p. 272, n. 2], situe Kronecker comme « l'un des précurseurs du courant constructiviste » et Hourya Sinaceur [Sinaceur 1993, p. 259, n. 39] parle de la réduction « effective », par Kronecker, des mathématiques aux nombres entiers et cite également Webb [1980, p. 72-73] et Sieg [1984, p. 169-70, 1988, p. 339] qui, écrit-elle, « ont souligné le fait que chez Kronecker, la restriction des objets légitimes aux nombres entiers s'accompagnait d'une restriction des méthodes aux méthodes effectives ».

¹¹ A notre connaissance, ce texte n'a été traduit ni en français, ni en anglais.

¹² Je remercie Karine Chemla et Pierre Pinel pour leurs remarques et suggestions.

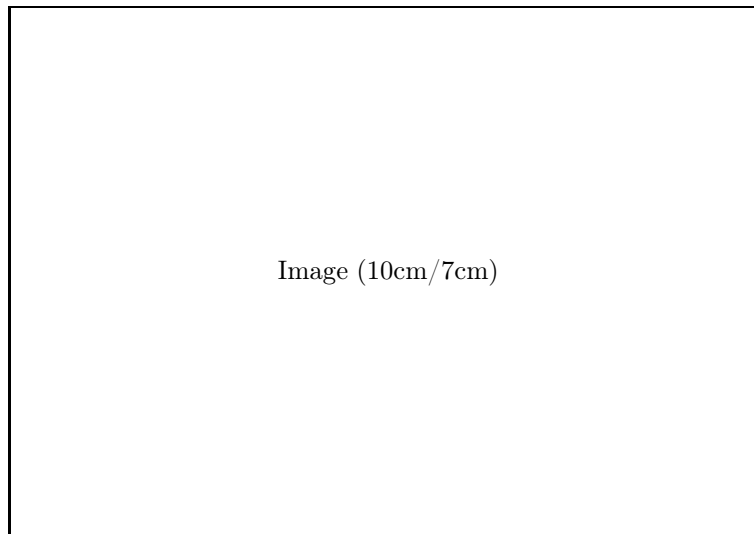


Image (10cm/7cm)

Leopold Kronecker

Sur le concept de nombre¹³

C'est sur le plan libre d'un travail philosophique préparatoire, à partir duquel on entre dans les domaines clos des différentes sciences, qu'il faut aussi développer les concepts de nombre, d'espace et de temps, dont on fait usage dans les mathématiques. Et il paraît approprié d'y conduire le développement de ces concepts aussi loin qu'il faudra pour qu'ils soient déjà dotés de leurs propriétés fondamentales lorsque commence leur traitement spécifiquement scientifique.

C'est ainsi que l'on va procéder ici en ce qui concerne le concept de nombre qui, des trois, est le plus simple et dont la position dominante a été soulignée, de très belle manière, par Jacobi dans une de ses lettres à Alexander von Humboldt¹⁴.

« Un Ancien — c'est ainsi que commence une des lettres — compare les mathématiciens à des lotophages. Qui, une fois, dit-il, a goûté la douceur des idées mathématiques ne peut plus s'en passer. Portez donc au compte de la fureur ma lettre précédente¹⁵, fureur qui submerge les goinfres de lotus quand ils croient que l'on néglige le culte de ces idées ou qu'on les estime seulement

¹³ Cet article est le fruit du remaniement partiel et de l'enrichissement de celui imprimé sous le n° VIII dans les articles philosophiques dédiés à Monsieur Edouard Zeller pour son cinquantième jubilé de Doctorat.

¹⁴ Les lettres ont été trouvées dans le fonds de G. Lejeune Dirichlet.

¹⁵ Cette « lettre précédente » est datée « Berlin, ce 26 décembre 1846 » et couvre trois feuillets in octavo de l'écriture petite et étroite de Jacobi. Sur la première page Jacobi écrit : « C'est donc cela que vous voulez savoir : quel processus de pensée devait amener Leverrier, en 1846, à pouvoir découvrir par le calcul la planète derrière Uranus ? ». Et sur la troisième page : « Dans ces circonstances, il est vraiment extraordinaire que Leverrier, par son habileté à calculer, ait la clairvoyance mathématique nécessaire pour oser aborder, de façon habile, un vaste problème entièrement nouveau. Mais on ne peut juger du travail de l'esprit humain à la dose homéopathique qui est nécessaire pour cela » ...

pour leurs applications occasionnelles. Et Schiller ne dit-il pas déjà, dans les « Xénies », semblable chose, dans son épigramme :

Archimède et le jeune homme.
 Chez Archimède vint un jeune homme avide de savoir,
 Initie-moi, lui dit-il, à l'art divin
 Qui rend de si merveilleux services à l'astronomie,
 Et qui découvre derrière Uranus encore une planète.
 Cet art que tu nommes divin l'est en effet, répliqua le sage,
 Mais il l'était déjà avant même d'explorer le cosmos,
 Avant de rendre de si merveilleux services à l'astronomie,
 Et de découvrir derrière Uranus encore une planète.
 Ce que tu vois dans le cosmos n'est que le reflet des dieux,
 Parmi les Olympiens trône le Nombre éternel.

Dans cette parodie pleine d'esprit du poème de Schiller « Archimède et l'élève », Jacobi indique, de façon tout à fait poétique mais aussi absolument exacte, la position du concept de nombre dans l'ensemble des mathématiques ; ce qu'il dit est tout à fait semblable à l'opinion que Gauss exprime ainsi : « La mathématique est la reine des sciences et l'arithmétique la reine de la mathématique. Celle-ci condescend de temps en temps à rendre service à l'astronomie et aux autres sciences de la nature, mais le premier rang lui revient en toutes circonstances »¹⁶.

En réalité, l'arithmétique est aux deux autres disciplines mathématiques, géométrie et mécanique, dans un rapport semblable à celui de l'ensemble des mathématiques à l'astronomie et aux autres sciences de la nature ; l'arithmétique rend aussi tout un éventail de services à la géométrie et à la mécanique et reçoit en retour de ses disciplines-sœurs une foule d'inspirations. Le mot « arithmétique » ne doit cependant pas être compris dans son sens usuel limité, mais on doit comprendre sous ce terme toutes les disciplines mathématiques à l'exception de la géométrie et de la mécanique, donc nommément, l'algèbre et l'analyse. Et je crois aussi que l'on parviendra un jour à « arithmétiser » le contenu entier de ces disciplines mathématiques, c'est-à-dire à le fonder purement et simplement sur le concept de nombre pris dans son sens le plus étroit et donc à dépouiller à nouveau ce concept des modifications et élargissements¹⁷ le plus souvent provoqués par les applications à la géométrie et à la mécanique. La différence principielle entre la géométrie et la mécanique d'une part et d'autre part l'ensemble des autres disciplines mathématiques rassemblées ici sous la dénomination d'arithmétique, tient selon Gauss en ce que l'objet de la dernière, le nombre, est une production de notre esprit seul, alors que l'espace,

¹⁶ Cf. « en commémoration de Gauss » de W. Sartorius V. Waltershausen, Leipzig 1856, p. 79. À la page 97 de ce même écrit, « Ὁ θεὸς ἀριθμητίζει » est cité comme une sentence de Gauss, authentifiée comme telle par une lettre du médecin de Gauss, Baum, adressée à Humboldt et trouvée dans le fonds de G. Lejeune-Dirichlet.

¹⁷ Je pense ici nommément à l'adjonction des grandeurs irrationnelles ainsi que des grandeurs continues

de la même manière que le temps, a aussi une réalité en dehors de notre esprit, réalité à laquelle nous ne pouvons a priori dicter entièrement ses lois¹⁸.

Définition du concept de nombre

Le point de départ naturel pour le développement du concept de nombre, je le trouve dans les nombres ordinaux. Avec eux, nous possédons une réserve de certaines désignations, ordonnées selon une succession fixe, que nous pouvons attribuer à une collection d'objets différents et en même temps différenciables pour nous¹⁹. Nous rassemblons la totalité des désignations utilisées à cette occasion dans le concept de « quantité des objets » dont la collection est constituée et nous relierons de manière non ambiguë l'expression de ce concept à la dernière des désignations utilisées, puisque leur ordre est déterminé d'une manière fixe. Ainsi, par exemple, dans la collection des lettres (a, b, c, d, e) , à la lettre a on peut attribuer la désignation « premier », à la lettre b la désignation « deuxième », etc., et enfin à la lettre e la désignation « cinquième ». L'ensemble des nombres ordinaux utilisés ici ou la « quantité » des lettres a, b, c, d, e peut de cette manière être désignée, en liaison avec le dernier des nombres ordinaux utilisés, par le nombre « cinq »²⁰.

¹⁸ Les mots de Gauss (dans une lettre à Bessel du 9 avril 1830 [Correspondance entre Gauss et Bessel, Leipzig 1880, p. 497 sq.]) sont les suivants :

« Selon ma plus intime conviction la théorie de l'espace a une position par rapport à notre savoir a priori tout à fait différente de la théorie pure des grandeurs ; il manque tout à fait à notre connaissance de la première *cette* entière conviction de sa nécessité (donc aussi de son absolue vérité) qui est propre à la *dernière* ; nous devons avouer en toute humilité que si le nombre est une production de notre esprit *seul*, l'espace a aussi *en dehors* de notre esprit une *réalité* à laquelle on ne peut a priori entièrement dicter ses lois ».

cf. Discours solennel pour M. Ernst Schering, tenu lors de la séance publique de la Société Royale des Sciences de Göttingen le 30 avril 1877, p. 9.

¹⁹ Les objets peuvent être en un certain sens égaux entre eux et différenciables seulement dans l'espace, dans le temps ou par la pensée, comme par exemple deux longueurs égales ou deux intervalles de temps égaux.

²⁰ La réserve de désignations que nous possédons dans les nombres ordinaux est toujours suffisante car elle ne représente pas tant une réserve effective que, bien plus, une réserve idéale. C'est dans les lois de la formation de nos désignations des nombres par des mots ou des chiffres que nous possédons bien en réalité la « capacité » de satisfaire toutes les exigences. Certes seulement dans la mesure où, dans l'expression d'un nombre, certaines désignations puissent être répétées un nombre quelconque de fois. Mais si l'on admet les répétitions, un signe unique suffit déjà pour exprimer chaque nombre : le seul signe est répété aussi souvent que l'indique le nombre. Un tel moyen aussi primitif de représentation par un signe unique manquerait cependant entièrement de clarté et il est évident que l'autre mode de représentation, tout aussi primitif, utilisant un tas de signes différents, serait évidemment impraticable. On est donc certainement parti, en ce qui concerne les désignations des nombres par des mots, du désir d'exprimer autant de nombres que possible à l'aide d'aussi peu de radicaux spécifiques que possible et on y est arrivé en disposant le schéma des désignations comme un tableau à deux entrées. Ainsi, en marquant des points dans les 45 cases d'un tableau formé par 5 colonnes et 9 lignes, on peut représenter tous les nombres jusqu'à 99 999 exactement, comme le montrent les appellations grecques. Si on marque les unités dans la colonne I, les dizaines dans la colonne II, les centaines dans la colonne III, les milliers dans la colonne IV et les dizaines de mille dans la colonne V, alors le nombre 32 456 par exemple est représenté par cinq points qui se trouvent respectivement :

dans les lignes 3, 2, 4, 5, 6

On peut, avec les ordinaux eux-mêmes, former une collection d'objets. Pour la collection qui est constituée par un ordinal déterminé (*nième*) et tous ceux qui le précèdent, la « quantité » sera exprimée, conformément à la définition donnée plus haut, par le « nombre cardinal » n qui correspond au *nième* ordinal et ce sont ces cardinaux qui sont désignés tout simplement par « nombres ». Un nombre m est dit « plus petit » qu'un autre nombre n quand le nombre ordinal appartenant à m précède le nombre ordinal appartenant à n . La suite dite naturelle des nombres n'est rien d'autre que la suite des ordinaux correspondants.

L'indépendance du nombre par rapport à l'ordre suivi pendant le comptage

Lorsque l'on « compte » une collection d'objets, c'est-à-dire lorsque l'on désigne les objets, pris un à un, en leur attribuant les nombres ordinaux pris selon leur succession, on donne aux objets eux-mêmes un certain ordre. Si maintenant cet ordre des objets est conservé, mais qu'une nouvelle suite des ordinaux utilisés comme désignations est fixée (par une permutation quelconque de ceux-ci), et qu'ensuite on désigne le premier objet en lui attribuant le premier ordinal de la nouvelle suite, le deuxième objet en lui attribuant le deuxième ordinal et ainsi de suite chaque objet suivant en lui attribuant l'ordinal suivant, les objets obtiennent de cette manière à nouveau un ordre, déterminé par les ordinaux attribués et différent de l'ancien et ils sont ainsi « comptés » dans un autre ordre²¹. Mais l'« ensemble » des ordinaux utilisés comme désignations, qui selon la définition ci-dessus fournit le concept de « quantité des objets », reste ce faisant inchangé et cette quantité, c'est-à-dire le résultat du comptage, est par suite indépendant de l'ordre suivi dans le comptage ou fourni par celui-ci. La « quantité » des objets d'une collection est ainsi une propriété de la collection en tant que telle, c'est-à-dire de l'ensemble des objets pensé indépendamment d'un ordre déterminé quelconque.

Si on rassemble mentalement, en un système, des éléments quelconques pouvant être désignés par les lettres a, b, c, d, \dots , mais de sorte que la succession des éléments soit ce faisant aussi fixée, les deux systèmes (a, b, c) et (c, a, b) , par exemple, seront différents. Et en effet, si on prend pour a, b, c des nombres quelconques différents, puis si on désigne par le système (a, b, c) un point de l'espace

dans les colonnes V, IV, III, II, I

La désignation par le nom grec *τρισμύριοι* *δισχίλιοι* *τετρακόσιοι* *πεντήκοντα* *ἑξ* découle immédiatement d'un tel tableau en prenant comme début de chacun des cinq noms de nombres la désignation de la ligne et comme fin la désignation de la colonne. Ainsi faut-il former, pour le premier point qui se trouve sur la ligne 3 (*τρεις*) et dans la colonne V (*μύριοι*), le nom de nombre *τρισμύριοι*, pour le deuxième point, qui se trouve sur la ligne 2 (*δύο*) et dans la colonne IV (*χίλιοι*), le nom de nombre *δισχίλιοι*, etc., et pour le cinquième point, qui se trouve sur la ligne 6 (*ἕξ*) et dans la colonne I, le nom de nombre *ἕξ* sans ajout d'une terminaison. La formation grecque des noms de nombres permet donc d'exprimer de façon clairement différenciable, à l'aide de seulement 13 désignations différentes, nommément neuf débuts et quatre terminaisons, tous les nombres jusqu'à 99 999.

²¹ Pour présenter la possibilité de compter des objets dans des ordres différents, on a volontairement utilisé non la permutation des objets eux-mêmes, mais seulement celle des désignations numériques. De cette manière, on n'avait pas besoin d'autres conditions sur les objets que celles du §1, selon lesquelles ils sont « différenciables ».

dont les trois coordonnées orthogonales sont déterminées par les valeurs $x = a$, $y = b$, $z = c$, alors les deux points (a, b, c) et (c, a, b) seront également différents. Mais si maintenant deux systèmes quelconques (a, b, c, d, \dots) et (a', b', c', d', \dots) sont dits « équivalents » dès lors qu'il est possible de les transformer l'un en l'autre en remplaçant successivement chaque élément du premier par un élément du deuxième, alors la condition nécessaire et suffisante de l'équivalence de deux systèmes consiste en l'égalité de la quantité de leurs éléments et la quantité des éléments d'un système (a, b, c, d, \dots) se caractérise en conséquence comme le seul « invariant » de tous les systèmes équivalents entre eux²².

L'addition des nombres

On peut prendre les nombres eux-mêmes comme objets du comptage. On peut ainsi, par exemple, continuer à compter n_2 de plus à partir du nombre $n_1 + 1$, c'est-à-dire rassembler exactement autant de nombres suivant immédiatement n_1 qu'il le faut pour former une collection dont la quantité s'élève à n_2 . Ce « continuer à compter » s'appelle « ajouter *le nombre n_2 au nombre n_1* » ; le nombre s auquel on arrive par ce « continuer à compter » s'appelle « le résultat de l'addition » ou la « somme de n_1 et n_2 » et on le représente par $n_1 + n_2$. Mais on arrive aussi précisément à ce même résultat s quand on additionne le nombre n_1 au nombre n_2 , c'est-à-dire quand, à partir du nombre $n_2 + 1$, on continue à compter n_1 de plus, et c'est pour cela que l'on a : $n_1 + n_2 = n_2 + n_1$. De même on a de façon générale : $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r = n_\alpha + n_\beta + n_\gamma + \dots + n_\rho$, si $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \rho$ signifient $1, 2, 3, \dots, r$ dans un ordre quelconque. Car, quand on forme toute la collection des systèmes de deux nombres (h, k) , qui apparaît en posant successivement :

$$\begin{aligned} h = 1 \text{ et } k = 1, 2, \dots, n_1 \\ h = 2 \text{ et } k = 1, 2, \dots, n_2 \\ h = 3 \text{ et } k = 1, 2, \dots, n_3 \\ \dots \\ \dots \\ h = r \text{ et } k = 1, 2, \dots, n_r \end{aligned}$$

²² Cela permet de mieux préciser, me semble-t-il, le contenu de la phrase par laquelle débute le manuel d'Analyse de M. Lipschitz. Cette phrase énonce : « Quand on néglige, en considérant des choses distinctes, les caractères par lesquelles elles se différencient, il reste en dernier lieu le concept de la *quantité* des choses considérées ».

il s'ensuit que le nombre $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r$ est produit comme quantité des systèmes de la collection, dès qu'on compte ceux-ci dans l'ordre dans lequel ils ont été formés. Mais si on les ordonne de sorte que ceux pour lesquels on a :

$$h = \alpha \text{ et } k = 1, 2, \dots, n_\alpha$$

$$h = \beta \text{ et } k = 1, 2, \dots, n_\beta$$

$$h = \gamma \text{ et } k = 1, 2, \dots, n_\gamma$$

...

...

$$h = \rho \text{ et } k = 1, 2, \dots, n_\rho$$

se suivent, alors il s'ensuit que le nombre $n_\alpha + n_\beta + n_\gamma + \dots + n_\rho$ est produit comme quantité des systèmes de la collection et c'est donc cette même quantité qui est représentée d'une part par la somme $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r$ et d'autre part par la somme $n_\alpha + n_\beta + n_\gamma + \dots + n_\rho$.

La multiplication des nombres

Si tous les termes, $n_1, n_2, n_3, \dots, n_r$ de la somme sont égaux à un même nombre n , alors on désigne l'addition comme « multiplication du nombre n par le multiplicateur r » et on pose :

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r = rn.$$

Le résultat de la multiplication ainsi définie est désigné comme produit des nombres r et n . Mais on obtient exactement le même résultat quand on multiplie le nombre r par le multiplicateur n , et par conséquent, le produit d'autant de nombres qu'on voudra $n_1, n_2, n_3, \dots, n_r$ est indépendant de l'ordre dans lequel les multiplications successives sont effectuées. Car quand on se représente formés tous les systèmes de r nombres $(h_1, h_2, h_3, \dots, h_r)$, qui résultent du fait de prendre :

pour h_1 toutes les valeurs $1, 2, 3, \dots, n_1$

pour h_2 toutes les valeurs $1, 2, 3, \dots, n_2$

pour h_3 toutes les valeurs $1, 2, 3, \dots, n_3$

...

...

pour h_r toutes les valeurs $1, 2, 3, \dots, n_r$

on peut ordonner ces systèmes en fonction de la taille des valeurs de

$$h_r + h_{r-1}g + h_{r-2} + g^2 + \dots h_1g^{r-1}$$

où g désigne un nombre plus grand que chacun des nombres $n_1, n_2, n_3, \dots, n_r$. Les systèmes se succèdent alors comme ils se succèderaient selon leur taille si $h_1h_2h_3\dots h_r$ représentait un nombre écrit avec les chiffres $h_1, h_2, h_3, \dots, h_r$ dans le système de numération de base g . Le principe d'un tel ordre n'est autre, d'ailleurs, que le principe lexicographique dans lequel on remplace les nombres $1, 2, 3, \dots$ par les lettres de l'alphabet.

Les différents groupes de systèmes $(h_1, h_2, h_3, \dots, h_r)$ caractérisés par les différentes valeurs de h_1 et dont la quantité est n_1 se succèdent, dans l'ordre défini ci-dessus, selon la taille des valeurs de h_1 ; à l'intérieur de chaque groupe, les n_2 différents sous-groupes caractérisés par les valeurs de h_2 se succèdent de nouveau selon la taille de ces valeurs, etc. Si on désigne la quantité des systèmes pour lesquels $h_1 = 1$ par s_1 , alors s_1 est aussi la quantité des systèmes de chacun des n_1 groupes qui sont caractérisés par les valeurs $h_1 = 1, 2, 3, \dots, n_1$. La quantité totale de tous les systèmes est ainsi exprimée par le produit $n_1 s_1$. Si on désigne de plus maintenant la quantité des systèmes pour lesquels $h_1 = 1$ et $h_2 = 1$ par s_2 , alors s_2 est aussi la quantité des systèmes de chacun des n_2 sous-groupes caractérisés, en fixant la valeur $h_1 = 1$, par les n_2 valeurs $h_2 = 1, 2, 3, \dots, n_2$. La quantité, désignée par s_1 , de tous les systèmes du groupe pour laquelle $h_1 = 1$ est ainsi exprimée par le produit $n_2 s_2$, et la quantité totale de tous les systèmes sera donc égale à $n_1 n_2 s_2$. Si on continue de cette manière, on obtient le produit $n_1 n_2 \dots n_r$ comme expression de la quantité de tous les systèmes $(h_1, h_2, h_3, \dots, h_r)$.

Si maintenant, comme ci-dessus, $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \rho$ signifient $1, 2, 3, \dots, r$ dans un autre ordre quelconque et si on ordonne tous les systèmes $(h_1, h_2, h_3, \dots, h_r)$ comme ils se succéderaient selon leur taille si $h_\alpha h_\beta h_\gamma \dots h_\rho$ représentait un nombre écrit avec les chiffres $h_\alpha, h_\beta, h_\gamma, \dots, h_\rho$ dans le système de numération de base g , alors on obtient, par le processus exposé, le produit $n_\alpha n_\beta n_\gamma \dots n_\rho$ comme expression de la quantité de tous les systèmes $h_1, h_2, h_3, \dots, h_r$ et donc il faut ainsi que : $n_1 n_2 n_3 \dots n_r = n_\alpha n_\beta n_\gamma \dots n_\rho$. Le produit d'autant de nombres qu'on voudra est ainsi indépendant de la succession des facteurs, c'est-à-dire de l'ordre dans lequel les multiplications successives sont effectuées.

Le calcul littéral

Les lois de l'addition et de la multiplication des nombres sont ainsi entièrement établies à partir des définitions. Ces mêmes lois durent être admises comme valables pour les calculs dits littéraux, dès que l'on commença à prendre les lettres comme désignations de nombres dont la détermination peut ou doit être réservée. Mais avec l'introduction *principielle* de l'« indéterminée » (*indeterminatae*), qui remonte à Gauss, la théorie particulière des nombres entiers s'est élargie à la théorie arithmétique générale des fonctions entières d'indéterminées à coefficients entiers. Cette théorie générale permet de se passer de tous les concepts étrangers à l'arithmétique véritable : les nombres négatifs, fractionnaires, réels et algébriques imaginaires.

I. Le concept de nombre *négatif* peut être évité en remplaçant, dans les formules, le facteur -1 par une indéterminée x et l'égalité par le signe de congruence de Gauss *modulo* $(x + 1)$. Ainsi l'égalité :

$$7 - 9 = 3 - 5$$

se change en la congruence :

$$7 + 9x \equiv 3 + 5x \pmod{x + 1};$$

elle gagne par là aussi en contenu car la congruence a une signification pour chaque nombre entier positif x , à savoir que $7 + 9x$ a dans la division par $x + 1$

le même reste que $3+5x$, et d'autre part, cette congruence se transforme immédiatement en l'égalité dès que l'on conçoit x non plus comme une indéterminée, mais comme une « grandeur » définie par l'égalité $x+1=0$ et que l'on introduit donc l'« unité négative ». Sur le fait que, du reste, la signification de la formule $7-9=3-5$ demande une explication plus précise et qu'il est fait là « en réalité un nouvel usage du signe d'égalité », on trouve un exposé clair dans le manuel de M. le Dr. Hermann Schubert²³.

II. Le concept de nombre *fractionnaire* est à éviter, en remplaçant dans les formules le facteur $\frac{1}{m}$ par une indéterminée x_m et le signe d'égalité par le signe de congruence de Gauss modulo (mx_m-1) . Les trois règles de calcul des fractions, soit celle de l'addition :

$$(1) \quad \frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an + bm}{mn}$$

celle de la multiplication :

$$(2) \quad \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn}$$

et celle de la division

$$(3) \quad \frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{an}{bm}$$

²³ *Système de l'Arithmétique et de l'Algèbre*, comme guide pour l'enseignement dans les écoles secondaires. Du Dr. Hermann Schubert*, professeur à l'école secondaire Johanneum à Hambourg. Postdam, 1885. Edition d'Aug.Stein, p. 26. Certains aspects du développement du « concept de nombre » contenu précisément dans le §5 de cet ouvrage ont été utilisés dans les explications qui précèdent.

*Schubert explique que lorsque a est inférieur ou égal à b , $a-b$, qui n'est alors qu'une association de signes (*Zeichenvereinigung*) ne représentant aucun nombre — Schubert n'a pas encore, à ce stade, défini les nombres négatifs, ni le nombre nul —, doit cependant obéir (*gehörchen*) à la formule de définition de la soustraction : $(a-b)+b=a$. Ainsi pour $(7-9)$ on doit avoir $(7-9)+9=7$. Par suite lorsque l'on écrit $7-9=3-5$, on entend seulement que $(3-5)+9=9+(3-5)=9+3-5=12-5=7$. Ce n'est donc pas l'égalité de deux nombres que l'on a posée, mais seulement l'identité de deux associations de signes, à partir desquelles, en ajoutant 9 à chacune, on obtient des nombres égaux. Signalons en outre que H. Schubert a aussi écrit un article, paru en 1898 dans l'*Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften* sous le titre « Grundlagen der Arithmetik », qui lui a valu de sévères critiques de la part de G. Frege (N.d.T.).

sont alors complètement justifiées par les trois congruences correspondantes²⁴ :

(1)

$$ax_m + bx_n \equiv (an + bm)x_{mn} \pmod{d \cdot mx_m - 1, nx_n - 1, mnx_{mn} - 1}$$

(2)

$$ax_m \cdot bx_n \equiv abx_{mn} \pmod{d \cdot mx_m - 1, nx_n - 1, mnx_{mn} - 1}$$

(3)

$$ax_mx_{bx_n} \equiv anx_{bm} \pmod{d \cdot mx_m - 1, nx_n - 1, bmx_{bm} - 1, bx_nx_{bx_n} - 1}$$

Ces trois congruences résultent elles-mêmes des trois identités suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad ax_m + bx_n &= (an + bm)x_{mn} + anx_{mn}(mx_m - 1) + bmx_{mn}(nx_n - 1) \\ &\quad - (ax_m + bx_n)(mnx_{mn} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad ax_m \cdot bx_n &= abx_{mn} + abnx_nx_{mn}(mx_m - 1) \\ &\quad + abx_{mn}(nx_n - 1) - abx_mx_n(mnx_{mn} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(III)} \quad ax_mx_{bx_n} &= anx_{bm} + anx_{bm}(mx_m - 1) - ax_mx_{bm}x_{bx_n}(nx_n - 1) \\ &\quad - abmx_mx_{bx_n}(bmx_{bm} - 1) + amnx_mx_{bm}(bx_nx_{bx_n} - 1) \end{aligned}$$

Les comparaisons « plus grand » et « plus petit » entre fractions peuvent être considérées comme données par les règles d'addition dans la mesure où la fraction obtenue par l'addition de deux fractions est déclarée plus grande que chacun des deux termes de la somme. De cette manière, l'ordre des fractions rationnelles est non seulement défini mais aussi fondé²⁵.

²⁴ Kronecker utilise ici le concept de congruence dans un sens élargi, admettant un système de modules à la place du simple module de congruence. Selon ce concept élargi, on dira que deux entiers a et b sont congrus moduli plusieurs modules, si la différence $a - b$ est égale à une combinaison linéaire de ces modules. Ainsi par exemple : $a \equiv b \pmod{m, n}$ si $a - b = km + ln$, où k et l sont des entiers quelconques. On peut, par ailleurs, souligner le manque d'analogie entre l'introduction des nombres négatifs et celle des fractions. Alors que la formation des nombres négatifs nécessite l'adjonction d'une seule indéterminée et un calcul de congruences « simple », modulo $(x + 1)$, celle des fractions nécessite une infinité d'indéterminées (dont un nombre fini seulement est utilisé pour chaque fraction) et un calcul de congruences moduli plusieurs modules. Cette dernière remarque nous a été suggérée par Norbert Schappacher (N.d.T.).

²⁵ Dans l'avant-propos de son œuvre : « Introduction à la théorie des fonctions d'une variable » M. Jules Tannery énonce p. VIII : « On peut constituer entièrement l'Analyse avec la notion de nombre entier et les notions relatives à l'addition des nombres entiers ; il est inutile de faire appel à aucun autre postulat, à aucune autre donnée de l'expérience ; [...] une fraction, du point de vue que j'indique, ne peut pas être regardée comme la réunion de parties égales de l'unité ; ces mots "parties de l'unité" n'ont plus de sens ; une fraction est un ensemble de deux nombres entiers, rangés dans un ordre déterminé ; sur cette nouvelle espèce de nombres, il y a lieu de reprendre les définitions de l'égalité, de l'inégalité et des opérations arithmétiques » (en français dans le texte, N.d.T.). Il a été montré ci-dessus comment ce dernier point peut être réalisé dans la pratique — même si c'est dans un ordre différent.

III. Le fait que l'on peut se dispenser d'introduire et d'utiliser les nombres *algébriques* partout où l'isolement des conjugués réciproques n'est pas exigé, je l'ai montré dans un article précédent²⁶ ; le fait que cet isolement lui-même peut aussi bien se produire sans l'introduction de nouveaux concepts et que c'est seulement s'il se produit ainsi qu'il fait clairement apparaître l'essence de la chose, c'est ce que l'on va expliquer ici de la même manière que j'ai l'habitude de le faire depuis dix ans dans mes cours à l'université et on va donner avec cela également cette « analyse plus précise du concept des racines réelles des équations algébriques » que j'ai annoncée à la fin de la première partie des « Eléments d'une théorie arithmétique des grandeurs algébriques »²⁷. Soit $f(x)$ une fonction entière de x à coefficients entiers, qui n'a aucun diviseur commun avec sa dérivée $f'(x)$, alors il existe des fonctions entières à coefficients entiers pour lesquelles on a l'égalité :

$$(A) \quad f(x)\varphi(x) + f'(x)\varphi_1(x) = D$$

D est ici la valeur absolue du discriminant de $f(x)$, c'est-à-dire un nombre entier positif. Soit maintenant :

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

et a_g le plus grand en valeur absolue des n coefficients a_0, a_1, \dots, a_{n-1} . Désignons maintenant la fraction rationnelle $\frac{|a_g| + |a_n|}{|a_n|}$ par r , on a alors :

$$\left| \frac{f(x)}{a_n} - x^n \right| < (r-1) \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1}$$

et donc pour chaque valeur de x non comprise entre $-r$ et r :

$$\left| f(x) - a_nx^n \right| < \left| a_nx^n \right| \text{ et par conséquent : } \operatorname{sgn}(f(x)) = \operatorname{sgn}(a_nx^n)$$

Il s'ensuit que $f(x)$ peut changer de signe seulement dans l'intervalle $(-r, r)$. Si on pose pour abrégé :

²⁶ « Une proposition fondamentale de l'Arithmétique générale » vol. 100, p. 490 de ce journal. On renvoie notamment à la fin de l'article op. cit. p. 510*. A ce qui y est dit, il faut ajouter que dans certains domaines de l'Algèbre l'utilisation des modules et des systèmes de modules à la place des nombres algébriques n'est pas seulement permise mais même nécessaire. Ainsi la question de savoir si une fonction irréductible à coefficients entiers $F(x)$ devient réductible par adjonction d'une racine d'une équation irréductible à coefficients entiers $\Phi(y) = 0$, ne peut être décidée que sous la forme de savoir si $F(x)$ peut être représentée *modulo* $\Phi(y)$ comme produit de fonctions entières de x et y à coefficients rationnels.

*: Vol. III, p. 209-240 de cette édition. Cf. en particulier p. 240.

C'est la théorie des systèmes de modules et la notion de congruence élargie qui permettent à Kronecker d'éviter d'introduire et d'utiliser les nombres algébriques lorsque l'on n'a pas à les isoler, en tant que racines d'une équation algébrique. Nous dirions aujourd'hui qu'il substitue à un corps de nombres algébriques le corps des restes $\mathbf{Q}[X]/f$ (où f est un polynôme irréductible sur \mathbf{Q}) qui lui est isomorphe (N.d.T.).

²⁷ Vol. 92, p. 44 de ce journal**.

** : Vol. II, p. 296 de cette édition.

$$f(x + \sigma) - f(x) = \sigma f_1(x), \quad (f_1(x, \sigma) - f'(x))\varphi_1(x) = \sigma\psi(x, \sigma),$$

alors, $f_1(x, \sigma)$ et $\psi(x, \sigma)$ sont des fonctions entières de x et de σ à coefficients entiers et si l'on désigne respectivement par $\bar{f}_1(x, \sigma)$, $\bar{\varphi}(x)$, $\bar{\varphi}_1(x)$ et $\bar{\psi}(x, \sigma)$ les fonctions obtenues à partir de $f_1(x, \sigma)$, $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ et $\psi(x, \sigma)$ en remplaçant les coefficients par leur valeur absolue, alors on a clairement les inégalités suivantes :

$$|f_1(x, \sigma)| < \bar{f}_1(r, 1), \quad |\varphi(x)| < \bar{\varphi}(r), \quad |\varphi_1(x)| < \bar{\varphi}_1(r), \quad |\psi(x, \sigma)| < \bar{\psi}(r, 1)$$

dès que la valeur de x se trouve entre $-r$ et r et celle de σ entre -1 et 1 . Appelons maintenant s le nombre entier qui dépasse d'au moins une unité la plus grande des quatre valeurs rationnelles :

$$\frac{\bar{f}_1(r, 1)}{D}, \quad \frac{\bar{\varphi}(r)}{D}, \quad \frac{\bar{\varphi}_1(r)}{D}, \quad \frac{\bar{\psi}(r, 1)}{D}$$

et posons alors :

$$\varphi(x) = (s - 1)D\theta(x), \quad \varphi_1(x) = (s - 1)D\theta_1(x), \quad \psi(x, \sigma) = (s - 1)DH(x, \sigma)$$

l'égalité (A) se transforme ainsi en l'égalité :

$$(B) \quad \theta(x)f(x) + \theta_1(x)\frac{f(x + \sigma) - f(x)}{\sigma} = sH(x, \sigma) + \frac{1}{s - 1}$$

et les valeurs des fonctions $\theta(x)$, $\theta_1(x)$, $H(x, \sigma)$ sont en valeur absolue inférieures à 1 pour les valeurs de x et de limitées par les inégalités :

$$-r < x < r, \quad -1 < \sigma < 1$$

Si σ est en valeur absolue inférieure à $\frac{1}{s}$, il suit de l'inégalité (B), l'inégalité :

$$|f(x)| + \left| \frac{f(x + \sigma) - f(x)}{\sigma} \right| > \frac{1}{s(s - 1)}$$

et par conséquent, pour deux valeurs quelconques x' et x'' de l'intervalle $(-r, r)$, dont la différence est en valeur absolue inférieure à $\frac{1}{s}$, on a l'inégalité :

$$(C) \quad |f(x')| + \left| \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} \right| > \frac{1}{s(s - 1)}$$

On doit à présent montrer que, lorsque x reste dans un intervalle de taille $\frac{1}{s}$, la fonction $f(x)$ ou bien ne change pas de signe, ou bien en change seulement une fois, c'est-à-dire que, lorsque :

$$x' < x'' < x''' \text{ et } x''' - x' \leq \frac{1}{s}$$

on ne peut avoir :

$$\text{sgn}.f(x') = -\text{sgn}.f(x'') = \text{sgn}.f(x''').$$

Supposons que la valeur de $f(x)$ au début d'un intervalle, noté (J) , de taille inférieure ou égale à $\frac{1}{s}$, soit de signe opposé à celui de sa valeur à la fin de l'intervalle, alors il faut que ce soit aussi le cas au moins pour un des sous-intervalles en lesquels l'intervalle (J) peut être divisé. Soit maintenant un nombre entier \mathbf{r}^{28} quelconque et imaginons que l'intervalle (J) soit divisé en $\mathbf{r}D$ parties égales. Soit alors (J') un tel sous-intervalle, dans lequel les valeurs initiale et finale de $f(x)$ ont des signes opposés. Enfin, soient x' et x'' deux valeurs quelconques de x prises dans l'intervalle (J') , pour lesquelles on ait :

$$x' < x'', \text{sgn}.f(x') = -\text{sgn}.f(x'')$$

Comme on a alors :

$$f(x'') - f(x') = (x'' - x')f_1(x', x'' - x')$$

et donc :

$$(D) \quad : \quad |f(x'') - f(x')| < (x'' - x')\bar{f}_1(r, 1) \leq (x'' - x')(s - 1)D$$

il s'ensuit, en tenant compte de l'inégalité : $x'' - x' \leq \frac{1}{\mathbf{r}sD}$, que :

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{1}{\mathbf{r}},$$

et donc, puisque $f(x')$ et $f(x'')$ ont des signes opposés, il faut aussi avoir :

$$(E) \quad : \quad |f(x')| < \frac{1}{\mathbf{r}} \text{ et } |f(x'')| < \frac{1}{\mathbf{r}}.$$

Dans chaque intervalle de taille $\frac{1}{s}$ aux bornes duquel les valeurs de f ont des signes contraires, on peut donc trouver, si on choisit un nombre entier quelconque \mathbf{r} , au moins un intervalle de taille $\frac{1}{\mathbf{r}sD}$ aux bornes duquel $f(x)$ change aussi de signe et sur lequel toutes les valeurs de $f(x)$ sont en valeur absolue inférieures à $\frac{1}{\mathbf{r}}$.

Lorsque $f(x)$ a le même signe au début et à la fin d'un intervalle de taille inférieure ou égale à $\frac{1}{s}$, alors $f(x)$ garde ce signe sur tout l'intervalle. En effet, si on note (J^0) cet intervalle, x_0 son point initial, x_4 son point final ; et si on suppose que pour une valeur x_2 comprise entre x_0 et x_4 , la fonction $f(x)$ prenait un signe différent de celui de $f(x_0)$ et de $f(x_4)$, on pourrait alors déterminer aussi deux valeurs x_1 et x_3 de part et d'autre de x_2 et encore à l'intérieur de (J^0) par les égalités :

$$(F) \quad : \quad x_1 = x_2 - \frac{|f(x_2)|}{(s-1)D} \text{ et } x_3 = x_2 + \frac{|f(x_2)|}{(s-1)D}$$

pour lesquelles on aurait :

$$\text{sgn}\dot{f}(x_0) = -\text{sgn}\dot{f}(x_1) = \text{sgn}\dot{f}(x_4) = -\text{sgn}\dot{f}(x_3).$$

²⁸ Il ne s'agit pas du même « r » que précédemment ; nous avons utilisé pour les distinguer, comme le fait Kronecker lui-même, deux polices et deux caractères différents ; cf. introduction p. 51.

Car, premièrement, on déduit que les valeurs x_1 et x_2 sont encore dans l'intervalle (J^0) , c'est-à-dire que les inégalités suivantes sont valables :

$$x_2 - x_0 > \frac{|f(x_2)|}{(s-1)D}, \quad x_4 - x_2 > \frac{|f(x_2)|}{(s-1)D}$$

à partir des inégalités :

$$|f(x_2) - f(x_0)| < (x_2 - x_0)(s-1)D, \quad |f(x_4) - f(x_2)| < (x_4 - x_2)(s-1)D$$

qui découlent de l'inégalité (D) ci-dessus, dès qu'on prend en compte que, selon l'hypothèse, on a :

$$\text{sgn}.f(x_2) = -\text{sgn}.f(x_0) = -\text{sgn}.f(x_4).$$

On a aussi, deuxièmement, conformément à l'inégalité (D) :

$$|f(x_2) - f(x_1)| < (x_2 - x_1)(s-1)D, \quad |f(x_3) - f(x_2)| < (x_3 - x_2)(s-1)D,$$

et donc, par suite des égalités (F) :

$$|f(x_2) - f(x_1)| < |f(x_2)|, \quad |f(x_3) - f(x_2)| < |f(x_2)|,$$

et ces inégalités exigent que $f(x_1)$ aussi bien que $f(x_3)$ aient le même signe que $f(x_2)$ et donc le signe opposé à celui des valeurs $f(x_0)$ et $f(x_4)$ de la fonction. Autant l'intervalle (x_0, x_1) que l'intervalle (x_3, x_4) seraient ainsi tels que $f(x)$ ait au début et à la fin des signes opposés et donc, d'après ce que l'on a montré plus haut, on pourrait alors déterminer des valeurs x' et x'' pour lesquelles on aurait :

$$x_0 < x' < x_1, \quad x_3 < x'' < x_4, \quad |f(x')| < \frac{1}{r}, \quad |f(x'')| < \frac{1}{r},$$

pour r quelconque. Mais il faudrait alors avoir, conformément à l'inégalité (C) :

$$|f(x')| + \left| \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} \right| > \frac{1}{s(s-1)}$$

et comme :

$$|f(x')| < \frac{1}{r} \text{ et } |f(x'') - f(x')| < |f(x'')| + |f(x')| < \frac{2}{r},$$

on aurait aussi :

$$\frac{1}{r} + \frac{2}{r(x'' - x')} > \frac{1}{s(s-1)},$$

et finalement comme :

$$x'' - x' > x_3 - x_1 = \frac{2|f(x_2)|}{(s-1)D}$$

on aurait :

$$\frac{1}{r} + \frac{(s-1)D}{r|f(x_2)|} > \frac{1}{s(s-1)},$$

ou bien :

$$r < (s(s-1)) \left(1 + \frac{(s-1)D}{|f(x_2)|} \right).$$

Mais comme le nombre \mathbf{r} peut être choisi arbitrairement grand, cette inégalité ne peut avoir lieu et, en réalité, il faut en déduire que dans un intervalle de taille inférieure ou égale à $\frac{1}{s}$, la fonction $f(x)$ garde le même signe d'un bout à l'autre, dès que l'on sait seulement qu'il en est ainsi pour les deux points extrêmes.

Il s'ensuit maintenant immédiatement que dans un intervalle de taille $\frac{1}{s}$, $f(x)$ ne peut changer de signe *plus* d'une fois. Car, si pour trois valeurs x_0, x_1, x_2 de l'intervalle telles que $x_0 < x_1 < x_2$ on avait :

$$\operatorname{sgn}.f(x_0) = -\operatorname{sgn}.f(x_1) = \operatorname{sgn}.f(x_2),$$

alors, l'intervalle (x_0, x_2) serait bien tel que sa taille soit inférieure à $\frac{1}{s}$, et $f(x)$ aurait le même signe aux deux points extrêmes. Mais dans un tel intervalle, comme on vient de le voir, le signe de $f(x)$ ne peut changer ; on ne peut donc avoir :

$$\operatorname{sgn}.f(x_0) = -\operatorname{sgn}.f(x_1)$$

Le résultat développé dans ce qui précède peut se formuler de la manière suivante :

- : *Premièrement*, soit $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ une fonction de x à coefficients entiers, que l'on peut désigner par $f(x)$; D la valeur absolue du discriminant de la fonction $f(x)$; et $f'(x)$ sa dérivée.
- : *Deuxièmement*, soient $\varphi(x), \varphi_1(x)$, des fonctions de x à coefficients entiers, de degrés respectivement $n-2$ et $n-1$, pour lesquelles on a l'équation :

$$\varphi(x)f(x) + \varphi_1(x)f'(x) = D,$$

et soit :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k x^k, \quad \varphi_1(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha'_k x^k.$$

- : *Troisièmement*, soient les fonctions $f_1(x, y)$ et $\psi(x, y)$ définies par les égalités :

$$f(x+y) - f(x) = yf_1(x, y), [f_1(x, y) - f'(x)]\varphi(x) = y\psi(x, y)$$

telles que dans les développements suivants :

$$f_1(x, y) = \sum_{h,k} b_{h,k} x^h y^k \quad (h, k = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$\psi(x, y) = \sum_{h,k} c_{h,k} x^h y^k \quad (h, k = 0, 1, \dots, 2n-4),$$

les coefficients b et c désignent des nombres entiers.

: *Quatrièmement*, soit $|a_g|$ la plus grande des valeurs $|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|$, et soit s le plus petit nombre entier positif qui satisfait aux inégalités suivantes :

$$(s-1)D \geq \sum_h |\alpha_h| \cdot \left(\frac{|a_g| + |a_n|}{|a_n|} \right)^h \quad (h = 0, 1, \dots, n-2),$$

$$(s-1)D \geq \sum_h |\alpha'_h| \cdot \left(\frac{|a_g| + |a_n|}{|a_n|} \right)^h \quad (h = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$(s-1)D \geq \sum_{h,k} |b_{h,k}| \cdot \left(\frac{|a_g| + |a_n|}{|a_n|} \right)^h \quad (h, k = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$(s-1)D \geq \sum_{h,k} |c_{h,k}| \cdot \left(\frac{|a_g| + |a_n|}{|a_n|} \right)^h \quad (h, k = 0, 1, \dots, 2n-4).$$

Alors, on ne peut pas avoir $\text{sgn}.f(x') = -\text{sgn}.f(x'') = \text{sgn}.f(x''')$ lorsque :

$$x' < x'' < x''' \text{ et } x''' - x' \leq \frac{1}{s}.$$

La fonction $f(x)$ conserve donc son signe dans chaque intervalle de taille $\frac{1}{s}$ pour lequel elle a le même signe aux points initial et final et elle change son signe seulement une unique fois dans chaque intervalle de taille pour lequel elle a des signes différents aux points initial et final. Dans un intervalle de ce dernier type on peut de plus, r étant un nombre entier positif quelconque, déterminer un sous-intervalle de taille $\frac{1}{rsD}$ de telle manière que la fonction $f(x)$ ait des signes différents aux points initial et final et que sur tout le sous-intervalle sa valeur absolue reste inférieure à $\frac{1}{r}$. Finalement, la fonction $f(x)$ conserve le signe de $a_n x^n$ dès que la valeur absolue de x est supérieure à $\frac{|a_g| + |a_n|}{|a_n|}$.

Par conséquent, si le nombre entier t est déterminé par la condition donnée par l'inégalité suivante :

$$s(|a_g| + |a_n|) \leq t|a_n| \leq |a_n| + s(|a_g| + |a_n|),$$

la fonction $f(x)$ peut changer de signe seulement dans un intervalle $\left(\frac{k-1}{s}, \frac{k}{s}\right)$ pour lequel k a une des valeurs : $-t+1, -t+2, \dots, t-1, t$. Il suffit donc de déterminer les signes des $2t$ valeurs :

$$f\left(\frac{k}{s}\right) \quad (k = -t+1, -t+2, \dots, t-1, t)$$

pour trouver parmi les $2t-1$ intervalles de taille $\frac{1}{s}$ ceux pour lesquels la fonction $f(x)$ change de signe et cela seulement une fois. La quantité de ces intervalles est en même temps celle que l'on désigne par quantité des racines réelles de l'équation $f(x) = 0$, et donc, on peut remplacer parfaitement par ce procédé celui que fournit le théorème de Sturm. Mais aussi ce qu'on appelle le calcul

des racines réelles lui-même est remplacé par le procédé indiqué ; car lorsque l'on peut démontrer que pour un nombre déterminé k :

$$\operatorname{sgn}.f\left(\frac{k-1}{s}\right)f\left(\frac{k}{s}\right) = -1,$$

alors on a seulement besoin de disposer des valeurs de $f(x)$ initiales et finales dans les sous-intervalles de taille $\frac{1}{rsD}$, c'est-à-dire donc du calcul des $rsD + 1$ valeurs :

$$f\left(\frac{k}{s} - \frac{h}{rsD}\right) (h = 0, 1, \dots, rsD)$$

et de la détermination du nombre h pour lequel :

$$\operatorname{sgn}\left(f\left(\frac{k}{s} - \frac{h}{rsD}\right) \cdot f\left(\frac{h}{s} - \frac{h-1}{rsD}\right)\right) = -1$$

pour déduire que la fonction $f(x)$ change de signe et reste, d'un bout à l'autre, en valeur absolue inférieure à $\frac{1}{r}$ dans l'intervalle :

$$\frac{k}{s} - \frac{h}{rsD} \leq x < \frac{k}{s} - \frac{h-1}{rsD}.$$

La prétendue existence des racines réelles irrationnelles d'équations algébriques est uniquement fondée sur l'existence d'intervalles dont on a indiqué les caractéristiques ; la recevabilité du calcul sur les différentes racines d'une équation algébrique repose entièrement sur la possibilité de les isoler, donc de déterminer un nombre, comme celui qui a été désigné précédemment par s . Ayant déterminé un tel nombre s ayant la propriété que les intervalles de taille $\frac{1}{s}$ sont suffisamment petits pour isoler les différentes racines de l'équation, les comparaisons « plus grand » et « plus petit » entre les racines seront définies simplement par la succession des intervalles d'isolement respectifs. Par là, les comparaisons « plus grand » et « plus petit » entre deux nombres algébriques irrationnels quelconques sont également déterminés, lorsque l'on pense les deux nombres algébriques à comparer selon leur taille — comme cela est manifestement licite — comme deux racines d'une même équation. L'essence propre de la chose n'apparaît de façon parfaitement nette dans la déduction ci-dessus que si on y évite l'utilisation des fractions et qu'on y fait usage exclusivement des nombres entiers.

Si on introduit dans ce but à la place de $a_0 + a_1x + a_2x^2 \dots + a_nx^n$ la fonction entière homogène :

$$a_0y^n + a_1y^{n-1}z + a_2y^{n-2}z^2 + \dots + a_nz^n$$

et qu'on la désigne par $F(y, z)$, on a alors :

$$f\left(\frac{z}{y}\right) = \frac{1}{y^n}F(y, z).$$

On a donc :

$$\operatorname{sgn}(F(rsD, krD - h) \cdot F(rsD, krD - h + 1)) = -1,$$

et lorsque q désigne un nombre entier positif indéterminé, alors, pour toute valeur entière de z comprise entre :

$$(k\mathbf{r}D - h)q \text{ et } (k\mathbf{r}D - h + 1)q$$

on a :

$$|F(q\mathbf{r}sD, z)| < \mathbf{r}^{n-1}(qsD)^n$$

en même temps que le *signe* de $F(q\mathbf{r}sD, z)$ pour $z = (k\mathbf{r}D - h)q$ est l'opposé de son signe pour $z = (k\mathbf{r}D - h + 1)q$.

Le nombre s est déterminé, selon la manière indiquée plus haut, par les coefficients de la fonction $F(x, y)$. Puis on détermine les différentes valeurs entières de k qui caractérisent les différentes racines réelles de l'équation $f(x) = 0$ par la condition :

$$\text{sgn}.F(s, k - 1).F(s, k) = -1.$$

Soit encore un nombre \mathbf{r} quelconque ; à partir d'une valeur déterminée de k , on définit alors le nombre h positif et ne dépassant pas $\mathbf{r}D$ par la condition :

$$\text{sgn}(F(\mathbf{r}sD, k\mathbf{r}D - h).F(\mathbf{r}sD, k\mathbf{r}D - h + 1) = -1;$$

il s'ensuit :

$$\begin{aligned} |F(\mathbf{r}sD, k\mathbf{r}D - h)| &< \mathbf{r}^{n-1}(sD)^n, \\ |F(\mathbf{r}sD, k\mathbf{r}D - h + 1)| &< \mathbf{r}^{n-1}(sD)^n \end{aligned}$$

Chacune des racines réelles de l'équation $f(x) = 0$ est alors parfaitement caractérisée par un nombre k déterminé ; mais alors à chaque nombre \mathbf{r} quelconque correspond aussi un nombre h déterminé et on peut alors comprendre les nombres h comme « fonctions du nombre entier indéterminé \mathbf{r} » définies par la fonction à coefficients entiers $F(y, z)$.

Dans les résultats de l'« Arithmétique générale » ou de la « théorie arithmétique des fonctions entières d'indéterminées à coefficients entiers », on ne peut que voir un rassemblement de tous les résultats obtenus en attribuant des valeurs entières aux indéterminées. Dans cette mesure, les résultats de l'Arithmétique *générale* appartiennent donc aussi à la théorie des nombres spécifique usuelle et tous les résultats de la recherche mathématique la plus profonde doivent finalement pouvoir être exprimés dans ces formes simples utilisant les propriétés des nombres entiers. Mais pour laisser apparaître ces formes simplement, il fallait en premier lieu une façon appropriée et claire d'exprimer et de représenter les nombres eux-mêmes et à ceci l'esprit humain a certainement travaillé constamment et avec peine depuis les temps les plus reculés, avec plus ou moins de succès selon les époques et de manières toutes différentes selon les différents peuples²⁹. Le fruit de ce travail, nos désignations des nombres par des

²⁹ Cf. la dissertation d'Alexander v. Humboldt : Sur les systèmes usuels de signes numériques chez différents peuples et sur la source des valeurs de position dans les nombres indiens. (Lue au cours d'une séance de l'Académie royale des sciences de Berlin, le 2 mars 1829 ; imprimée dans le vol. 4 de ce journal p. 205 sq.) Dans cette dissertation la remarque suivante de Laplace* est citée (traduite en allemand) : « C'est de l'Inde que nous vient l'ingénieuse méthode d'exprimer tous les nombres avec dix caractères, en leur donnant une valeur absolue et une valeur de position ; idée fine et importante, qui nous paraît maintenant si simple, que nous en sentons à peine le mérite. Mais cette simplicité même et l'extrême facilité qui en résulte

noms et des chiffres, fut aussi bien la condition préalable à la découverte des trésors de la connaissance dont l'arithmétique aujourd'hui dispose, comme pour l'établissement des « lois dans lesquelles nous appréhendons notre connaissance du mouvement des corps célestes » ; mais il fut aussi la condition préalable à l'établissement de la physionomie actuelle de la vie pratique tout entière, pour l'immense développement et la formation du commerce et des échanges, qui différencie aussi essentiellement le monde moderne de l'ancien.

pour tous les calculs, placent notre système d'arithmétique au premier rang des inventions utiles ; et l'on appréciera la difficulté d'y parvenir, si l'on considère qu'il a échappé au génie d'Archimède et d'Apollonius, deux des plus grands hommes dont l'antiquité s'honore. » * Laplace, Exposition du système du monde, sixième édition p. 376. Œuvres complètes de Laplace t. VI p. 404-405.