ENSEIGNEMENT

Enseigner l'analyse en DEUG à partir de son histoire

Dominique TOURNÈS (*tournes@univ-reunion.fr*)

Peut-on, doit-on enseigner les mathématiques à partir de leur histoire ? Deux livres récents, qui traitent de l'analyse mathématique au niveau des deux premières années d'université (DEUG ou classes préparatoires), me fourniront l'occasion de développer quelques idées autour de ce thème. Il s'agit de :

1) Christian Houzel, *Analyse mathématique, Cours et exercices*, Belin, Paris, 1996.

2) Ernst Hairer and Gerhard Wanner, *Analysis by its History*, Springer, New York, 1996.

Tout d'abord, il est important de réaliser que l'analyse que l'on enseigne actuellement au niveau DEUG est, à peu de chose près, l'analyse des XVIII^e et XIX^e siècles, autrement dit celle qui a été pratiquée par Euler avant d'être formalisée par Cauchy et Weierstrass. C'est donc de cette analyse « classique » que je vais parler, en faisant abstraction des sens élargis que le mot « analyse » a pu acquérir plus récemment, à la suite des recherches du XX^e siècle. Et c'est précisément parce que cette analyse est ancienne, parce qu'elle fait désormais partie de l'histoire, qu'il est légitime et pertinent de s'interroger sur la façon de la présenter à nos étudiants.

En quoi consiste cette analyse ? Quels sont les problèmes qui lui ont donné naissance ? Schématiquement, on peut rappeler que l'invention du calcul infinitésimal par Newton et Leibniz, à la fin du XVII^e siècle, a fourni un formalisme adéquat permettant de traduire mathématiquement de nombreux phénomènes naturels à partir de leur évolution instantanée. Les grands problèmes de la mécanique céleste et de la physique mathématique se sont alors ramenés à la résolution d'équations différentielles — ordinaires ou aux dérivées partielles — assorties de conditions initiales ou de conditions aux limites. C'était là le versant mathématique de la doctrine philosophique du déterminisme : connaissant l'état initial d'un système matériel et sa loi d'évolution, il devenait possible de prédire son comportement ultérieur. Enthousiasmés par cette approche qui semblait leur livrer les clés de la nature, les mathématiciens — on disait alors les géomètres — du XVIII^{e} et XIX^{e} siècles se sont lancés à corps perdu dans la résolution des équations différentielles. Jean Leray, un des grands mathématiciens de notre époque, a parfaitement résumé cette quête en écrivant, en 1963 : « Le problème de Cauchy pour les systèmes différentiels ordinaires a été, bien entendu, le plus important problème mathématique tant que l'artillerie a régi le monde, tant que la mécanique céleste a été la théorie scientifique principale et triomphante ».

L'obstacle majeur auquel se heurtait cette analyse « triomphante » était que, en dehors de quelques cas très particuliers, on ne savait pas résoudre les équations différentielles qui apparaissaient ! L'intégration par quadratures (c'est-à-dire l'expression des solutions sous forme finie à partir des fonctions usuelles, au moyen des opérations algébriques courantes et de la primitivation), sur laquelle reposaient d'abord tous les espoirs, s'est révélée n'être qu'une sorte de chimère : vers 1840, Liouville a montré que des équations différentielles parmi les plus simples, telles $y' = x + y^2$, n'étaient pas intégrables par quadratures. Les mathématiciens ont donc été contraints de faire preuve de créativité : ne pouvant se contenter d'algorithmes finis, ils ont dû imaginer toutes sortes d'algorithmes infinis susceptibles de « représenter » les solutions cherchées : algorithmes discrets (séries infinies — en particulier séries entières et séries trigonométriques —, produits infinis, fractions continues...) et algorithmes continus (fonctions définies par une intégrale...). Toute l'analyse classique est là : c'est, en quelque sorte, la science des algorithmes infinis, et on peut y voir le meilleur exemple que les objets mathématiques ne sont pas donnés mais construits.

Les problèmes que doit surmonter l'analyse sont, par nature, de deux types. Il y a, en premier lieu, un problème conceptuel : quel sens donner à un algorithme infini dans la mesure où il n'est pas possible de réaliser effectivement une infinité d'opérations ? ; une telle création idéale de l'esprit du mathématicien représente-t-elle en fin de compte quelque chose de réel ? C'est, pour simplifier, le problème de la convergence. Vient ensuite un problème pratique incontournable : comment, à partir de ces algorithmes infinis théoriques, obtenir des valeurs numériques qui puissent être considérées comme suffisamment précises et utiles dans le cadre des problèmes concrets dont on était parti ? Un artilleur n'a évidemment que faire d'une série infinie, même si on lui garantit que la somme de la série « est » la solution exacte dont il a besoin ; tout ce que souhaite notre homme, c'est qu'on lui dise comment régler l'angle de tir du canon pour que le boulet tombe à peu près à une distance donnée. C'est ainsi que, pour être utile, l'analyse mathématique doit, en fin de compte, devenir analyse « numérique ». Pour les mathématiciens du XVIII^{e} et XIX^{e}

siècles, l'aspect conceptuel et l'aspect numérique étaient indissociables : Euler, qui a écrit un traité d'artillerie et qui s'est beaucoup intéressé à la mécanique céleste, mêlait toujours les créations théoriques les plus imaginatives à de gigantesques calculs numériques ; Cauchy, en mettant au point le fameux théorème d'existence pour ce qui est appelé depuis le « problème de Cauchy », a pris soin de ne pas séparer la preuve de la convergence de la construction d'une méthode numérique dont on puisse évaluer l'erreur.

Je souhaiterais faire comprendre aux étudiants à quel point la dualité précédente caractérise l'analyse : je voudrais qu'ils perçoivent cette dialectique, cette pulsation, ce va-et-vient permanent entre le fini et l'infini, entre le discret et le continu, entre l'algébrique et le transcendant, entre le numérique et le littéral, entre l'objet calculable et l'objet idéal ; je voudrais qu'ils ressentent la double nécessité, d'une part de prouver l'existence des objets idéaux que l'on manipule (car cette existence ne va pas de soi), et d'autre part de construire des approximations calculables de ces objets idéaux (en vue des applications). Je voudrais enfin que les étudiants apprécient la beauté de ce détour que font les analystes par des objets idéaux, infinis, inaccessibles, avant de retomber sur leurs pieds dans les applications les plus concrètes (le même phénomène s'était produit, au XVI[e] siècle, quand les algébristes italiens avaient osé recourir à des nombres « imaginaires », qui n'existaient tout d'abord que dans leur esprit, afin de trouver les solutions réelles d'équations du troisième degré à coefficients réels). Il est clair que le calcul infinitésimal n'est pas seulement légitimé par une définition « rigoureuse » des notions de nombre réel, de limite ou de fonction (de telles définitions sont seulement apparues à la fin du XIX[e] siècle, alors que la mécanique céleste et la physique mathématique avaient déjà obtenu d'immenses succès) ; le calcul infinitésimal est tout autant validé par le fait qu'on ait pu envoyer des hommes sur la lune et même les en faire revenir !

Une fois convaincu que le but de l'analyse classique est de résoudre les équations différentielles (plus généralement les équations fonctionnelles) et que, pour cela, il faut apprendre à construire de nouvelles fonctions au moyen de processus infinis divers, on peut commencer à se pencher sur l'enseignement actuel de cette discipline. Or, comment sont conçus la plupart des cours d'analyse du DEUG ? Il semble y avoir une trame assez immuable : d'abord des généralités interminables sur les ensembles, les nombres réels, les fonctions, les limites, la continuité, la dérivabilité... et, quand arrivent enfin les équations différentielles, c'est déjà le dernier chapitre, la dernière semaine de l'année. Il est alors trop tard pour faire quoi que ce soit d'intéressant, pour aborder des applications véritables et pour donner un sens global au cours d'analyse...

En fait, j'ai la chance d'enseigner au niveau de la préparation des concours d'enseignement : CAPES externe et agrégation interne de mathématiques. Le programme de ces deux concours est le même : c'est exactement celui du DEUG. L'avantage pour moi est d'avoir affaire à un public plus âgé, plus expérimenté, plus aguerri que celui des étudiants qui entrent à l'université juste après le baccalauréat. On pourrait s'attendre à ce que ces candidats, qui ont la licence, voire la maîtrise, parfois une longue expérience d'enseignement en lycée, aient assimilé le sens de l'analyse classique, conformément à ce que j'ai développé plus haut. Pourtant, voici un échantillon de ce qu'on peut lire dans les rapports récents des jurys du CAPES et de l'agrégation :

— premier groupe de remarques : « l'existence des objets manipulés (limites, intégrales) n'est presque jamais mise en doute, sauf si l'énoncé laisse soupçonner une difficulté à ce sujet », « on néglige de s'assurer de l'existence des êtres dont on parle avant de les utiliser : c'est ainsi que l'on somme une série sans se préoccuper de sa convergence », « la justification de la convergence des intégrales généralisées est souvent oubliée », « il est hélas impossible de conclure sans déplorer le trop grand nombre de candidats qui s'obstinent à refuser l'existence d'une quelconque obstruction à l'interversion des signes limite et intégrale » ;

— second groupe de remarques : « très peu de candidats semblent avoir une pratique suffisante de leur calculatrice », « la partie numérique a rarement été abordée de façon réaliste », « 10% au moins des candidats semblent ne pas avoir apporté de calculatrice », « les correcteurs constatent l'absence de calculs numériques avec réponses précises ».

Ces deux séries de citations me paraissent extrêmement significatives. Elles correspondent directement aux deux aspects de l'analyse que j'ai évoqués plus haut. D'un côté, les étudiants ne parviennent pas à « faire exister » les objets infinis qu'ils manipulent et, à l'autre bout de la chaîne, ils sont réticents et maladroits lorsqu'il s'agit de « concrétiser » ces mêmes objets par un calcul numérique explicite. Ces étudiants sont tout autant déboussolés par l'abstrait que par le concret ; en fait, ils fuient tout ce qui « fait sens ». Pour beaucoup d'entre eux, l'analyse se réduit à une sorte de « no man's land » mathématique : j'entends par là une zone formelle intermédiaire dans laquelle on se contente de transformer des assemblages de symboles par simple imitation de ce qu'on a vu faire par l'enseignant.

Nos étudiants ne sont probablement pas les seuls responsables d'une telle perte de sens. Sans doute faut-il y voir l'effet d'un certain type d'enseignement de DEUG dont le contenu et les méthodes sont à repenser. Bien entendu, je ne possède pas de solution miracle, mais il me semble que les deux livres que je vais maintenant présenter peuvent être utiles à tout enseignant souhaitant se remettre en question.

Commençons par le livre de Christian Houzel. Dans l'introduction, l'auteur annonce clairement ses intentions : « L'enseignement des mathématiques en début d'université a souvent tendance à être formel, pauvre et dénué de contenu véritable ; il faut réagir contre cette tendance et nous avons essayé de présenter une initiation riche de contenu tout en restant simple et élémentaire. Le dogmatisme et une orientation technique représentent une autre tendance pernicieuse de l'enseignement ; nous avons essayé de nous laisser guider par les idées et de mettre en évidence le sens des mathématiques exposées ». En ce qui concerne le contenu « riche » et « véritable » que l'auteur appelle de ses vœux, rien de plus limpide : « l'axe directeur du livre est la notion d'équation différentielle ». L'unique thème retenu — pouvait-il y en avoir un autre ? — est ensuite développé sans relâche tout au long de 592 pages bien denses.

Le traité est organisé autour de problèmes, depuis des problèmes assez simples de mathématiques financières ou d'évolution d'une population jusqu'à des situations plus complexes issues de la physique : chute des corps, oscillateur harmonique, pendule simple, mouvement képlerien des planètes, circuits électriques. Indubitablement, cela permettra à l'étudiant curieux de tisser des liens réels entre deux enseignements — celui des mathématiques et celui de la physique — qui, le plus souvent, ont tendance à se dérouler en parallèle sans chercher à se rencontrer. Ici, au contraire, l'auteur montre comment les problèmes précédemment évoqués conduisent à des équations différentielles de plus en plus compliquées, dont la résolution nécessite et motive la construction de nouvelles fonctions : tout d'abord les fonctions usuelles (exponentielle, logarithme, puissance, fonctions trigonométriques), puis certaines fonctions spéciales. C'est au fur et à mesure des besoins que se met en place un outillage théorique adapté : nombres réels, notion de limite, convergence uniforme, construction des primitives des fonctions continues, premiers éléments d'algèbre linéaire, etc. L'aspect numérique n'est pas oublié : le calcul approché des fonctions usuelles, la résolution approchée des équations numériques, le calcul approché des primitives et, plus généralement, des intégrales d'équations différentielles, sont traités en profondeur et illustrés par des calculs effectifs poussés fort loin, avec une attention toute particulière accordée à l'estimation des erreurs.

Il n'est pas possible de faire un compte rendu exhaustif d'un ouvrage aussi riche. Je me contenterai de souligner deux points assez originaux auxquels j'ai été sensible. Tout d'abord, la preuve du théorème fondamental d'existence de Cauchy-Lipschitz est conduite en approchant la solution cherchée de l'équation différentielle au moyen de fonctions dérivables inspirées d'une des méthodes de Runge-Kutta. Outre le fait que cela généralise la méthode développée auparavant pour la construction des primitives des fonctions continues, on peut y voir un double avantage : 1) l'approximation est interne (on approche une fonction dérivable par des fonctions dérivables), ce qui évite les difficultés théoriques liées à la méthode plus classique des lignes polygonales d'Euler, dans laquelle interviennent des fonctions seulement dérivables par morceaux ; 2) on dispose directement d'une méthode numérique performante utilisable dans les applications. Par ailleurs, le second point qui m'a séduit est la présence d'un chapitre entier consacré à une approche élémentaire de l'algèbre linéaire en dimension deux (à travers le calcul et la réduction des matrices carrées), avec une application substantielle à la résolution des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants en dimension deux et à l'étude de leurs trajectoires. L'algèbre linéaire en dimension quelconque ne vient qu'après, dans le dernier chapitre, un peu comme la dernière pierre d'un édifice solidement construit. Bien que très différents de ce qu'on voit d'habitude à ce niveau, les choix de Christian Houzel semblent des plus naturels, tant pour des raisons historiques (dans une large mesure, l'algèbre linéaire s'est constituée en réponse aux problèmes linéaires apparaissant en analyse, notamment les systèmes différentiels linéaires) que pour des raisons didactiques (il est recommandé de faire travailler l'étudiant sur des cas particuliers simples et significatifs avant de se lancer dans des généralisations abstraites).

Je n'en dirai pas plus dans cette direction. J'espère simplement vous avoir donné envie de parcourir un livre dans lequel, pour ma part, j'ai beaucoup appris, même sur des sujets « élémentaires » que je croyais naïvement avoir épuisés depuis longtemps. Certes, d'aucuns soutiendront que le livre de Christian Houzel constitue une nourriture trop abondante, trop riche, trop subtile, trop délicate... pour l'estomac étique de l'étudiant de base d'aujourd'hui. À ceux-là, je répondrai qu'il est indispensable de briser le cercle vicieux extrêmement pervers qui semble guider nombre d'enseignants actuels : les étudiants sont faibles, donc on ne leur propose que des activités simplifiées, affadies et vidées de leur sens, donc ils n'ont pas les moyens de comprendre et deviennent encore plus faibles...

Quoi qu'il en soit, le livre sera utile à tout enseignant de DEUG ou de classe préparatoire qui souhaiterait donner davantage de sens et de cohérence à son enseignement. De leur côté, les candidats au CAPES et à l'agrégation y trouveront le support d'une réflexion en profondeur. Enfin, l'ouvrage pourra servir d'outil de formation continue pour les professeurs de lycée. À ce propos, un de mes amis, professeur de Terminale S, me disait récemment qu'il avait adopté le livre de Christian Houzel en tant que livre de référence. En effet, dans l'enseignement actuel en lycée, les allégements successifs des programmes ont fini par aboutir à des contenus peu cohérents, et l'évolution des pratiques pédagogiques fait qu'on ne s'y exerce plus guère à la démonstration. Il devient alors difficile pour l'enseignant de s'y retrouver, d'autant plus que les manuels scolaires paraissent souvent plus soucieux de leur aspect extérieur (présentation tape-à-l'œil en quadrichromie, mise en page inutilement complexe, dessins humoristiques dans les marges, etc.) que de la rigueur de leur contenu. Mon ami m'a dit avoir trouvé dans le livre de Christian Houzel quelques points de repère théoriques susceptibles de sous-tendre efficacement son enseignement de Terminale (même si, évidemment, il ne s'agit pas de développer ces questions devant les élèves) : une construction élémentaire des fonctions trigonométriques indépendante de la géométrie ; une preuve de l'existence des primitives des fonctions continues ne faisant pas appel à la théorie de l'intégration, ce qui justifie (en Terminale) l'introduction de l'intégrale à partir des primitives, etc.

Après ce premier panorama du traité de Christian Houzel, je voudrais revenir plus en détail sur les rapports que son contenu entretient avec l'histoire de l'analyse. De façon générale, on peut imaginer diverses manières d'introduire une perspective historique dans un enseignement universitaire. Souvent, on se contente d'un préambule historique lors de la première séance, avant le début du cours proprement dit. Ou alors, on insère ici et là quelques indications chronologiques et biographiques lorsque l'occasion se présente, c'est-à-dire essentiellement à propos des résultats qui « portent un nom » et qui, fatalement, un jour ou l'autre, provoquent des questions de la part des étudiants (intégrale de Riemann, règle de Cauchy, formule de Taylor, série de Fourier...). Ces façons de procéder sont certes intéressantes mais, d'après moi, elles restent superficielles et sans grande portée, dans la mesure où les éléments historiques présentés apparaissent, en général, déconnectés de la substance mathématique du cours. Dans cette approche, l'histoire n'est que plaquée sur les mathématiques, un peu comme un élément décoratif, au lieu d'en devenir véritablement une partie constitutive. Que l'on me comprenne bien : en suggérant ainsi que l'histoire devrait être intimement intégrée dans le cours d'analyse, je ne demande pas, évidemment, que l'on fasse lire aux étudiants les traités du XIX^{e} siècle, ni qu'on leur apprenne à raisonner avec les définitions, les notations et les méthodes du passé. Nous devons, cela va de soi, enseigner en DEUG une analyse ouverte sur les problèmes d'aujourd'hui (du moins ceux qui sont susceptibles d'une première approche élémentaire, par exemple les systèmes dynamiques, le chaos, les fractales...), en utilisant à plein les acquis théoriques récents et les moyens modernes de calcul (je pense notamment aux logiciels de calcul formel). Toutefois, s'agissant à ce niveau d'enseigner l'analyse classique, celle des XVIII^{e} et XIX^{e} siècles, il me semble indispensable, afin que les étudiants puissent l'assimiler en profondeur, de présenter les problèmes qui lui ont donné naissance et de faire revivre les difficultés conceptuelles qui ont accompagné son développement. Je plaide donc pour une présence permanente de l'histoire, mais de façon indirecte. Je veux dire par là qu'il n'est pas nécessaire que l'étudiant ait un contact direct avec les mathématiques du passé, encore moins avec les textes historiques (on peut réserver ces occupations à ceux qui suivent une formation en histoire des sciences). Ce qui importe surtout, c'est que l'histoire vienne irriguer en permanence la réflexion de l'enseignant pour que, au bout du compte, les activités proposées à l'étudiant conservent du sens et favorisent une construction saine des concepts.

Le livre de Christian Houzel répond parfaitement à ces vœux. Grâce à son immense culture, l'auteur parvient à faire revivre de façon transparente, c'est-à-dire sans que le lecteur s'en rende forcément compte, les difficultés, les progrès et les acquis de l'analyse classique. L'histoire est toujours là, sous-jacente, permanente, discrète, et c'est en elle que le texte puise sa cohérence et sa force. De plus, pour le lecteur curieux qui voudrait fréquenter directement les maîtres du passé, Christian Houzel a pris soin de donner, en appendice à chaque chapitre, de brèves indications historiques sur les notions étudiées et les références des textes originaux dont il s'est inspiré. On dispose ainsi, pour être précis, d'un total de 22 pages d'indications historiques et de 12 pages de bibliographie.

Venons-en à présent au second livre, celui de Hairer et Wanner. Il est le fruit d'un enseignement délivré à des étudiants de première année de diverses universités étrangères, notamment celle de Genève. La langue anglaise, dans laquelle il est rédigé, représente certes un obstacle : concrètement, ce livre ne pourra guère servir d'outil de travail à nos étudiants français ; toutefois, comme celui de Christian Houzel, je pense qu'il sera utile aux enseignants pour enrichir leur réflexion et renouveler le contenu de leurs cours.

Dans leur préface, les auteurs rappellent en quoi l'enseignement actuel de l'analyse va à rebours de l'évolution historique : « Traditionally, a rigorous first course in Analysis progresses (more or less) in the following order : (sets, mappings) $\Rightarrow$ (limits, continuous functions) $\Rightarrow$ (derivatives) $\Rightarrow$ (integration). On the other hand, the historical development of theses subjects occurred in the reverse order : (Cantor 1875, Dedekind) $\Leftarrow$ (Cauchy 1821, Weierstrass) $\Leftarrow$ (Newton 1665, Leibniz 1675) $\Leftarrow$ (Archimedes, Kepler 1615, Fermat 1638) ». En réponse à ce constat, une phrase extraite de la quatrième page de couverture affiche ostensiblement l'organisation de l'ouvrage : « This book presents first year calculus roughly in the order in which it first was discovered. The first two chapters show how the ancient calculations of practical problems led to infinite series, differential and integral calculus and to differential equations. The establishment of mathematical rigor for these subjects in the 19th century for one and several variables is treated in Chapters III and IV ».

Ce programme ambitieux est exécuté de la manière la plus plaisante qui soit. En parcourant le traité, nous ressentons de l'intérieur les immenses efforts effectués par les analystes pour apprivoiser l'infini, pour créer de toutes pièces les solutions des problèmes transcendants qui les tourmentaient et pour définir peu à peu de nouveaux canons de rigueur. Pour ne citer que quelques exemples puisés ici et là, un peu au hasard, le calcul des logarithmes par Briggs (1624), le développement du sinus en produit infini par Euler (1748), le développement de la tangente en fraction continue par Lambert (1768), les intégrales de Fresnel (1818), le pendule isochrone de Huygens (1673) ou l'étude par Jean Bernoulli de la développée d'une cycloïde (1695) constitueront sans nul doute, pour nos étudiants, des thèmes de réflexion bien plus enrichissants que nombre d'exercices stériles encombrant les manuels actuels de premier cycle.

Dans le livre de Christian Houzel, l'histoire était présente partout, mais seulement de façon implicite en ce qui concerne le cours délivré aux étudiants (je ne parle pas ici des éléments historiques rejetés en annexe). Hairer et Wanner, quant à eux, vont plus loin : l'histoire des mathématiques, constamment située au premier plan, devient à proprement parler matériel didactique. Le texte, tout en étant écrit en style moderne, est émaillé de citations, de figures, d'énoncés de problèmes, d'exemples et de contre-exemples directement puisés dans les mémoires originaux des grands analystes. À nouveau, je n'en dirai pas plus, ne voulant pas vous priver du plaisir de découvrir par vous-même à quel point ce second livre regorge de trésors.

En fin de compte, les deux ouvrages dont je viens de parler relèvent, chacun à sa manière, de l'exception. Il est assez rare — et c'est regrettable — que des mathématiciens de haut niveau de la trempe de Christian Houzel, Ernst Hairer et Gerhard Wanner se « commettent » à écrire des traités pour l'étudiant débutant de première année. Pourtant, quand ils s'en donnent la peine, quel résultat passionnant ! Il est vrai que nous vivons actuellement une période propice à l'édition mathématique. Cela conduit hélas à un océan d'ouvrages inutiles qui submergent les étalages de nos librairies et les rayons de nos bibliothèques. Cependant, une telle situation d'abondance porte en elle une heureuse contrepartie : au milieu de l'océan de médiocrité peuvent naître quelques perles de culture polies par de savants orfèvres. Loin des modes et de la facilité, les livres que j'ai tenté de vous présenter font, tous deux, le pari de l'intelligence. À leur lecture, on ne peut qu'être convaincu que nos étudiants méritent le meilleur.