LIVRES

Jeux d'esprits et enigmes mathématiques
Elisabeth Busser et Gilles Cohen
Odile Jacob, 1998

Un livre qui se propose de rendre compréhensible les mathématiques ? D'un œil circonspect, le lecteur se prend à douter car ce genre de livre est devenu un exercice de style fort répandu. Mais très vite le scepticisme du lecteur se dissipe. Tout d'abord, l'absence des signes cabalistiques propres aux mathématiques facilite la lecture. Les exemples empruntés à la vie quotidienne, permettent une approche concrête des mathématiques. Ainsi on apprend à affronter de manière rationnelle les promotions des supermarchés (et ne plus être impressionné par les +25% de produit en plus), les prêts bancaires etc. Cette découverte est faite sur le mode humoristique, qui rend la lecture facile (il manque un peu d'humour dans les démonstrations, mais cela doit plutôt être le fait de la rigueur nécessaire à cet exercice). Une approche critique est proposée à travers l'étude des statistiques et le problème des échantillons biaisés, ce qui est aussi une manière de faire comprendre l'importance de savoir manier les nombres. J'ai même réussi à comprendre les probabilités et cela me fait penser que si ce livre avait existé un peu plus tôt j'aurais peut-être eu des bonnes notes en math (mais je ne serai pas devenu pour autant fort en maths, rassure toi papa)

Jean-Pierre Liégeois, jeune lecteur du Var (83)

An Introductory course in commutative algebra
A.W. Chatters, C.R. Hajarnavis
Oxford Science Publications, 1998

Ce petit livre expose de manière plutôt agréable des rudiments d'algèbre commutative (divisibilité, anneaux euclidiens, factoriels, polynômes, extensions de corps) en vue de quelques applications arithmétiques marquantes :

– théorème de Lagrange sur les sommes de quatre carrés ;
– constructibilité (ou non-constructibilité) à la règle et au compas, en particulier des polygônes réguliers ;
– cyclicité du groupe multiplicatif d'un corps fini ;
– existence et « unicité » des corps fini d'ordre donné ;
– existence d'un corps de rupture.

Les notions sont introduites au fur et à mesure des besoins des applications ; les définitions sont souvent judicieusement commentées (du genre « Faut-il imposer $1 \neq 0$ dans la définition d'un anneau ? »). Il y a beaucoup d'exemples détaillés et chacun des 15 chapitres se clôt par une dizaine d'exercices dont certains sont résolus.

Antoine Chambert-Loir. Université Paris 6

The mathematical Olympiad handbook. An introduction to problem solving
A. Gardiner
Oxford Science Publications, 1997

Voici un livre d'exercices d'olympiades, en l'occurrence britanniques, écrit par l'un des entraîneurs de l'équipe du Royaume Uni aux Olympiades internationales. De facture classique (40 pages de rappels divers, 10 pages de références bibliographiques, 30 pages de problèmes et 130 de solutions), il est intéressant de noter que les corrections ne sont jamais complètes mais plutôt une transcription de ce que pourrait dire un enseignant pour aider à la résolution de l'exercice.

Les énoncés sont souvent intéressants, même s'ils sont considérablement plus faciles que leurs homologues internationaux.

En résumé, ce livre plaira à ceux que le genre intéresse, les autres l'éviteront probablement.

A. C.-L.

Modern Mathematics in the Light of the Fields Medals
Michael Monastyrsky
A.K. Peters, 1998

Ce livre est la traduction complétée d'un ouvrage publié en Russie en 1991. Il donne en 150 pages une vue d'ensemble d'une partie des mathématiques contemporaines à travers l'œuvre des Médailles Fields de 1936 à 1994. Les lauréats sont regroupés par thèmes. L'analyse des œuvres des lauréats est précédée d'un historique de la création de la Médaille Fields et de la liste des membres des comités de sélection.

Il s'agit d'un ouvrage de vulgarisation de bon niveau agréable à lire.

Riemannian Geometry : a beginner's guide, 2e Edition
Frank Morgan
A.K. Peters, 1998

Le livre de F. Morgan n'est ni un traité, ni un livre de vulgarisation, mais plutôt une invitation à la géométrie avec comme objet central l'une des notions fondamentales de la géométrie riemannienne, celle de courbure.

L'approche extrinsèque (celle des sous-variétés plutôt que celle des variétés abstraites) permet à F. Morgan d'aller droit au but et de donner des formules utilisables immédiatement sur les exemples développés dans le corps du texte ou proposés en exercices. L'auteur ne se limite pas pour autant aux seuls aspects calculatoires et extrinsèques de la courbure : les interprétations géométriques (variation première de l'aire pour la courbure moyenne par exemple) et les aspects intrinsèques ne sont pas oubliés.

En moins de cinquante pages, F. Morgan réussit à introduire les notions principales (courbure, dérivée covariante, géodésique), à esquisser les démonstrations de théorèmes aussi fondamentaux que le « Theorema Egregium », le théorème de Gauss-Bonnet ou à énoncer les théorèmes de comparaison de la géométrie riemannienne contemporaine.

Cette présentation pragmatique, efficace, mais néanmoins attrayante de la géométrie riemannienne n'est pas fermée sur elle-même. Le Chapitre 2 contient une jolie application de la notion de courbure à un problème d'ingénierie. Le chapitre 7 est une incursion dans la théorie de la relativité ; F. Morgan y explique la précession de l'orbite de Mercure (avec des extraits de la traduction de l'article d'A. Einstein de 1916). Le chapitre 10 ouvre quant à lui sur une généralisation de la notion de courbure, motivée par l'étude des cristaux. Au delà de son intérêt intrinsèque, ce dernier chapitre a la particularité de présenter des résultats originaux obtenus par des « undergraduates » de Williams College (Williamstown, Massachusetts).

Le livre est complété par un formulaire, des index alphabétiques, des exercices variés, une importante bibliographie croisée et bien sûr de nombreuses illustrations.

Voilà un bel ouvrage pour la défense et l'illustration des mathématiques. Lire le livre de Frank Morgan est un plaisir à faire partager.

P. Bérard. Institut Fourier, Grenoble

Algebraic Theory of Numbers
Hermann Weyl
Princeton, Landmarks in Mathematics, 1998

Ce livre est la réédition sans changement du livre qui a inauguré en 1940 la collection *Annals of Mathematics Studies* de Princeton University Press, collection qui comprend maintenant plus de 140 titres.

Le but d'Hermann Weyl était d'écrire une monographie en anglais sur la théorie algébrique des nombres car il n'existait pas d'après lui à l'époque, de monographie en anglais qui rendît compte des progrès de la théorie algébrique des nombres dus en particulier à Hensel, Hilbert, Hasse, Artin, Chevalley,...

Presque 50 ans après la première édition, le livre reste étonnamment moderne et parfaitement utilisable pour un cours de théorie algébrique des nombres au niveau DEA ou éventuellement Maîtrise, en complément par exemple de Fröhlich-Taylor, *Algebraic Number theory*, Cambridge studies in advanced mathematics n°27, Cambridge University Press 1991. Il a l'avantage de ne pas se cantonner seulement à la partie algébrique de la théorie algébrique des nombres mais d'utiliser aussi la théorie des fonctions zeta et L. Les quatres chapitres couvrent

I.- La théorie des extensions algébriques d'un corps.

II.- La théorie de la divibilité dans les anneaux d'entiers des corps de nombres en suivant plutôt l'approche de Kronecker que celle de Dedekind qui s'est imposée comme la seule jusqu'à une date récente, cf. H. M. Stark *Galois theory, algebraic number theory and zeta functions* in From Number Theory to Physic p. 313-393, Springer Verlag, 1992.

III.- La théorie des corps p-adiques et de leurs extensions jusqu'à la définition du symbole d'Artin.

IV.- La théorie algébrique des nombres classique : géométrie des nombres, théorème de structure du groupe des S-unités, groupe des classes et répartitions asymptotiques des idéaux dans les classes ; théorie succinte des fonctions zeta de Dedekind et des fonctions L de Dirichlet, répartition des nombres premiers dans les progressions arithmétiques ; aperçu sans démonstration, de la théorie de corps de classes.

D. Barsky. CNRS, Université de Paris Nord

Gauss and Jacobi Sums
Bruce C. Berndt, Ronald J. Evans, Kenneth S. Williams
Canadian Math. Soc. S. of Mon. and Adv. texts, 22, Wiley-Interscience, 1998

Les auteurs déclarent dans l'introduction : « One major goal of this book is to offer simple proofs of many of the marvellous theorems on Gauss and Jacobi Sums scattered throughout the literature. Our proofs are frequently shorter, more systematic, and/or more elementary than previous proofs. We have aimed to make this book user-friendly ; in particular, it has been our wish to make classical theorems of Gauss, Jacobi, Eisenstein, and others accessible to beginning graduate students in mathematics and physics. »

Les auteurs arrivent avec élégance à ce but déclaré et donnent de nombreuses et jolies applications à la théorie des nombres. Ils se restreignent aux sommes sur les corps finis et sur les anneaux $\mathbb{Z}/k\ \mathbb{Z}$ en laissant de côté le cas des corps de nombres algèbriques, des corps de nombres et autres. Cela leur permet de faire tenir le contenu du livre en 583 pages.

Voici les titres des quatorze chapitres : « Gauss Sums, Jacobi Sums and cyclotomic numbers, Evaluation of Jacobi Sums over F_p, Residuacity, Reciprocity laws, Congruences for binomial coefficients, Diagonal Equations over Finite Fields, Gauss Sums over F_q, Eisenstein Sums, Brewer Sums, A General Eisenstein's reciprocity law to Wieferich's theorem (concernant léquation de Fermat) ».

A la fin du livre on trouve une liste de problèmes de recherche, une bibliographie très détaillée (65 pages) qui contient aussi des preprints récents ainsi que des publications sur internet, un « Author Index » et un « Subject Index », ce qui permet de retrouver facilement les resultats cités dans le texte, par exemple les interessantes applications en physique, théorie des graphes, combinatoire, codage, cryptographie et autres.

Chaque lect/rice/eur pourra se régaler à faire son choix de chapitres et/ou passages à lire ou étudier.

A. Helversen-Passotto. CNRS, Université de Nice Sophia-Antipolis

---

Graph connections (relationships between graph theory and other areas of mathematics)
L. W. Beineke & R. J. Wilson, éditeurs
Oxford lecture series in mathematics and its applications,1997

Le but de cet ouvrage est de présenter la théorie des graphes au travers de ses applications dans de nombreux autres domaines des mathématiques (logique, codes, théorie des nombres, géométrie, topologie, probabilités...) à un niveau introductif, avec néanmoins des perspectives. L'ouvrage comporte peu de démonstrations, mais donne des théorèmes qui illustrent son propos. Ce n'est donc pas un ouvrage de recherche, mais il peut servir à tous ceux qui désirent élargir leur culture et enrichir les techniques propres à leur sujet par un nouveau point de vue.

F. Sauvageot. Université Denis Diderot

Cours d'algèbre (primalité, divisibilité, codes)
Michel Demazure
Nouvelle Bibliothèque Math., Cassini, 1997

Il s'agit d'un cours original issu d'un enseignement à l'X. Il en possède, à mon avis, les qualités et les défauts. Son point de vue est nouveau, comparativement aux textes classiques d'algèbre puisqu'il commence par de l'analyse d'algorithmes (avec un langage informaticien) afin de montrer comment effectuer des tests de primalités. La difficulté de ces tests conduit donc l'auteur à montrer in situ les théorèmes de base de l'arithmétique (Euclide-Bézout, théorème chinois etc.) ainsi que des notions plus élaborées comme les résidus quadratiques, le code RSA... Au passage il est dit quelques mots sur la transformation de Fourier rapide et les algorithmes probabilistes. La deuxième partie, assez courte, est plus traditionnelle et présente la théorie générale des anneaux (principaux, factoriels, euclidiens). La dernière partie, aussi conséquente que la première, présente une introduction à la théorie des codes correcteurs d'erreurs vue comme cas particulier de l'arithmétique des corps finis. L'exposé est assez complet, bien détaillé et abondant en exercices de niveau et de type variés. Y sont inclus par exemple des exercices de programmation, avec une préférence pour CAML-light. Le niveau annoncé (licence ou bons élèves de CPGE) me semble assez largement sous-estimé et il me semble mieux adapté à ses autres objectifs : servir aux agrégatifs (notamment avec la nouvelle épreuve sur machine) et inspirer de nouveaux cours à l'université... Ce cours est donc le fruit d'une recherche assez approfondie et on y trouve nombre de commentaires qui montrent la culture de l'auteur. On se prend à regretter le manque d'humour (ou le trop de sérieux) du ton adopté. A ce propos je tiens à faire remarquer à l'auteur que réécriture est autant une horreur que l'expression l'algorithme termine qu'il décrie ; en effet scribere ne possède pas de e initial et on devrait donc s'en tenir à récrire, récriture etc. Ceci dit bien qu'il soit souvent vain (et inopportun ?) de lutter contre les évolutions de la langue !

F.S.

Polyhedra
Peter Cromwell
Cambridge Univ. Press, 1997

Les polyèdres constituent l'un plus anciens objets d'étude des mathématiques : rappelez-vous les solides platoniciens, le cube,le tétraèdre,. . . et le dernier, le dodécaèdre, le polyèdre régulier qui se rapproche le plus de la sphère, ainsi introduit par Platon : « Il restait encore une combinaison, la cinquième, c'est à l'Univers que le Dieu en fit application,pour en dessiner l'épure. » (Timée, 55b-d, trad. L. Robin, La Pléïade, p.476). Le livre de P. Cromwell, magnifiquement illustré, parcourt l'histoire des polyèdres sous ses différents aspects mathématique : certains des joyaux des mathématiques sont évoqués, comme *l'existence des polyèdres réguliers (combien de nos étudiants en connaissent la démonstration ?)

*les problèmes de dissection et le troisième problème de Hilbert (résolu par Dehn), depuis les dissections de Liu Hui (premier siècle de notre ère)

*ou encore le théorème de rigidité de Cauchy et la sphère de Connelly La notion de régularité permet une introduction douce aux groupes de transformations géométriques et la formule d'Euler est examinée en détail (on sait que l'étude de son domaine de validité a eu un rôle particulier dans l'histoire des mathématiques) formule de Gauss-Bonnet inclue.

*historique, culturelle, philosophique, artistique : l'ère des images virtuelles ne fera pas oublier les gravures de Wenzeln Jamnitzer

A qui s'adresse ce livre ? Depuis quelques années on constate un intérêt accru des littéraires pour les mathématiques. Mais le plus souvent elles sont peu ou mal connues. Cet ouvrage — comme d'autres — montre de manière passionnante les liens entre mathématiques et culture à travers les siècles (un Chapitre passionnant est consacré aux travaux de Kepler, astrologue, astronome et mathématicien)

Bien entendu ce livre n'est pas strictement du style à la mode des études mathématiques universitaires : d'abord, il donne trop envie d'aimer les mathématiques : (il traite des groupes en dimension trois mais ne contient ni les groupes de Coxeter, ni foncteur, ni catégories dérivées, ni statistiques financières),. . . Mais il pourrait faire aimer les mathématiques, au moins intéresser des littéraires, futurs architectes et artistes et distraire les mathématiciens, à défaut de les aider à illustrer leur enseignement et leurs conversations.

J.-M. Kantor. Université Denis Diderot

Mathématiques discrètes 1- Fondements et arithmétique entière
Hans-Heinrich Nägeli
Presses Polytechniques et Universitaires Romandes,1998

Ce livre de Mathématiques Discrètes développe un programme qui est —grosso modo— ce qui convient à une première année d'IUT d'Informatique : en cela, il répond à un besoin.

La première partie traite de la théorie naïve des ensembles d'une façon à la fois longue, certainement claire, mais peu illustrée : ainsi par exemples l'auteur aurait pu présenter le Théorème de représentation des treillis par ceux constitués des parties d'un ensemble muni de l'inclusion.

La seconde partie sur l'arithmétique est plus intéressante et fournit un programme adéquat et qu'il conviendrait de présenter dans la première année universitaire en Informatique. Cependant à la clarté du style s'oppose un manque d'originalité, d'exemples malins et les exercices mériteraient d'être étoffés en nombre et qualité.

Les 30 dernières pages contiennent les applications standard de l'arithmétique aux codes correcteurs d'erreur et à la cryptographie.

D. Richard. Université de Clermont 1

Tight and taut submanifolds
Editeurs T.E. Cecil et S. Chern
Cambridge, MSRI publ.32, 1997

Ce livre dédié à la mémoire de N.H. Kuiper est composé de 7 textes rédigés à la suite d'une conférence organisée par R.Bryant et S.Chern qui s'est tenue au MSRI du 1^{er} au 4 Mars 1994.

Le thème de la conférence était vaste mais le livre est presque exclusivement consacré à l'étude des immersions et plongements « tendus » (tight) et « ronds » (taut)[1]. Ce sujet a été un thème récurrent de recherche pour N.H. Kuiper tout au long de sa vie et il a fait dans ce domaine une œuvre de pionnier très importante : c'est à lui qu'il revient d'avoir posé clairement les premières définitions topologiques et surtout d'avoir démontré les premiers théorèmes d'existence non triviaux. Il a ainsi ouvert la voie à de nombreux travaux de recherche.

[1] Cette traduction qui, à ma connaissance, n'existait pas en français m'a été suggérée par R. Langevin.

Les surfaces tendues plongées dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ ont été introduites, à l'origine, par S.Chern et R.Lashof comme celles dont la courbure absolue (intégrale de la valeur absolue de la courbure de Gauss) est la plus petite possible. Comme l'a montré N.H. Kuiper, ceci est équivalent à dire que toute fonction hauteur dont la restriction à la surface est une fonction de Morse admet le nombre minimum de points critiques imposé par sa topologie. Ceci est encore équivalent à la propriété visuelle très simple suivante : tout plan affine de $\mathbf{R}^3$ découpe la surface en au plus 2 composantes (TPP « two piece property », suivant T. Banchoff).

Les surfaces rondes dans l'espace euclidien sont telles qu'une sphère quelconque les découpe en 2 composantes au plus. On montre qu'une surface ronde est tendue. Toutes ces définitions se généralisent au cas d'immersions d'une variété de dimension quelconque dans un espace euclidien quelconque. En outre, il se révèle très intéressant d'étudier les immersions tendues linéaires par morceaux de variétés polyédrales.

Signalons enfin qu'un des exemples non triviaux les plus marquants de la théorie est celui de la surface de Véronèse, image d'un plongement du plan projectif dans un espace euclidien de dimension 5. Ceci donne une idée des relations étroites entre cette théorie et la géométrie projective classique.

Le volume commence par un texte très émouvant de T.F. Banchoff : « Remembering Nicolaas Kuiper ». Ce texte relate rapidement les points marquants de la carrière de N.H. Kuiper en insistant sur le rôle important qu'il a joué dans le développement de la théorie des variétés tendues, sujet qui l'a intéressé pendant plus de 30 ans,jusqu'à la fin de sa vie. Il ressort de ce texte une très bonne idée de ce que fut sa remarquable intuition géométrique.

Le premier texte mathématique de ce livre est un inédit de N.H.Kuiper rédaction d'un cours qu'il donna en 86 à Washington University, Saint-Louis, intitulé : « Geometry in curvature theory ». Partant de la propriété des 2 composantes de Banchoff, il introduit peu à peu, dans un style lumineux qui lui est propre les outils géométriques nécessaires à l'étude des variétés tendues (en particulier les outils homologiques) et démontre, entre autres le théorème frondamental suivant qu'il avait trouvé en 62 : « si une surface admet un plongement tendu dans un espace euclidien de dimension N et si l'image n'est pas contenue dans un espace de dimension $N-1$, alors on a $N \leqslant 5$, si $N=5$, la surface est le plan projectif et l'image est la surface de Véronèse ».

Le deuxième texte « Tight Submanifolds, Smooth and Polyhedral » de T.F. Banchoff et W. Kunhel présente, en toutes dimensions pour la variété source et l'espace but, dans les cas lisse et linéaire par morceaux, les définitions et théorèmes fondamentaux concernant les immersions tendues. Ce texte comporte peu de démonstrations mais présente une très bonne vue d'ensemble de la théorie ; il débouche sur de nombreuses questions ouvertes.

Le troisième texte « Tightness for Smooth and Polyhedral Immersions of the Projective Plane with One Handle » de D.P. Cervone est une analyse des deux résltats suivants, dont la conjonction est assez surprenante : il n'existe pas d'immersion lisse tendue lisse du plan projectif avec une anse dans l'espace $\mathbf{R}^3$ (F.Haab 92), mais il en existe une dans la catégorie des applications polyédrales (D.Cervone 94).

Le quatrième texte « Taut and Dupin Submanifolds » de T.E. Cecil est consacré à l'étude des variétés rondes telles qu'elles ont été définies ci-dessus. Une classe très importante de sous-variétés rondes est formée par les sous-variétés isoparamétriques (variété à courbures principales constantes, dans le cas d'une hypersurface), étudiées par E. Cartan. Une classe un peu plus large, est celle des sous-variétés de Dupin, qui généralisent les cyclides découvertes par Dupin en 1822 pour des raisons mécaniques. L'article présente les différents aspects de la théorie (sans démonstrations, mais avec d'abondantes références pour les trouver) ainsi que les problèmes qui sont encore ouverts dans cette géométrie.

Le cinquième texte « Taut Immersions into Complete Riemanienne Manifolds » de C.L. Terng et G. Thorbergsson est une tentative pour étendre la définition d'une immersion ronde au cas où l'espace but n'est plus un espace euclidien. La définition ne peut se transcrire facilement du fait que la fonction carré de la distance à un point n'est pas différentiable le long du « cut-locus » de ce point. Les auteurs tournent la difficulté en utilisant la fonctionnelle d'énergie d'un chemin. C'est toute une géométrie très riche qui apparaît alors, en particulier dans le cas où l'espace but est un espace symétrique.

Le sixième texte « Null-Homotopic Embedded Spheres of Codimension One » de D. Ruberman est consacré à la démonstration et à des illustrations du théorème suivant : soit une sphère plongée, de codimension 1, homotope à zero. Si elle ne borde pas une boule, alors la variété ambiante est une sphère d'homologie rationnelle.

Le septième et dernier texte « Real Hypersurfaces in Complex Space Forms » de R. Niebergall et P.J. Ryan est consacré à l'étude des sous-variétés réelles de CP^n et CH^n Les auteurs étudient de nombreux exemples et abordent le problème de la classification.

Le livre se termine par une abondante bibliograhie sur les sous-variétés tendues, rondes et isoparamétriques, par la liste des publications de N.H. Kuiper et celle des thèses qu'il a dirigées.

En résumé, ce livre rassemble quelques très beaux textes de géomètrie où se mêlent techniques modernes de géométrie, topologie différentielle et constructions de géométrie analytique remontant au siècle dernier. A ce titre, il peut intéresser un vaste public. Les spécialistes y trouveront les derniers résultats connus sur le sujet en 97 et une excellente bibliographie.

N. Desolneux-Moulis. Université de Lyon I

Algorithmic Geometry
Boissonnat, J.-D., Yvinec, M.
Cambridge University, 1998

Ce livre est une traduction de l'ouvrage « Algorithmique Géométrique » publié par les mêmes auteurs chez EdiScience en 1995. Je l'ai traduit entre 1996 et 1998, en y ajoutant quelques exercices, et apportant quelques modifications mineures. Cependant, le texte est très proche de son antécédent en Français.

Ce livre présente les fondements de la géométrie algorithmique : c'est une discipline proche de l'informatique théorique qui s'intéresse au maniement algorithmique des objets géométriques. Traditionnellement, les objets étudiés sont polygonaux par morceaux, on mesure leur complexité en terme de nombre de faces (d'un polygone, d'un polyèdre, d'une triangulation, etc.). Les algorithmes sont mesurés en terme de leur efficacité (nombre d'opérations élémentaires en fonction de la complexité des objets traités). Une brève incursion dans l'espace des sphères permet de discuter des diagrammes de Voronoï qui encodent des propriétés de proximité des objets considérés. Les solutions développées dans ce livre privilégient autant que possible les algorithmes valides en toutes dimensions ; le cas de la dimension 2 ou 3 n'est traité à part que lorsque cela conduit à des améliorations significatives, ce qui n'est finalement pas si souvent le cas.

Par contraste, ce livre ne s'intéresse pas aux objects géométriques plus complexes comme les surfaces (semi-)algébriques pour lesquels les mesures de complexité sont différentes (degré, etc.). Pour cela, on peut consulter les monographies de Risler, de Bochnak, Coste et Roy, ou les livres de CAO sur les surfaces de Bezier. Il faut noter que le terme anglophone de « computational geometry » a dérivé des années 60 (où il désignait le calcul géométrique de Bezier et en CAO) à sa signification actuelle telle que nous la présentons ici.

Ce livre s'adresse premièrement à des mathématiciens qui auraient envie de s'intéresser aux aspects algorithmiques de la géométrie combinatoire. Il s'adresse aussi aux informaticiens qui auraient envie de comprendre quelle est la spécificité des objets géométriques en programmation et en particulier comment gérer leur structure combinatoire discrète. Par exemple, les prérequis de géométrie analytique sont exposés de manière succinte (géométrie projective orientée, calcul sur les sphères) dans la mesure où ils fournissent un cadre mathématique rigoureux. Le livre explore plus les aspects combinatoires, par exemple sur les polytopes convexes, sur les complexes cellulaires (arrangements de droites, de plans, de triangles, triangulations et diagrammes de Voronoï), avec les resultats élémentaires de complexité (relations de Dehn-Sommerville, d'Euler, séquences de Davenport-Schinzel) et les algorithmes.

En particulier, les liens entre les différentes structures permettent de mieux comprendre celle qui forme la dernière partie du livre : les diagrammes de Voronoï. Ceux-ci encodent des propriétés de proximités. étant donné un ensemble de site, le diagramme partitionne l'espace en régions chacune plus proche d'un site que de tous les autres. à chaque site correspond une région, qui possède certaines propriétés (connexité, etc.). Les diagrammes de Voronoï interviennent dans les phénomènes de croissance, on les retrouvent donc ainsi dans les structures cristallines, dans les pelures d'oignons et sur le cou des girafes ! Ils permettent aussi de reconstruire des formes à partir d'interpolations simples (par ex. par contours) et les auteurs les ont appliqués à des domaines comme l'imagerie médicale ou la géologie. Ce livre présente les fondements géométriques des diagrammes, ainsi que de nombreux algorithmes pour les calculer.

Les problèmes sont abordés par thèmes. L'une des thèses soutenues (et pas seulement propre à la géométrie) est que les algorithmes randomisés sont très élégants et faciles à programmer et fournissent souvent des solutions aussi très efficaces. Par conséquent un préliminaire algorithmique présente sur des exemples géométriques les méthodes algorithmiques de base (qui ne sont pas forcément propres à la géometrie : division-fusion, méthode incrémentale, structures de données) et discute un formalisme développé par les auteurs pour l'analyse et le développement des algorithmes randomisés. Puis les parties suivantes regroupent les algorithmes et problèmes sur des structures géométriques particulières : Enveloppes convexes (2D/3D/dD, programmation linéaire), Triangulations (de points 2D/3D, de polygones, polyèdres), Arrangements (d'hyperplans, de segments, de triangles) et Diagrammes de Voronoï (de points, Euclidiens/non-Euclidiens, de segments dans le plan).

Ma première impression quand j'ai voulu traduire ce livre est que c'est un ouvrage de référence, pour des étudiants troisième cycle et des chercheurs. D'ailleurs, c'est en tant que support de leur cours de DEA que les auteurs l'ont progressivement écrit. Les parties peuvent se lire indépendamment et donner ainsi lieu à des modules séparés. Il est très pédagogique, remarquablement précis dans son enoncé sans pour autant sacrifier à la lisibilité. Il aborde les difficultés progressivement, à l'intérieur de chaque partie. Il ne convient pas pour autant à une introduction à la géométrie algorithmique sans une certaine maturité mathématique (par exemple, cours d'introduction en DEUG). Il existe d'autres ouvrages plus adaptés pour une introduction sur le sujet. Pour l'algorithmique, il existe *Type de Données et Algorithmes* (C. Froidevaux, M. C. Gaudel, and M. Soria, McGraw-Hill, Paris, 1990). En ce qui concerne la géométrie, il existe par exemple *Computational Geometry in C* (O'Rourke, Cambridge University Press, 1994) pour une approche plus programmatoire et *Computational Geometry : Algorithms and Applications* (de Berg, van Kreveld, Overmars, Schwarzkopf, Springer, 1997) pour une introduction plus élémentaire présentée par ses applications.

H. Brönnimann. INRIA Sophia-Antipolis

Fatou type theorems ; Maximal functions and approach regions
FAUSTO DI BIASE
P.M. 147, Birkhäuser, 1998

Le livre dont il est question ici est une monographie sur un sujet assez technique, à savoir la comparaison de divers types de régions d'approche admissible pour la convergence de fonctions holomorphes (ou harmoniques) au bord d'ouverts de $\mathbb{C}^n$ (ou $\mathbb{R}^n$). Avant d'en venir précisément au contenu de l'ouvrage, il paraît utile de résumer quelques points essentiels sur le problème étudié.

L'existence de valeurs au bord pour diverses classes de fonctions holomorphes dans les ouverts de $\mathbb{C}^n$ est un sujet très exploré. La plupart des nombreux résultats obtenus à ce jour s'inscrivent dans le schéma suivant : on impose aux fonctions considérées certaines conditions de croissance ; de là, on établit que pour presque tout point ζ du bord, une telle fonction a une limite en restriction à certaines régions, dites régions d'approche naturelles de ζ. L'archétype de tels théorèmes est dû à Fatou (1906) : soit une fonction f holomorphe bornée dans le disque unité $\mathbb{D}$. Alors, pour presque tout point ζ du cercle unité, $f(z)$ a une limite quand z tend vers ζ tout en restant dans la région $\Gamma_\alpha(\zeta) = \{\, z \in \mathbb{D} : |z-\zeta| < (1+\alpha)(1-|z|) \,\}$ ($\alpha > 0$ quelconque). Au voisinage de ζ, la région d'approche naturelle $\Gamma_\alpha(\zeta)$ est un triangle de sommet ζ, contenu dans $\mathbb{D}$. En particulier, elle est non-tangentielle par rapport au cercle. Ce n'est pas un fait anodin : si l'on se donne une courbe simple $\sigma : [-1,1] \to \mathbb{D} \cup \{1\}$, tangente au cercle au point $1 = \sigma(0)$, Littlewood (1927) a établi l'existence d'une fonction f holomorphe bornée dans $\mathbb{D}$ et telle que pour presque tout point ζ du cercle, $f(\sigma(t)\zeta)$ n'ait pas de limite lorsque t tend vers 0. De ce point de vue, le résultat de Fatou semble donc essentiellement optimal.

La situation devient plus compliquée en plusieurs variables : à titre d'exemple, dans la boule unité $\mathbb{B}$ de $\mathbb{C}^n$ ($n \geqslant 2$), on peut imaginer deux possibilités de généralisation immédiate pour les régions $\Gamma_\alpha(\zeta)$ du disque : la première est le cône non-tangentiel défini par la même condition $|z-\zeta| < (1+\alpha)(1-|z|)$; la seconde est la région, plus grande, donnée par

$\mathcal{A}_\alpha(\zeta) = \{\, z \in \mathbb{B} \;:\; |1 - \langle z|\zeta\rangle\,| < (1+\alpha)(1-|z|)\,\}$, où $\langle\cdot|\cdot\rangle$ désigne le produit hermitien usuel sur $\mathbb{C}^n$ (pour $n=1$, on retrouve évidemment $\Gamma_\alpha(\zeta)$ dans les deux cas). Koranyi (1969) a montré que le théorème de Fatou reste vrai dans la boule pour les « grandes régions » $\mathcal{A}_\alpha(\zeta)$. Pourtant, celles-ci sont tangentielles (paraboliques) dans les directions données par le sous-espace complexe maximal de l'hyperplan tangent à la sphère en ζ.

En réalité, la plupart des résultats de ce genre sont sous-tendus par l'existence d'une structure d'espace homogène sur le bord du domaine considéré. étant donné un ensemble E, une fonction $\rho : E \times E \to \mathbb{R}_+$ est appelée une pseudo-distance si l'on a, pour tous x, y et z dans E, les propriétés $(\rho(x,y)=0) \iff (x=y)$ et $\rho(x,z) \leqslant C(\rho(x,y)+\rho(y,z))$ pour une constante positive C convenable. à la pseudo-distance ρ, on associe des pseudo-boules $B(x,r) = \{y \in E : \rho(x,y) < r\}$. Un espace homogène est la donnée d'un espace topologique E muni d'une pseudo-distance continue ρ et d'une mesure borélienne positive μ telle que l'on ait, pour tout x de E et tout $r>0$, l'inégalité $0 < \mu(B(x,2r)) \leqslant C'\,\mu(B(x,r)) < \infty$, où C' est une constante. La famille $\mathcal{B}$ des pseudo-boules de E permet d'associer, à toute fonction f de $L^1(E,\mu)$, la « fonction maximale » donnée, pour tout x de E, par

$$Mf(x) = \operatorname{Sup}\left\{\frac{1}{\mu(B)}\int_B |f|d\mu \quad:\quad B \in \mathcal{B} \;\text{ et }\; x \in B\right\}.$$

On peut montrer que l'application $f \mapsto Mf$ est de type faible (1,1), c'est-à-dire que pour toute fonction f de $L^1(E,\mu)$ et tout réel $\lambda > 0$, on a

$$\mu(Mf > \lambda) \leqslant \frac{C''}{\lambda}\int_E |f|d\mu,$$

pour une certaine constante C''. De là, un certain nombre de techniques standard en analyse harmonique permettent d'obtenir les résultats recherchés. Ces idées ont été inaugurées par Hardy et Littlewood (1930) dans le cadre du disque unité : E est alors le cercle unité, ρ la distance euclidienne et μ la longueur d'arc. Dans le cas de la boule unité de $\mathbb{C}^n$, l'espace E est la sphère, munie de la mesure de surface et de la pseudo-distance de Koranyi $\rho(z,\zeta) = |1 - \langle z|\zeta\rangle\,|$.

L'existence d'une structure d'espace homogène sur le bord d'un ouvert Ω permet également d'interpréter de manière plus satisfaisante la notion de région d'approche naturelle : un point z appartient à une région d'approche d'un point ζ dès que l'on a $\rho(\pi(z),\zeta) < \eta d(z)$, où $\pi(z)$ désigne une projection de z sur $\partial\Omega$, où η est une constante convenable et $d(z)$ est la distance euclidienne de z à $\partial\Omega$. Des régions d'approche naturelles (optimales au sens des théorèmes de Fatou et Littlewood) peuvent ainsi être exhibées dès lors que l'on munit $\partial\Omega$ d'une pseudo-distance optimale, en un sens approprié, pour la géométrie de l'ouvert. Ce point de vue a permis, par exemple, d'étendre au cas des domaines strictement pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$ (Stein, 1972), ou pseudoconvexes de type fini de $\mathbb{C}^2$ (Nagel, Stein & Wainger, 1981), les constructions précédemment décrites dans la boule (dans le cas des domaines de type fini, l'aspect en est encore plus compliqué, puisque dans la direction tangentielle complexe, la région d'approche naturelle est tangente au bord à un ordre variant avec le point considéré, avec une distorsion progressive de la géométrie).

A la base de la présente monographie se trouve la remarque suivante. étant donné un domaine Ω muni de régions d'approche naturelles $\mathcal{A}(\zeta)$ pour les points $\zeta \in \partial\Omega$, on considère une famille d'autres régions $\mathcal{A}^*(\zeta)$ contenues dans Ω et dont l'adhérence coupe $\partial\Omega$ uniquement au point ζ. A partir des ces régions, on peut définir une famille $\mathcal{B}^*$ de parties du bord en associant, à chaque z de Ω, la partie $\{\zeta \in \partial\Omega : z \in \mathcal{A}^*(\zeta)\}$ (dans le cas des régions naturelles, cette partie est alors, comme on l'a déjà mentionné, une pseudo-boule centrée sur le projeté de z et de rayon proportionnel à $d(z)$). La famille $\mathcal{B}^*$ détermine, à l'instar de la famille $\mathcal{B}$ des pseudo-boules de E, une application « fonction maximale » $f \mapsto M^*f$; si celle-ci jouit encore de bonnes propriétés -essentiellement le type faible (1,1)-, on obtient alors des théorèmes d'existence de valeurs au bord au sens de la convergence dans les nouvelles régions $\mathcal{A}^*(\zeta)$. C'est ainsi que l'on peut parfois exhiber des systèmes de régions d'approche $\mathcal{A}^*(\zeta)$ satisfaisantes pour les théorèmes de type Fatou et néanmoins strictement plus grandes que les régions naturelles, en ce sens que l'on peut y trouver des suites de points qui convergent vers ζ et qui, asymptotiquement, finissent par sortir de toute région d'approche naturelle de ζ. De tels systèmes ont été construits pour la première fois par Nagel et Stein en 1984 dans le cadre du disque unité ou d'un demi-espace euclidien dans $\mathbb{R}^n$; dans ces deux situations, les régions naturelles sont non-tangentielles tandis que les $\mathcal{A}^*(\zeta)$ contiennent une suite de points convergeant tangentiellement vers ζ. Au vu du théorème de Littlewood sur l'absence de limites le long de *courbes* tangentielles, on ne peut guère espérer mieux. La construction de Nagel et Stein requiert une certaine uniformité des propriétés géométriques du bord ; elle a pu être adaptée, par exemple, aux domaines strictement pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$ par Andersson et Carlsson (1992). En revanche, des domaines plus compliqués, comme les domaines de type fini de $\mathbb{C}^2$, semblent hors d'atteinte de la méthode.

Le livre de Di Biase comporte deux volets. On y trouve d'abord une introduction assez soigneuse à l'ensemble des faits rappelés sommairement ci-dessus. Il contient ensuite la description d'un procédé permettant d'unifier divers résultats connus sur l'existence de régions d'approche « séquentiellement plus grandes » que les régions naturelles et d'en étendre la portée au cas des domaines pseudoconvexes de type fini de $\mathbb{C}^2$ ou des domaines « non-tangentiellement accessibles » de la théorie du potentiel dans $\mathbb{R}^n$. Le procédé utilisé par l'auteur consiste, sous des hypothèses très générales, à ramener le problème dans le cadre discret des arbres codant la décomposition (quasi)-dyadique d'un espace homogène, donnée par Christ en 1990. Dans ce cadre, les régions cherchées existent d'après un travail d'Arcozzi, Urbanke et l'auteur (1996) : il reste alors à vérifier, ce qui n'est pas trivial, que l'on peut « plonger » convenablement les constructions obtenues dans le domaine de départ.

Du point de vue du lecteur, la présentation des généralités est plutôt agréable. Quoique certaines démonstrations soient omises, les idées principales sont bien mises en évidence. Les définitions des diverses notions relatives aux régions d'approche (éparpillées dans la littérature) sont ici suffisamment systématisées pour faire de ce livre une référence utile. L'ouvrage est, cependant, plus clairement voué à l'étude du phénomène de Nagel-Stein. Il s'agit d'un sujet très pointu. Les résultats obtenus sont intéressants pour des spécialistes d'analyse complexe et harmonique.

La bibliographie est fournie mais comporte certaines lacunes, comme l'omission d'un travail connu d'Aladro (1989) qui compare, dans les domaines strictement pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$, les régions d'approche naturelle et une famille de régions d'approche définie à l'aide de la métrique de Kobayashi du domaine. Enfin, on émettra une réserve d'ordre général : si le texte n'est jamais obscur, on peut juger qu'en revanche, il manque souvent de concision. C'est là un parti-pris d'exposition, mais une rédaction plus sobre gagnerait sans doute en agrément de lecture.

V. Thilliez. Université de Lille 1

An introduction of Knot theory
W. B. Raymond Lickorish
Graduate Text in Math, 175, Springer, 1997

Depuis des siècles les motifs des lignes entrelacées inspirent l'imagination des dessinateurs et servent aux fins de décorations et dans le tissage. Avant l'avènement des bateaux à vapeur, les nœuds jouaient un rôle important dans la vie des marins ; on trouve souvent des modèles d'enchevêtrements très variés et bien complexes dans les musées maritimes. Le lecteur intéressé par ces aspects de nœuds peut consulter l'excellent article de C. Mercat [Me], l'ouvrage fascinant d'Ashley [As], ainsi que l'essai historique récent de J. Przytycki [Pr]. En revanche, la théorie mathématique des nœuds a mis du temps à prendre son essor par rapport à l'algèbre ou à la géométrie. Malgré l'apparente simplicité avec laquelle on peut dresser des dessins de nœuds, de tresses et d'enchevêtrements, la recherche mathématique de ces objets s'avère difficile et passe par des chemins parfois inattendus. Dans un premier temps (au 19-ème siècle et jusqu'au début des années quatre-vingts) les nœuds étaient généralement considérés du point de vue un peu étroit basé sur une approche purement topologique. On a utilisé les techniques classiques de la topologie dont le groupe fondamental, les homologies, les formes d'intersections. Depuis environ 1984 la théorie des nœuds a trouvé sa deuxième jeunesse grâce notamment aux travaux de Vaughan Jones, Edouard Witten, Maxim Kontsevich et de ceux qui les ont suivis. Ces travaux ont sorti la théorie des nœuds de sa tour d'ivoire topologique en la mariant avec la théorie des algèbres de Lie, les groupes quantiques, les algèbres de von Neumann, la mécanique statistique et la physique quantique.

Le livre de W. B. R. Lickorish se propose de donner une introduction à la théorie mathématique des nœuds. L'objectif de l'auteur consiste à donner une exposition systématique, essentiellement complète et accessible aux étudiants au niveau de DEA. L'auteur a parfaitement réussi son pari. Le matériel sélectionné avec grand soin couvre les chapitres classiques (comme le groupe de nœuds et les signatures) et les chapitres plus modernes comme le polynôme de Jones et les invariants quantiques de 3-variétés. Le style d'exposition est caractérisé par une grande simplicité de langage et la clarté des démonstrations.

Le livre comporte 16 chapitres dont je décrirai ici très brièvement le contenu. Les deux premiers chapitres jettent les bases mêmes de la théorie (le coefficient d'enlacement, les surfaces de Seifert, les nœuds primaires, etc.). Dans les chapitres 3-5, l'auteur introduit et étudie le polynôme de Jones et ses applications aux entrelacs alternés. Les chapitres 6-9 et 11 sont consacrés aux sujets plus traditionels : les polynômes d'Alexander et de Conway des entrelacs, les signatures, les revêtements ramifiés et le groupe fondamental. Le chapitre 10 concerne l'invariant d'Arf des entrelacs et ses rapports avec le polynôme de Jones. Ensuite, dans les chapitres 12-14 l'auteur décrit les invariants quantiques des 3-variétés. Pour finir, les chapitres 15 et 16 sont consacrés aux généralisations du polynôme de Jones et notamment le polynôme HOMFLY et le polynôme de Kauffman. Notons que chaque chapitre est accompagné d'exercices soigneusement choisis.

Il va de soi que dans un volume si limité (environ 200 pages) l'auteur n'a pas pu s'attarder sur plusieurs aspects de la théorie des nœuds et d'ailleurs, ce n'était pas son but. En particulier, le livre dit très peu sur les rapports avec les groupes quantiques et la mécanique statistique. Le lecteur intéressé devra donc s'adresser à d'autres ouvrages dont une liste assez complète est donnée à la fin du livre.

En somme, l'ouvrage de Lickorish est une excellente introduction à la théorie des nœuds. Il peut parfaitement servir comme base pour un cours de DEA.

Bibliographie

[As] C. W. Ashley, The Ashley book of knots, Doubleday and Co, N. Y. (1944)

[Me] C. Mercat, *Théorie des nœuds et enluminure celte*, L'Ouvert 84 (1996) pp. 1-22

[Pr] J. Przytycki, *Classical roots of Knot Theory*, Chaos, Solitons and Fractals, 9 (1998) pp. 531-545

V. Turaev. CNRS, Université de Strasbourg

Introduction to Geometric Probability
Daniel A. Klain et Gian-Carlo Rota
Lezioni Lincee. Cambridge, University Press, 1997

Klain et Rota nous proposent une introduction cohérente et originale à la géométrie intégrale. La préface annonce la spécificité de leur point de vue, avec un rien de provocation : de nombreux matheux croiraient encore que le volume est la seule mesure sur les ensembles polyconvexes (i.e. union finie de convexes) de $\mathbb{R}^n$ qui soit invariante par les déplacements. Les auteurs s'attacheront à montrer qu'il n'en est rien et que si une de ces mesures sort du lot, c'est plutôt la caractéristique d'Euler. Cette dernière sera utilisée comme prototype des volumes mixtes intrinsèques, alors que l'on est habitué à leur introduction à partir du volume de la somme de Minkowski d'un ensemble avec des boules euclidiennes. L'autre particularité de l'exposé réside dans le rapprochement de la combinatoire et des probabilités géométriques. Une théorie des valuations invariantes sur les parties d'un ensemble fini est développée ; elle suit parfaitement celle des volumes mixtes et donne notamment lieu à des formules cinématiques et à un théorème de Helly discret. Enfin cette analogie permet d'appliquer l'intuition combinatoire à l'étude de la Grassmannienne et donne des versions continues de résultats de Sperner, Meshalkin, et al.

Le premier chapitre donne en quatre pages une motivation à l'étude des mesures invariantes. Il présente la solution de Barbier au problème de l'aiguille de Buffon et une preuve similaire du théorème de Sylvester : si $K_1 \subset K_2 \subset \mathbb{R}^n$ sont convexes et compacts, la probabilité qu'une droite rencontre K_1, sachant qu'elle coupe K_2, est égale au rapport de leurs périmètres.

On entre ensuite dans le vif du sujet : si $(L, \cap, \cup)$ est un sous-treillis de l'ensemble $\mathcal{P}(S)$ des parties d'un ensemble S, et si $G \subset L$ est stable par intersections et contient l'ensemble vide, on appelle valuation sur G toute application μ de G dans $\mathbb{R}$ telle que si A, B et $A \cup B$ sont dans G, alors

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

On demandera aussi que $\mu(\varnothing) = 0$. Le théorème d'extension de Groemer est démontré. Il donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une valuation sur G s'étende à l'algèbre booléenne qu'il engendre.

Le chapitre trois est consacré à l'étude du treillis des parties d'un ensemble fini S. Après des résultats sur les cardinaux des antichaînes, progressivement généralisés aux r-familles et aux s-systèmes, les auteurs décrivent l'espace vectoriel des valuations sur $\mathcal{P}(S)$ qui sont invariantes par permutation des éléments de S : une base est donnée par les valuations μ_i qui comptent les parties de cardinal i. La caractéristique d'Euler est $\mu_0 - \mu_1 + \mu_2 + \cdots$

La construction des valuations invariantes sur les polyconvexes est préparée dans les chapitres suivants. Elle sera effectuée en plusieurs étapes. La première consiste à la construction des volumes mixtes intrinsèques sur les pavés d'axes fixés. Si $P = [0, a_1] \times \cdots \times [0, a_n] \subset \mathbb{R}^n$, on pose

$$\mu_0(P) = 1$$

et pour $1 \leq i \leq n$,

$$\mu_i(P) = \sum_{1 \leq k_1, \ldots, k_i \leq n} a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_i}$$

Ils forment une base de l'espace des valuations sur les unions finies de pavés, invariantes par translation. A noter qu'ils ne dépendent pas de l'espace ambiant (si P est de dimension propre i, $\mu_i(P)$ est son volume i-dimensionnel). Bien sûr μ_0 est la caractéristique d'Euler.

Les auteurs étudient ensuite les mesures invariantes sur les Grassmaniennes $Gr(n, k)$, en mettant l'accent sur l'importance du choix de leur mesure totale $\lambda_{n,k}(Gr(n.k))$, notée $\left[{n \atop k} \right]$. Le nombre $\left[{n \atop 1} \right]$ est choisi pour avoir la formule de Kubota sans constante numérique : si K est un convexe compact de $\mathbb{R}^N$, sa surface $S(K) = \mu_{n-1}(K)/2$ est la moyenne du volume $(n-1)$-dimensionnel de ses projections hyperplanes :

$$\mu_{n-1}(K) = \int_{Gr(n,1)} \mu_{n-1}(K|\,\ell^{\perp})\, d\lambda_{n,1}(\ell).$$

Cette normalisation implique celle de toutes les mesures $\lambda_{n,k}$, elle permettra dans la suite de rendre intrinsèques les valuations μ_i. Elle est aussi justifiée par les applications combinatoires ; en effet les réels $\left[{n \atop k} \right]$ représentent le "nombre" de façons de choisir k vecteurs linéairement indépendants dans un espace de dimension n. Avec la normalisation choisie, ces analogues $\binom{n}{k}$ des coefficients du binôme vérifient des relations semblables à celles bien connues des coefficients du binôme et permettent de démontrer des versions continues des théorèmes établis au chapitre 3.

Après une construction fonctionnelle de la caractéristique d'Euler, tous les outils nécessaires sont en places et la théorie des valuations invariantes peut être traitée assez rapidement. Le théorème de caractérisation de Hadwiger, les célèbres formules de Crofton, Kubota, Steiner et les formules cinématiques sont établis sans difficulté. Le point le plus délicat consiste à montrer qu'à constante multiplicative près, le volume est la seule valuation invariante qui s'annule sur les convexes inclus dans des hyperplans.

Ce livre est abordable pour qui possède quelques notions de théorie de la mesure. Rigoureuse sans être lourde, la rédaction est attrayante, fluide ; elle approche la virtuosité au chapitre 8 avec une preuve très visuelle de la caractérisation des valuations simples. Les démonstrations sont complètes, directes (sauf celle du lemme 3.1.3), les idées principales sont bien mises en valeur. L'exploitation des analogies, la construction par étapes de la caractéristique d'Euler et des volumes intrinsèques, impliquent des répétitions qui ne nuisent en rien à l'intéret du l'exposé (du récit, voudrait-on dire) ; au contraire elles le structurent et le rendent très accessible. Ce livre donne une présentation moderne et élémentaire de la géométrie intégrale. Il conviendra très bien à ceux qui souhaitent apprendre ce sujet sans se faire trop violence ; il intéressera certainement ceux qui connaissent déjà, par son style agréable, sa présentation originale et aussi par la variété des sujets annexes qu'il évoque sans approfondir : valuations impaires, mesures d'inclusion des convexes, troisième problème de Hilbert, géométrie sphérique, etc ...

F. Barthe. Université de Marne La Vallée

Un théorème de Fermat et ses lecteurs
Catherine Goldstein
Presses Universitaires de Vincennes, 1995

« L'aire d'un triangle rectangle en nombres ne peut être un carré ». Fermat, qui défie en 1638 des amateurs de problèmes d'établir ce fait, trouvera en ce cas la place d'enregistrer sa justification personnelle dans les marges d'une édition de Diophante dont la réputation n'est plus à faire. L'un de ses correspondants, Frenicle de Bessy, produira lui aussi, dans les mêmes années pour autant que l'on puisse en juger, une démonstration du même énoncé. Tels sont les deux textes dont Catherine Goldstein a choisi de faire la pierre angulaire de son livre. Ils lui fournissent un matériau propre à discuter de questions plus générales, qui constituent le sujet réel de son enquête : comment des personnes concrètes données, que ce soient des mathématiciens du XVII^{e} siècle ou des historiens des XIX^{e} et XX^{e} siècles, ont-elles lu, à des fins mathématiques ou historiques, ces textes ? Si la question se pose, c'est que les commentaires de ces textes présentent des divergences. C. Goldstein se donne donc pour objectif d'en rendre raison, en mettant en évidence *comment* les objectifs d'un lecteur, les connaissances qu'il mobilise, les hypothèses qu'il privilégie informent l'interprétation qu'il donne d'un texte.

L'annotation marginale que Fermat rédige pour établir son énoncé a dû paraître plus que concise à ses commentateurs, si l'on en juge par la manière dont les interprétations comblent systématiquement chaque espace entre deux de ses assertions. C. Goldstein s'intéresse aux oppositions entre ces restitutions et s'attache à montrer comment elles se corrèlent à des hypothèses sur la pratique mathématique de Fermat ou sur les traditions dans lesquelles il s'inscrit. Rendant chaque lecture à ses visées, elle veut défendre un espace dans lequel plusieurs interprétations peuvent coexister, sans qu'un choix s'impose.

Un phénomène relatif à la lecture retient plus particulièrement l'attention de l'auteur : les exégètes mettent en œuvre, pour leur travail d'interprétation, des langues distinctes de celle en laquelle s'exprime en l'occurrence Fermat, ou des connaissances mathématiques extérieures à son texte. L'une des questions que l'auteur pose sans relâche est celle de comprendre l'effet que produit sur la lecture l'usage de la « notation algébrique », du « symbolisme », de « l'algèbre élémentaire ». Son analyse se déploie particulièrement en observant la manière dont les relations entre les démonstrations de Fermat et de Frenicle — que certains lecteurs donnent pour identiques, d'autres pas, d'où le problème — se trouvent réaménagées par l'effet d'une réécriture en de tels termes. La « banalisation » de ces connaissances a pu faire croire à l'innocence de l'opération. C. Goldstein détaille au contraire (p.88-9) nombre de plans sur lesquels la retranscription algébrique transforme les textes et, partant, pèse sur la comparaison entre eux.

Lorsque, voici maintenant plus de vingt ans, S. Unguru avait soulevé le problème de la légitimité de lire les textes géométriques grecs de l'Antiquité à la lueur de l'algèbre moderne, comme c'était alors déjà pratique courante, son article, au titre certes provocateur (« On the need to rewrite the history of Greek mathematics », *Archive for history of exact sciences*, 15 (1975), p.67-114), avait déclenché une levée de boucliers aux noms rien moins qu'obscurs : H. Freudenthal, B. L. van der Waerden et A. Weil étaient montés au créneau dès les numéros suivants de la revue. La question s'est malgré tout imposée comme pertinente chez les historiens, sans que leurs discussions s'appuient toujours sur de véritables analyses de cas. Il est donc heureux que C. Goldstein ait pris le soin, pour le dossier sur lequel elle se concentre, de détailler les effets de cette pratique. Sur ce point toutefois, genre du compte rendu oblige, une suggestion permettrait sans doute de mener l'analyse encore plus loin. En effet, les réécritures algébriques de raisonnements arithmétiques ont une longue histoire : R. Rashed[2], a montré comment elles commencent avec la version des *Arithmétiques* de Diophante que Qusta ibn Luqa achève dans la seconde moitié du IX^e siècle. La traduction de grec en arabe que celle-ci opère se double d'une restitution des résolutions arithmétiques de Diophante dans la langue de l'algèbre à laquelle al-Khwarizmi avait attaché son nom quelques décennies plus tôt. La comparaison, pour des textes à l'origine arithmétiques, de ces « lectures algébriques »— en des sens divers selon la nature de l'algèbre (celle d'al-Khwarizmi, celles du XVII^e siècle, celles d'aujourd'hui,. . .) sur laquelle s'appuie la retranscription devrait permettre de rapporter, plus précisément s'il se peut, les effets de la lecture à celle des caractéristiques de l'algèbre élémentaire qui en est plus spécifiquement responsable.

Tout comme ce fut le cas également dans le contexte des lectures de Diophante, C. Goldstein met en valeur l'impact de la retranscription dans un symbolisme algébrique auquel ni Fermat, ni Frenicle ne recouraient dans les démonstrations considérées, en en comparant l'effet à celui d'une relecture en les termes d'une géométrie algébrique qui peut paraître, à tort sur le plan des principes, plus franchement étrangère au XVII^e siècle. Lorsqu'A. Weil mobilise, pour analyser l'œuvre de Fermat, des outils géométriques dont le XX^e siècle a multiplié les usages en théorie des nombres[3], C. Goldstein souligne, par exemple, qu'il y produit un effet d'unité, là où d'autres approches lisent des fractures, voire des éléments hétéroclites. C'est un effet que les mêmes instruments ont également produit sur les *Arithmétiques* de Diophante (R. Rashed, *op. cit.*). Et ces travaux me semblent ne pas seulement poser la question de la variation intrinsèque que peut présenter la lecture. Ils posent également un problème passionnant aux exégètes sur *ce qui est donné à lire* : comment rendre compte de la démarche d'un mathématicien, telle qu'elle est inscrite dans les régularités de son texte, ou comment rendre compte du contenu de son texte, dès lors que ses résolutions se laissent si systématiquement appréhender par une unique approche dont lui-même ne disposait certes pas ?

C. Goldstein, quant à elle, propose une manière de faire travailler ces outils en vue de produire d'autres effets de lecture, lorsqu'elle les utilise, dans son appendice géométrique, à élaborer la comparaison entre les démonstrations de Fermat et de Frenicle sur lesquelles se base son livre. Par tous ces biais, l'ouvrage apporte sa contribution à des discussions en cours parmi les plus passionnantes dans l'histoire des mathématiques de cette fin de siècle.

K. Chemla. CNRS, Université Denis Diderot

---

[2] R. Rashed, *Diophante. Les Arithmétiques* (Volume III : Livre IV ; Volume IV : Livres V, VI, VII), Paris, Les Belles Lettres, 1984. K. Chemla, R. Morelon et A. Allard, *La tradition arabe de Diophante d'Alexandrie*, L'Antiquité Classique, tome LV, 1986, p. 351-375, en donnent un compte rendu, également basé, pour ce qui concerne ce point particulier, sur une conférence de l'auteur dont ils résument les thèses.

[3] C. Goldstein renvoie à A. Weil, *Two lectures on number theory, past and present.* L'enseignement mathématique, 1974 (le nom de Weil a été victme d'une omission dans la bibliographie, p. 215), aussi bien qu'à *Number theory. An approach through history from Hammurapi to Legendre*, Birkhäuser, 1984, pp. 114 *sq.*