ANDRÉ WEIL (1906-1998)

André Weil
©Sugaku Seminar

André Weil est décédé le 6 août 1998 à Princeton, à l'âge de 92 ans. Il était le frère aîné de la philosophe Simone Weil, morte en Angleterre en 1943. Né à Paris le 6 mai 1906, il entre à l'Ecole normale supérieure à l'âge de 16 ans. A sa sortie de l'Ecole, il fait de longs séjours dans des centres mathématiques européens parmi les plus actifs de l'époque (Rome, Göttingen, Berlin). Il soutient sa thèse en 1928. Son intérêt pour la civilisation indienne l'amène à accepter un poste à l'université d'Aligarh, près de Delhi, en 1930. De retour en France, il est nommé chargé de cours à Marseille puis professeur à Strasbourg, où il enseigne de 1933 à 1939. Il se trouve à Helsinki lorsque la guerre éclate. Arrêté par la police finlandaise, qui le prend pour un espion soviétique, il manque de peu d'être fusillé. Reconduit en France, il est emprisonné à Rouen et condamné pour insoumission. Il est libéré en mai 1940, incorporé à Cherbourg, et envoyé en Angleterre. Il parvient à regagner la France et émigre aux états-Unis en janvier 1941. Il y bénéficie de diverses bourses. De 1945 à 1947 il enseigne à Sao Paulo, puis obtient une chaire à Chicago, qu'il quitte en 1958 pour l'Institute for Advanced Study de Princeton. Il y prend sa retraite en 1976, mais continuera d'y travailler comme professeur honoraire. Le prix Wolf lui avait été décerné en 1979 et le Kyoto Prize en 1994.

Avec Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, Charles Ehresmann, Szolem Mandelbrojt et René de Possel, André Weil était l'un des fondateurs du groupe Bourbaki. Il y collabora jusqu'en 1956, s'appliquant à lui-même la règle de la retraite à cinquante ans qu'il avait fait adopter par le groupe.

Son œuvre a eu une influence considérable sur le développement de la géométrie algébrique et de la théorie des nombres des cinquante dernières années.

En 1940 et 1941, il établit pour les courbes de genre arbitraire l'hypothèse de Riemann sur les corps finis formulée par E. Artin en 1924 et prouvée par Hasse pour les courbes elliptiques en 1933. La démonstration qu'il esquisse alors (et qu'il rédigera complètement plus tard dans ses livres *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*[1] et *Courbes algébriques et variétés abéliennes*[2]) reposait sur un lemme de positivité de trace, dont la mise au point est à l'origine de ses travaux de la fin des années 40 sur la théorie des variétés abéliennes, et la géométrie algébrique en général. C'est ainsi qu'il fut amené à construire dans *Foundations of Algebraic Geometry*[3], une théorie des variétés algébriques « abstraites » sur des corps quelconques, où il donne en particulier les bases requises à la théorie des intersections. En 1949, il formule des conjectures (« les conjectures de Weil ») sur la fonction zêta des variétés algébriques sur les corps finis (rationalité, équation fonctionnelle, interprétation cohomologique, et généralisation de l'hypothèse de Riemann pour les courbes), et les démontre dans le cas des hypersurfaces monomiales. Ces conjectures fascinèrent les géomètres algébristes dans les vingt-cinq années qui suivirent. Elles furent l'une des principales motivations de Grothendieck pour ses travaux des années 60, notamment la construction de la cohomologie étale. La rationalité fut d'abord établie par Dwork en 1960, par des méthodes p-adiques. En 1965, Grothendieck, au moyen de la cohomologie étale, en démontra une généralisation et donna l'équation fonctionnelle et l'interprétation cohomologique espérée par Weil. Enfin Deligne, en 1973, prouva la dernière de ces conjectures, sur les valeurs propres des endomorphismes de Frobenius.

Dans sa thèse, généralisant un résultat de Mordell pour les courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$, Weil avait démontré, pour les jacobiennes de courbes quelconques sur un corps de nombres, que le groupe des points rationnels (« le groupe de Mordell-Weil ») est de type fini. Les variétés abéliennes, qui apparaissaient là pour la première fois dans son œuvre, devaient être pour lui une source d'inspiration constante, à travers, plus généralement, les problèmes arithmético-géométriques liés aux motifs abéliens. C'est à ce courant d'idées que l'on peut rattacher ses travaux sur les caractères de Hecke associés aux variétés monomiales et aux sommes de Jacobi, sur

[1] *Œuvres Scientifiques/Collected Papers*, Springer-Verlag, 1980, Tome I, II & III, [1948 a].

[2] Ibidem, [1948 b].

[3] Ibidem, [1946 a].

le corps de classes (construction des « groupes de Weil » des corps locaux et globaux), ainsi que ceux, généralisés par Shimura et Taniyama, sur les fonctions zêta de certaines variétés abéliennes à multiplication complexe. Il reviendra sur l'histoire de ce sujet dans son très vivant exposé Bourbaki *La cyclotomie jadis et naguère*[4] et son livre *Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker*[5].

On doit également à Weil des résultats profonds et novateurs sur les groupes arithmétiques. En 1958, motivé par un problème de Selberg, il étudie le module des déformations d'un sous-groupe discret d'un groupe de Lie semi-simple. Dans le cas cocompact, il résout complètement le problème, prouvant en particulier la rigidité infinitésimale si le groupe n'a pas de facteur SL_2. Quelques années plus tard, inspiré par des résultats de Siegel sur les formes quadratiques, il étudie les volumes des domaines fondamentaux pour les groupes arithmétiques. Suivant une idée de Tamagawa, il en donne un traitement systématique à l'aide de groupes adéliques dans *Adèles and Algebraic groups*[6]. Ce travail le conduit à écrire son article *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires*[7], où il définit le groupe métaplectique.

En 1967, dans un article dédié à Hecke, *Über die Bestimmung der Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen*[8], Weil prouve qu'une série de Dirichlet dont les « tordues » par suffisamment de caractères possèdent des équations fonctionnelles du type de Hecke est la transformée de Mellin d'une forme modulaire. Un résultat spectaculaire, qui fut ensuite généralisé par lui-même et par Jacquet-Langlands, et dont on peut considérer qu'il est à l'origine des « théorèmes réciproques » pour les formes automorphes. A la fin de son article, Weil observe que son théorème suggère la possibilité que toute courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ provienne d'une forme modulaire, de niveau égal au conducteur de la courbe. C'est cette conjecture, connue maintenant sous le nom de conjecture de Shimura-Taniyama-Weil, qui, dans le cas semi-stable, fut démontrée par Wiles en 1995 (et, comme on sait, implique le dernier théorème de Fermat).

Weil a aussi apporté des contributions importantes à la géométrie différentielle (démonstration faisceautique du théorème de de Rham, « métrique de Weil » sur l'espace des modules des courbes) et à la théorie analytique des nombres (formules « explicites » pour la somme des valeurs

[4]Ibidem, [1974 c].
[5]Ibidem, [1976 a].
[6]Ibidem, [1961, a]
[7]Ibidem, [1964 b].
[8]Ibidem, [1967 a].

d'une fonction aux zéros situés dans la bande critique de la fonction zêta d'un corps de nombres).

Citons encore ses monographies classiques *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*[9], présentant une théorie générale de la dualité pour les groupes abéliens localement compacts, *Introduction aux Variétés kählériennes*[10], premier exposé systématique moderne de la théorie de Hodge, et *Basic Number Theory*[11], où il traite, d'un point de vue adélique, la théorie des fonctions zêta et la théorie du corps de classes de manière uniforme pour les corps de nombres et les corps de fonctions. On consultera également avec profit, dans ses *Œuvres scientifiques*[12], les notes qu'il a rédigées sur ses articles et ses commentaires sur la création mathématique.

Dans ses dernières années d'activité, Weil s'est beaucoup intéressé à l'histoire des mathématiques, écrivant notamment le très beau livre *Number Theory : An Approach through History from Hammurapi to Legendre*[13]. Enfin, dans *Souvenirs d'apprentissage*[14], il évoque de façon émouvante sa jeunesse de mathématicien, jusqu'à son installation aux Etats-Unis.

Nous remercions vivement Henri Cartan et Jean-Pierre Serre de leur aide pour la rédaction de cette notice

Laurent Clozel & Luc Illusie

[9]Ibidem, [1940 d].
[10]Ibidem, [1958 a].
[11]Ibidem, [1967 c].
[12]*Œuvres Scientifiques/Collected Papers*, Springer-Verlag, 1980, Tome I, II & III.
[13]Birkhäuser, Boston, 1984.
[14]Birkhäuser, Boston, 1984.