

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES _____

ROSHDI RASHED _____

LES MATHÉMATIQUES INFINITÉSIMALES DU IX^e AU XI^e SIÈCLE

Vol. I : Fondateurs et Commentateurs. Vol. II : Ibn al-Haytham.

Jean CELEYRETTE

URA 1743 – Université de Lille 3

L'œuvre de Roshdi Rashed et de ses élèves sur l'histoire des mathématiques arabes est reconnue par l'ensemble de la communauté des historiens des sciences. Ses ouvrages sur l'histoire de l'optique — alors considérée comme partie intégrante des mathématiques — de l'algèbre, de la théorie des nombres, de l'analyse diophantienne ont profondément renouvelé la vision traditionnelle de la science arabe¹. Plus personne aujourd'hui ne peut réduire l'apport scientifique arabe à l'élaboration de traductions des grands textes grecs, ces traductions étant à leur tour traduites en latin pour permettre leur exploitation par les savants chrétiens. R.R. en découvrant et exploitant soigneusement de très nombreux manuscrits jusque là inconnus, en examinant finement l'histoire de la réception et des traductions arabes des textes grecs, a montré la richesse et sur beaucoup de points l'originalité des scientifiques, et en particulier des mathématiciens, arabes. Cette richesse et cette originalité sont confirmées par la lecture de ses deux volumes sur : *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*. L'auteur définit dans l'introduction le champ de la recherche : il s'agit d'examiner et de montrer la cohérence et la continuité des traités qui nous sont parvenus sur la mesure des surfaces et des solides courbes (lunules, cercles, paraboles, ellipses, sphères, cylindres, paraboloides) et sur la détermination des valeurs extrémales, isopérimètres et isépiphanes (cf plus loin), tous problèmes qui nécessitent l'utilisation de la méthode d'exhaustion. Rappelons en quoi consiste cette méthode. Il s'agit de montrer par exemple que l'aire latérale du cône de révolution est :

¹ Voir notamment : *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes* (Paris 1984); *Sharaf al Din al-Tusi : Œuvres mathématiques. Algèbre et géométrie au XII^e siècle* 2 vol. (Paris 1986); *Géométrie et Dioptrique au Xe siècle. Ibn Sahl, al-Quhi et Ibn al-Haytham* (Paris 1993).

$S = 1/2p.l$ (où p est la circonférence du cercle de base et l la longueur de la génératrice). On suppose d'abord que $S < 1/2p.l$; on construit alors une pyramide régulière inscrite dans le cône dont l'aire est comprise entre S et $1/2p.l$. La pyramide étant inscrite dans le cône son aire latérale devrait être inférieure à S . Il y a donc contradiction. On montre d'une façon analogue que $S > 1/2p.l$ est impossible. La méthode d'exhaustion sert ainsi à prouver qu'une formule connue donne bien la mesure d'une aire ou d'un volume donné, formule dont le calcul *a priori* nécessiterait le recours au calcul intégral. Cette preuve se fait par une double démonstration par l'absurde et utilise une minoration et une majoration de l'aire ou du volume considéré. La méthode d'exhaustion est présentée dans le livre XII des *Eléments* d'Euclide et est utilisée par Archimède dans plusieurs de ses livres : *La mesure du cercle*, *La sphère et le cylindre*, *La quadrature de la parabole* etc. Revenant à l'ouvrage de R.R., la plupart des textes qui y sont présentés peuvent donc être considérés comme dans la continuité d'Archimède et l'auteur établit que du IXe au XIe siècle existe dans ce domaine une véritable tradition de recherche. La réalisation d'un tel livre suppose la recherche, évidemment aléatoire, de manuscrits dans des bibliothèques au mode de classement parfois incertain, et leur transcription; lorsqu'il y a plusieurs manuscrits pour un même traité, l'établissement d'un *stemma* permettant de les situer historiquement les uns par rapport aux autres (en repérant les mots omis, les particularités stylistiques etc.); l'établissement d'un texte original "probable" et sa traduction française; une mise en perspective historique; enfin la rédaction d'un commentaire mathématique pour "permettre au lecteur moderne de suivre [le texte] sans être arrêté ni par la langue ni par les longueurs" : par exemple pour établir certains lemmes arithmétiques, comme la somme des n premiers entiers, ou la somme des carrés, ou des cubes, des n premiers entiers, Ibn al-Haytham raisonne sur des segments de droite. R.R. a fait le choix de présenter ses commentaires avec des notations et un vocabulaire "modernes". Les scientifiques peuvent ainsi plus aisément apprécier les techniques utilisées, mesurer la profondeur des intuitions et évaluer le progrès de la recherche. L'inconvénient évident est que la seule lecture de ce commentaire risque de conduire à des anachronismes : ainsi lorsque R.R. écrit dans son commentaire que Thabit "établit l'unicité de la borne supérieure", il ne s'agit que de faire comprendre la façon dont il met en œuvre la méthode d'exhaustion. R.R. le souligne lui-même, les mathématiciens médiévaux ne pouvaient concevoir la notion

de nombre réel, et donc non plus celle de borne supérieure; il en est de même d'autres notions (lignes trigonométriques, fonctions, équations de courbes, intégrales etc.) que R.R. introduit ailleurs. La lecture doit donc, à mon avis, commencer par le texte original — ou sa traduction —, cette lecture étant au fur et à mesure éclairée par le commentaire. Des textes présentés la plupart n'avaient été ni établis ni traduits, certains même étaient considérés comme perdus. Pour bien situer leur importance, on doit noter que si au Moyen Age chrétien plusieurs textes archimédiens ont été traduits, ils n'ont pratiquement été ni compris ni utilisés². Il faut attendre la fin du XVI^e siècle pour qu'on puisse parler d'une véritable réception d'Archimède dans le monde chrétien, cette réception étant à peu près unanimement considérée depuis Koyré comme un élément essentiel de la révolution scientifique du XVII^e siècle³. C'est donc d'un travail essentiel d'histoire des sciences dont nous rendons compte.

Volume 1 : *Fondateurs et commentateurs* (milieu du IX^e siècle — fin du XI^e)

Malgré les nombreuses incertitudes historiques il semble bien que la plupart des mathématiciens présentés ici aient joui d'un statut social enviable. Il s'agissait de notables mêlés aux cercles politiques, en tout cas dans l'entourage des souverains. Les plus remarquables d'entre eux ont travaillé à la cour des califes de Bagdad. Ces derniers atteignent le maximum de leur puissance au milieu du IX^e siècle, époque des trois frères Banu Musa. Ceux-ci animent une équipe de traducteurs et de chercheurs en mathématiques et mathématiques appliquées (astronomie, statique, constructions mécaniques) proches des califes abbassides successifs. Notons que les activités de traduction (des textes grecs) et de recherche sont intimement liées. Après la disparition des trois frères c'est un savant de tout premier ordre, non musulman, Thabit ibn Qurra, qui anime l'équipe. Il fondera d'ailleurs sa propre dynastie : certains de ses résultats sont améliorés par son propre petit-fils, Ibn Sinan. L'activité de Thabit est considérable; comme traducteur il a notamment rendu en arabe *La sphère et le cylindre* d'Archimède, les trois derniers livres des *Coniques* d'Apollonius et surtout révisé la traduction des *Eléments* d'Euclide et celle de *l'Almageste* de Ptolémée. La maîtrise de Thabit dans le maniement des procédés infinitésimaux se manifeste

² Sur la réception d'Archimède au Moyen Age chrétien voir : M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, 5 vol. (Philadelphie, 1978-85)

³ A. Koyré, *Etudes d'histoire de la pensée scientifique* (Paris 1973).

non seulement en géométrie, mais aussi en statique et en astronomie. R.R. présente les trois textes de géométrie qui nous sont parvenus, sur la mesure de la parabole, sur la mesure des paraboloides, sur les sections du cylindre. Le traité sur la mesure de la parabole occupe une place particulièrement importante, car il a suscité un courant de recherche pendant au moins un siècle. Il a pour but le calcul de l'aire du segment de parabole par la méthode d'exhaustion. Il semble que Thabit ignorant les travaux d'Archimède sur le sujet ait été contraint d'inventer sa propre démarche. Cette démarche est assez lourde, le traité comportant une vingtaine de propositions préliminaires, dont beaucoup de nature arithmétique, pour réaliser l'approximation de l'aire cherchée par celle d'une surface polygonale. Ses successeurs s'efforceront de réduire le nombre de ces propositions (Ibn Sinan le réduira à quatre). Dans le traité sur la mesure du paraboloïde il applique une méthode analogue à ceci près qu'il s'agit de l'espace et non du plan. Ce livre a également fondé une tradition de recherche illustrée notamment par Ibn al-Haytham (nommé par les latins Alhazen). Le troisième traité sur la section du cylindre et sur sa surface latérale réfère explicitement à un ouvrage perdu de l'un des Banu Musa. Thabit y élabore une théorie du cylindre et de ses sections planes en s'inspirant du modèle des *Coniques* d'Apollonius. Sans bien entendu définir les transformations géométriques — projection, translation, homothétie — Thabit met systématiquement en évidence certaines de leurs propriétés (conservation du rapport par exemple). Ce caractère systématique, le rôle central que tiennent les démonstrations du traité qui utilisent ces propriétés, montrent que l'auteur n'y a pas recours par hasard; ces techniques seront d'ailleurs reprises par la postérité : Ibn Sinan, Ibn al-Haytham, Sharaf al-Din al-Tusi en particulier. Thabit, à l'aide des résultats obtenus, peut mettre en œuvre la méthode d'exhaustion pour calculer l'aire de l'ellipse, puis l'aire latérale du cylindre oblique (R.R. rappelle à ce propos qu'Archimède dans *La Sphère et le cylindre* n'avait établi que l'aire du cylindre droit). Parmi les autres mathématiciens évoqués dans ce volume, notons al-Khazin dont les travaux à la fois algébriques et géométriques ne se situent pas dans la continuité de ceux de Thabit. R.R. présente ici son traité sur les isopérimètres et les isépiphanes. Le point de départ de cette recherche est la formule de Ptolémée : "puisque, parmi les figures différentes ayant leur périmètre égal, celles qui ont plus de côtés sont plus grandes, parmi les figures planes c'est le cercle qui est le plus grand (dont l'aire est la plus grande) et parmi les solides la sphère (dont le volume est le plus grand)". Al-

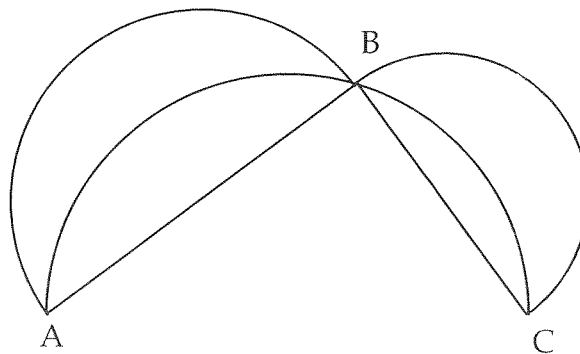
Khazin se propose de la démontrer par la géométrie. Pour le problème plan, celui des isopérimètres, il compare des polygones réguliers de même périmètre et différant par le nombre de côtés, puis un polygone régulier à un cercle de même périmètre à l'aide d'un polygone semblable circonscrit au cercle. Pour le problème de l'espace, celui des isépiphanes, il utilise la formule qui lie le volume de la sphère à son aire, formule qu'il obtient en approchant la sphère par des polyèdres non réguliers.

Volume II : *Ibn al-Haytham*
(2e moitié du Xe siècle — après 1040)

Ibn al-Haytham, qui semble-t-il a travaillé au Caire, a joui dans le monde arabe, dès le XIIIe siècle, d'une grande réputation; dans l'Occident chrétien il sera surtout connu pour ses travaux d'optique, sous le nom d'Alhazen. R.R. a entrepris l'édition complète de ses œuvres mathématiques, édition dont ce livre constitue le premier volume. Il présente ici 9 traités, dont 8 n'étaient pas édités, qui se répartissent en trois groupes.

1) Sur la quadrature des lunules et la quadrature du cercle.

Des trois traités regroupés ici le plus important est le traité exhaustif sur les lunules. Le point de départ est le célèbre résultat d'Hippocrate de Chios : partant d'un triangle rectangle ABC inscrit dans un demi-cercle on considère les deux "lunules" formées des portions de surfaces intérieures aux cercles de diamètres AB et BC et extérieures au cercle (ABC).



La somme de ces deux surfaces est égale à celle du triangle ABC. Ce résultat semblait une voie pour la résolution de la quadrature du cercle. Dans son traité Ibn al-Haytham généralise le résultat précédent au cas où l'angle B n'est pas droit mais obtus. Il établit toute une série de résultats

qui tiennent en fait au sens de variation de la fonction $\sin^2 x/x$. L'intuition, évidemment non formalisée, est ici remarquable.

2) Sur le calcul des volumes courbes.

Le traité sur le volume du parabolôïde clôt la tradition inaugurée par Thabit. La méthode d'exhaustion est mise en œuvre à l'aide de sommes de cylindres extérieurs et intérieurs correspondant à ce que nous appellerions aujourd'hui des sommes de Darboux. Ibn al-Haytham, à la différence de Thabit, traite à la fois le cas du parabolôïde résultant de la rotation de la parabole autour d'un de ses diamètres et de celui qui résulte de la rotation autour d'une corde perpendiculaire à l'axe. La même méthode est utilisée pour établir le volume de la sphère.

3) Isopérimètres et isépiphanes.

Ibn-al-Haytham tente d'approcher la sphère par une suite infinie de polyèdres réguliers qui y sont inscrits, ce qui bien sûr est impossible puisque les polyèdres réguliers sont en nombre fini. Néanmoins pour établir la propriété préliminaire relative à la comparaison de deux polyèdres réguliers à faces semblables ayant même aire totale, il est amené à faire une étude très neuve des propriétés des angles solides. Même si les travaux d'Ibn al-Haytham en mathématiques infinitésimales sont moins spectaculaires qu'en optique (on sait qu'il introduit la notion de rayon lumineux allant de l'objet à l'œil, par opposition à la tradition grecque du rayon visuel de l'œil à l'objet) et en astronomie (il met en question le système de Ptolémée), R.R. souligne à juste titre que ses intuitions sont extrêmement profondes.

Malgré l'importance du travail réalisé ces dernières années, beaucoup reste à faire pour parvenir à une compréhension satisfaisante et à une juste évaluation de la philosophie et de la science médiévale arabes. Toutefois il est aujourd'hui possible d'affirmer que du début du IX^e à la fin du XIII^e siècle la pensée philosophique et scientifique a connu dans le monde musulman une période d'activité intense d'une remarquable fécondité.

Errata

Quelques coquilles se sont glissées dans l'article "Mathematics in Hitler's Germany", et nous prions Reinhard Siegmund-Schultze de bien vouloir nous en excuser.

Dans le titre, au lieu de "historiacal question", lire "historical question"

p. 35, ligne 5 à partir du bas, au lieu de "weltanschauang", lire "weltanschauung"

p.37, ligne 9 à partir du bas, au lieu de "nathematically", lire "mathematically"

p.37, dernière ligne, au lieu de "fonctional analysis", lire "functional analysis".

Dans la bibliographie, Siegmund-Schultze (1986) : au lieu de "Neuordnong", lire "Neuordnung".

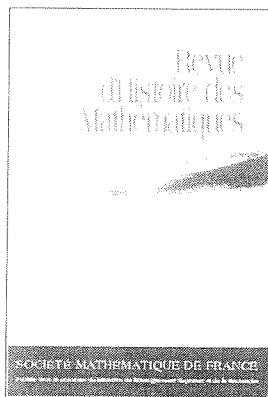
L'auteur précise que l'exposition sur les mathématiciens allemands exilés, que son article mentionne et qui se tiendra à l'occasion du prochain Congrès International des Mathématiciens en août 1998 est parrainée par l'Association Mathématique Allemande (DMV).

Société Mathématique de France

La Revue d'histoire des mathématiques

présente :

le Tome 3 - Fascicule 2 (Année 1997)



B. BRU, M.-F. BRU, O. BIENAYMÉ - La statistique critiquée par le calcul des probabilités : deux manuscrits inédits d'Irénée Jules Bienaymé.

A. HERREMAN - Le statut de la géométrie dans quelques textes sur l'homologie, de Poincaré aux années 1930.

Abonnement 1997 : prix public europe 360F - prix public hors europe 400F
 Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF/SMAI/ APMEP/UPS
 Renseignements : Maison de la SMF, BP 67, Luminy, 13274 Marseille cedex 9
 Tél : 04 91 26 74 64 - Fax : 04 91 41 17 51 - mél : smf@smf.univ-mrs.fr