

LIVRES

COMPTES RENDUS

La défaite de Platon ou la science au XXIème siècle

Claude Allègre

Edition Fayard, 1995

Lorsqu'un savant reconnu, médaille d'or du C.N.R.S., l'un des pères de la politique des contrats entre l'Etat et les Universités, du concept d'évaluation des universités, écrit un livre dont le titre ambitieux suggère une confrontation entre la philosophie classique et la science d'aujourd'hui, son lecteur ne peut être que surpris de découvrir en fait un ouvrage plutôt médiocre, souvent ennuyeux, probablement écrit trop vite et tout compte fait sans grand intérêt. La surprise est encore plus grande si le lecteur est un mathématicien quand il découvre les attaques, plus naïves que grossières, dont les mathématiques sont l'objet, comme venant d'un homme qui ignore tout de cette science pourtant millénaire.

En tête de son Avant-Propos, figure une citation d'Erwin Schrödinger où ce dernier revendique le droit d'écrire sur des sujets qu'il ne domine pas comme un maître. C'est en effet le droit de quiconque. Mais attention! En dehors de son domaine de compétence, le maître justement ne l'est plus. Utiliser son autorité en un domaine comme argument dans un autre est une malhonnêteté qui est justement l'un des sujets de réflexion de François Lurçat¹ dans un intéressant ouvrage paru récemment, sur tous les points, style, méthode, rigueur scientifique, à l'opposé de l'objet de cette critique – et que je recommande donc vivement au lecteur. A l'issue de ce livre, Platon est donc défait. Sans grand effort pour l'auteur qui ne consacre que 7 lignes à l'illustre philosophe dans un livre de 502 pages. Par exemple on lit page 364 "Quelle défaite pour Platon! Si dieu est géomètre, comme il le prétendait, c'est un géomètre fractal!" Les autres allusions à Platon se trouvent pages 232 et 430.

Laissons donc pour le moment la philosophie, et venons-en au contenu du livre. La majeure partie est consacrée à la présentation de la science du 19ème siècle (assez rapidement) et surtout de celle du 20ème siècle. Avec l'assurance tranquille de celui qui domine bien son sujet, l'auteur nous présente toutes les sciences : la mécanique, la thermodynamique, l'électricité, l'électromagnétisme, l'électronique, la radioactivité, la physique quantique, la chimie, la géologie, la formation des continents et la tectonique des plaques, l'univers depuis le Big Bang jusqu'à nos jours, la théorie de l'information, l'informatique, la biologie moléculaire, le fonctionnement des neurones et du cerveau², la météorologie et le chaos, et même l'histoire des mentalités, la sociologie, la linguistique et l'anthropologie, mais non les mathématiques qui ne constituent pas à proprement parler une

¹ François Lurçat L'autorité de la science, Editions du Cerf, 1995

² Avec un grand luxe de détails : ainsi apprenons-nous à propos d'une recherche effectuée sur des "calmars" que ces animaux sont parfois aussi appelés "calamars" (p. 371)!

science (p. 426). Ne dirait-on pas, à considérer cette liste impressionnante de connaissances, ce passage où Socrate se gausse du sophiste Hippias³ qui lui aussi prétendait au savoir universel et parlait avec autorité de toutes les sciences et techniques de son temps? Je ne sais pas si Claude Allègre est compétent dans tout les domaines qu'il aborde, mais j'ai pu constater, pour ceux où j'ai quelques connaissances, des erreurs, des affirmations gratuites, un manque de précision dans la langue et une présentation plus qu'approximative de certains faits importants. Comme les vieux politiciens qui utilisent les anciens francs pour faire populaire, il jongle avec les milliards, les milliards de milliards, et même une fois avec les milliards de milliards de milliards, commettant dans ce cas – emporté par son élan – une erreur d'un facteur 10^5 (p. 246). Mais laissons là la forme pour en venir à ce qui me semble constituer le fond du livre et sa raison d'être, tout le reste illustrant en quelque sorte, sous forme d'un balayage à travers l'ensemble des sciences, l'argument principal. Claude Allègre combat une chimère : le *carcan* (un mot qu'il emploie plusieurs fois) que les mathématiques imposent aux sciences du réel, par l'intermédiaire des Grandes Ecoles, de l'Ecole Polytechnique en particulier, et plus spécialement, "le polytechnicien Auguste Comte" auteur d'une classification des sciences vieille de plus de 150 ans, et responsable, croit-il, d'une foule de maux innombrables, dont le moindre n'est pas à ses yeux d'avoir imposé la sélection par les mathématiques aux petits français des lycées et collèges (mais j'ai cru comprendre qu'il lui impute aussi la défaite de Sedan).

Partant de cette étrange vision faussée de l'histoire des sciences comme axiome, il écrit hâtivement une bien plate épopée de la "libération", au cours du siècle, des sciences de leur joug séculaire, l'abstraction mathématique. Avec une curieuse conception des mathématiques, du moins telle qu'elle se dégage de ce livre, pleine de calculs fastidieux (p. 265), de matrices... auxquelles personne ne comprend rien (p. 84), d'équations rigoureuses, globales et définitives pleines de symboles complexes (p. 350).

Et une conception du réel tout aussi naïve et déconcertante de la part d'un savant ! Après avoir affirmé avec vigueur que notre monde était quantique, fractal, chaotique, il sacralise le nombre de Feigenbaum (p. 364), fort mal défini d'ailleurs (p. 359). Nous lisons néanmoins (p. 427-428) que π et $\sqrt{2}$ existent dans la nature car liés aux propriétés du cercle et du carré, et que le théorème de Pythagore peut être confronté à l'observation du réel ; par contre, $\sqrt{-1}$, pourtant lui aussi lié aux propriétés du cercle et du carré ne flotte pas depuis 5 milliards d'années dans l'univers : il a été inventé par les mathématiciens (p. 427) (peut-être n'est-il pas considéré comme "réel" puisqu'il est appelé imaginaire...).

Comment un homme cultivé, ayant sa position sociale, peut-il écrire ingénument un livre pareil ? N'y aurait-il pas une clé cachée, alors que la partie visible, celle que j'ai lue, ne serait destinée qu'à faire bondir les hommes de sciences que nous sommes, comme le taureau que le matador agace puis fatigue avec des banderilles avant de l'achever ? Revenons à la philosophie, initialement écartée de cet article, pour tenter de répondre à ces questions. La première étape de

³ Platon *Hippias mineur* (368 b, c, d)

toute initiation à la philosophie était, pour Socrate, de forcer ses auditeurs à réfléchir, à ne pas craindre de mettre en cause leurs préjugés. Il faut avoir lu Platon, remarque J.-F. Revel⁴, pour savoir vraiment discuter sans s'égarer, en éliminant toutes les approximations de langage, en respectant son interlocuteur, en gardant en mémoire les points déjà acquis pour chercher en toute liberté à progresser ensemble. C'est à cette liberté qu'aspirait Galilée, le héros de la science moderne naissante, héritier de Pythagore, de Platon et d'Archimède⁵, la liberté d'étudier des phénomènes que la religion et le "sens commun" de son temps ne pouvaient pas expliquer ou expliquaient faussement, mais que lui expliquait en utilisant les nombres et la géométrie : les mathématiques de son temps. En hommage à Platon, il a donné à ses deux grands dialogues la forme "dialectique" de ceux du philosophe grec⁶.

Mais il est un autre Platon, celui qui recherche la cité parfaite gouvernée par un roi-philosophe. Karl Popper⁷ y voit la source des utopies totalitaires nées au 19ème siècle et responsables des malheurs du nôtre. Dans le passé, on a vu des hommes combattre – sous des noms divers – l'"idéalisme" dans les sciences i.e. le Platon de Galilée, au nom d'idéologies monstrueuses sous couvert de mieux gouverner leurs semblables, comme le Platon de Popper. Est-ce vers ces horizons que nous conduit cette nouvelle défaite de Platon? Quelques lignes (p. 190-191) sur une théorie de l'information capable d'aborder le problème du sens et ses possibles applications pédagogiques, sur la cognitive (p. 392, 402) sur l'enseignement (p. 447) et la pensée unique (p. 447) me font craindre qu'en effet toute cette mauvaise histoire des sciences ne soit qu'un prétexte pour développer (à travers les I.U.F.M. – maintenant que les écoles normales d'instituteurs ont été supprimées) une pédagogie réductionniste et liberticide. Alors la Défaite de Platon ne serait pas seulement un mauvais livre, ce serait surtout une mauvaise action. Depuis la rédaction en décembre 1996 de la première version de cet article, Claude Allègre ayant été nommé Ministre de l'Education Nationale, il me reste à souhaiter que cette hypothèse soit complètement erronée, ce que peuvent laisser espérer par exemple ses courageuses positions concernant le "multiplodoc"⁸, un terme autrefois cher aux élèves d'Alexandre Grothendieck.

Michel Zisman
Université Paris 7

⁴ Jean-François Revel, Histoire de la philosophie occidentale, de Thalès à Kant Nil, 1994, p 122

⁵ F. Lurçat (op cit)

⁶ Galilée Discours concernant deux sciences nouvelles, Introduction, traduction, notes et index par Maurice Clavelin, 2ème édition P.U.F., 1995

⁷ Karl Popper, La société ouverte et ses ennemis, Tome I : l'ascendant de Platon, éditions du Seuil, 1979.

⁸ Allusion à un animal préhistorique NDLR

Analysis on Symmetric Cones

Jacques Faraut & Adam Korányi

Mathematical Monographs, Oxford, 1994

I. Naissance et classification des algèbres de Jordan

La naissance des algèbres de Jordan est clairement identifiable, et on peut retenir l'article [1] de 1934 comme acte originel. Les trois pères fondateurs P. Jordan, J. von Neumann et E. Wigner étaient en pleine réflexion sur la formulation mathématique de la mécanique quantique. Un des concepts majeurs est celui d'observable. En pratique il s'agit d'un opérateur hermitien sur un espace fonctionnel, mais il est apparu comme souhaitable de disposer d'une théorie abstraite ne faisant pas intervenir l'espace lui-même. Pour se limiter à la dimension finie, il faut donc chercher une structure (définie par des axiomes) qui récupère au mieux les propriétés des matrices hermitiennes. Si on cherche une structure d'algèbre, la difficulté provient de ce que le produit de deux matrices hermitiennes n'est pas (en général) une matrice hermitienne. Un substitut est de considérer $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$. On y perd l'associativité, mais après un tâtonnement empirique, Jordan dégage deux axiomes pour un produit bilinéaire sur un espace vectoriel V^9 :

$$x \circ y = y \circ x \quad (\text{commutativité})$$

$$(x^2 \circ y) \circ x = x^2(y \circ x) \quad (\text{identité de Jordan})$$

La structure résultante s'appelle algèbre de Jordan. En notant L_x l'opérateur de multiplication par x , le deuxième axiome s'écrit $L_{x^2} \circ L_x = L_x \circ L_{x^2}$. Il en résulte assez facilement qu'on peut définir les puissances successives x^n d'un élément x de V , et que L_{x^p} commute à L_{x^q} pour tous entiers p et q . On peut donc étudier l'anneau engendré par un élément x , et en particulier définir le polynôme minimal de x . On parvient en particulier à définir la notion de trace et de déterminant d'un élément quelconque $x \in V$. Un autre point de vue utilise la représentation quadratique de l'algèbre V . Il s'agit de l'opérateur $P(x)$ défini pour $x \in V$ par $P(x) = 2L(x)^2 - L(x^2)$. Dans le cas de l'algèbre de Jordan des matrices hermitiennes, on a $P(x)y = xyx$, ce qui rend relativement naturel ce point de vue et est également à la base d'une autre axiomatique des algèbres de Jordan. Enfin un rôle important est joué par la notion d'inverse. Un élément est dit inversible s'il l'est dans l'anneau qu'il engendre. Les éléments inversibles sont caractérisés par la condition $\det(x) \neq 0$. Il existe aussi une approche de l'axiomatique des algèbres de Jordan à travers la notion d'inverse (voir Springer [6]). Pour un aperçu des travaux du point de vue algébrique, voir la présentation de McCrimmon [4].

Les algèbres de Jordan sont naturellement munies d'une forme bilinéaire, à savoir $\tau(x, y) := \text{tr } L(xy)$. Il est donc raisonnable de s'intéresser aux algèbres de Jordan pour lesquelles la forme τ est non-dégénérée. On les baptise *semi-simples*, et on démontre immédiatement que toute algèbre semi-simple est somme directe d'idéaux simples. Dans le papier séminal [1], on classe les algèbres de Jordan simples sur \mathbb{C} . On trouve cinq familles : trois "classiques", à savoir :

⁹ Nous nous limiterons au cas où le corps de base est \mathbb{R} ou \mathbb{C}

- les matrices symétriques $Sym(m, \mathbb{C})$ avec le produit $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$
- les matrices carrées $Mat(m, \mathbb{C})$ avec le produit $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$
- les matrices antisymétriques $Asym(2m, \mathbb{C})$ avec le produit $x \circ y = \frac{1}{2}(xJy + yJx)$, où $J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$

une famille "semi-classique" :

- $V = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$, avec le produit $z = xy$, où

$$z_1 = x_1y_1 + \sum_{j=2}^n x_jy_j \quad , \quad z_j = x_jy_1 + y_jx_1$$

- enfin une algèbre "exceptionnelle" de dimension 27, appelé algèbre de Albert, liée aux matrices 3×3 sur les octaves de Cayley.

Une variante de cette étude concerne les algèbres de Jordan réelles pour laquelle la forme τ est définie-positive. Il s'agit des algèbres appelées formellement *t* réelles à l'époque, et rebaptisées (à juste raison) d'algèbres euclidiennes par J. Faraut et A. Korányi. On montre que la complexifiée d'une telle algèbre est semi-simple, et qu'inversement toute algèbre complexe semi-simple possède une forme réelle euclidienne. Les trois familles d'algèbres euclidiennes simples classiques sont les matrices hermitiennes sur respectivement \mathbb{R}, \mathbb{C} et \mathbb{H} (= corps des quaternions), la famille semi-classique est la famille des algèbres de Lorentz, définies par $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ avec le produit $z = xy$ où

$$z_1 = x_1y_1 + \sum_{j=2}^n x_jy_j \quad , \quad z_j = x_jy_1 + y_jx_1$$

et l'algèbre exceptionnelle est l'algèbre $Herm(3, \mathbb{O})$.

2. Algèbres de Jordan et cônes symétriques

Après ce succès initial, il y eut une relative désaffection pour le sujet : la mécanique quantique emprunta d'autres voies, et même les extensions en dimension infinie des algèbres de Jordan n'y ont joué qu'un rôle modeste. Le regain d'intérêt vint des travaux de Max Koecher dans les années 50, qui devait faire le lien avec la théorie des cônes symétriques.

L'espace $Sym(m, \mathbb{R})$ possède un cône remarquable, à savoir le cône $\bar{\Omega}$ formé des matrices symétriques (semi-définies) positives (Ω désigne le cône ouvert formé des matrices symétriques définies-positives). Il est convexe et auto-dual pour le produit scalaire donné par $\langle a, b \rangle = \text{tr}(ab) = \text{tr}(a \circ b)$. D'autre part, pour $g \in GL(m, \mathbb{R})$ l'application $a \mapsto ga^t g$ conserve le cône Ω , et comme toute forme quadratique définie positive s'écrit comme somme de m carrés de formes linéaires indépendantes, on voit que l'action de $GL(m, \mathbb{R})$ ainsi définie est transitive. Ceci se généralise à toute algèbre de Jordan euclidienne V . On considère le cône $\bar{\Omega}$ (resp. Ω) formé des carrés (resp. inversibles). Il n'est pas difficile de montrer que Ω est auto-dual pour le produit scalaire associé à la forme τ . Ensuite on introduit le groupe $G(\Omega) = \{g \in GL(V) | g(\Omega) = \Omega\}$, et on montre que

pour tout $x \in V$ inversible, l'opérateur "quadratique" $P(x)$ appartient à $G(\Omega)$. Comme $P(x)e = x^2$, on en déduit que l'action de $G(\Omega)$ sur Ω est transitive. Ce résultat admet une réciproque : soit Ω un cône dans un espace euclidien E , qui soit convexe, auto-adjoint et homogène sous l'action du sous-groupe $G(\Omega)$ des transformations linéaires qui conservent Ω . Alors il existe une structure d'algèbre de Jordan sur E . Esquissons la démonstration : si $g \in G(\Omega)$, alors ${}^t g$ est encore dans $G(\Omega)$, puisque Ω est auto-adjoint. Donc le groupe $G(\Omega)$ est réductif. Le sous-groupe $K = G(\Omega) \cap O(E)$ est un sous-groupe compact maximal de $G(\Omega)$, et comme Ω est convexe, K admet (au moins) un point fixe dans Ω , noté e . Soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de $G(\Omega)$, et soit $\mathfrak{p} = \mathfrak{g} \cap \text{Sym}(E)$. Comme $G(\Omega)e = \Omega$, que $G(\Omega) = K \exp \mathfrak{p}$ (décomposition de Cartan) et que K est le stabilisateur (dans $G(\Omega)$) de e , il n'est pas difficile de voir que l'application $X \mapsto Xe$ est bijective de \mathfrak{p} dans E . Soit L son inverse, de sorte que pour tout $x \in E$, $L(x)$ est l'unique élément de \mathfrak{p} tel que $L(x)e = x$. On définit alors un produit sur E , en posant $x \circ y = L(x)y$, et on vérifie que on munit ainsi E d'une structure d'algèbre de Jordan euclidienne, dont Ω est le cône des carrés inversibles.

On a aussi une description algébrique du groupe $G(\Omega)$ et de son compact maximal K . Le groupe structurel de V défini par

$$\text{Str}(V) = \{g \in GL(V) \mid P(gx) = gP(x){}^t g, \forall x \in V\}$$

a même composante neutre que $G(\Omega)$, et le groupe d'automorphismes de V (pour la structure d'algèbre de Jordan) a même composante neutre que K .

On voit en particulier que $\Omega \simeq G(\Omega)/K$ a une structure d'espace riemannien symétrique. Le surcroît de structure venant de l'algèbre de Jordan permet d'écrire assez explicitement les décompositions classiques d'Iwasawa ou de Cartan ainsi que les opérateurs différentiels sur Ω qui sont invariants par $G(\Omega)$.

3. Algèbres de Jordan et domaines de type tube

C'est encore à M. Koecher que l'on doit l'utilisation des algèbres de Jordan euclidiennes pour la description des domaines symétriques de type tube. Considérons dans l'espace complexifié $V^{\mathbb{C}}$ l'ouvert $T_{\Omega} = V + i\Omega$ ("tube" au-dessus de Ω). Les transformations $z \mapsto z + v, v \in V$ et les transformations $z \mapsto g.z, g \in G(\Omega)$ déterminent un groupe de transformations affines holomorphes qui est transitif sur T_{Ω} . Par ailleurs, on montre assez facilement que l'application $z \mapsto -z^{-1}$ est bien définie sur T_{Ω} et est un automorphisme holomorphe involutif de T_{Ω} avec ie comme unique point fixe. Autrement dit, T_{Ω} est un domaine symétrique, d'ailleurs équivalent par la transformée de Cayley $p : z \mapsto (z - ie)(z + ie)^{-1}$ à un domaine symétrique borné D (au sens de Cartan), dont on peut donner une description très simple. Pour $w \in V^{\mathbb{C}}$ on observe que $w \square \bar{w} = L(w\bar{w}) + [L(w), L(\bar{w})]$ est hermitien, et on définit la norme spectrale de w par $|w| = \|w \square \bar{w}\|$. Alors D n'est autre que la boule-unité de $V^{\mathbb{C}}$ pour cette norme. Dans le modèle T_{Ω} on décrit bien l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(T_{\Omega})$ du groupe des automorphismes holomorphes de T_{Ω} réalisée comme algèbre de champs de vecteurs holomorphes (et même polynomiaux de degré ≤ 2) sur $V^{\mathbb{C}}$. on peut aussi donner une description abstraite de cette même algèbre de Lie à partir de

la structure d'algèbre de Jordan de V (construction dite de Kantor-Koecher-Tits). Dans le modèle borné, on a une bonne description d'un sous-groupe compact maximal U du groupe des automorphismes holomorphes. Dans l'un ou l'autre des modèles on peut décrire la frontière de Shilov, la métrique de Bergman, etc...

C'est en fait une deuxième famille d'espaces riemanniens symétriques que l'on peut ainsi étudier dans le cadre des algèbres de Jordan : il s'agit d'une sous-famille des domaines hermitiens symétriques, dits précisément "de type-tube". La description de tous les domaines hermitiens symétriques réclame une extension de la notion d'algèbre de Jordan, à savoir les systèmes triples de Jordan (voir par exemple l'ouvrage [5] de I. Satake).

Pour toute cette partie géométrique, le lecteur (en y mettant beaucoup d'acharnement) parvenait à se procurer une copie des notes de Koecher [2] ou de celles de O. Loos [3]. L'ouvrage de Satake [5] a une orientation différente, et les parties correspondant aux algèbres de Jordan sont peu développées. L'exposé de J. Faraut et d'A. Korányi vient donc indéniablement combler une lacune. Ils traitent ces aspects géométriques dans les chapitres I à VI et VIII à X en évitant (presque) toute référence à la théorie des espaces riemanniens symétriques, et pratiquement sans aucun emprunt à la géométrie différentielle, de sorte que l'ouvrage peut effectivement se lire de manière indépendante. On peut aussi recommander cette première partie comme illustration concrète de la géométrie des espaces riemanniens symétriques. S'il y a peu de résultats nouveaux, certaines démonstrations sont soit simplifiées, soit nouvelles : c'est le cas par exemple pour l'étude des "idempotents primitifs" et la décomposition de Peirce. Certaines démonstrations sont inspirées de la théorie générale des espaces riemanniens symétriques, mais en utilisant au mieux les propriétés liées aux algèbres de Jordan.

4 Analyse harmonique sur les algèbres de Jordan

Après la présentation de ces résultats géométriques, il est temps d'aborder l'analyse sur les espaces rencontrés. Une transition est fournie par les diverses formules d'intégration liées aux décompositions de Cartan ou d'Iwasawa. Une approche très explicite des opérateurs différentiels invariants est également proposée. On continue avec la fonction Γ_Ω dite encore fonction Gamma du cône. Si on peut faire remonter aux travaux du statisticien Wishart (1928) la première apparition d'un cas particulier, c'est Gindikin qui en donna en toute généralité une expression explicite comme produit de fonctions Γ ordinaires. Elle intervient dans de très nombreuses identités, calculs divers d'intégrales, et notamment dans le problème du prolongement analytique de la distribution $\det(x)^s$ (sur Ω).

Le chapitre XI est consacré à la décomposition de l'algèbre des polynômes sur V sous l'action du groupe $G(\Omega)$ (ou des polynômes holomorphes sur $V^{\mathbb{C}}$ sous l'action de U), le résultat principal étant que cette décomposition se fait avec multiplicité un. Les composants irréductibles sont de dimension finie et sont de "classe un", c'est-à-dire possède un vecteur invariant par le compact maximal K . Le chapitre XII est consacré aux développements de Taylor des fonctions K -invariantes sur $V^{\mathbb{C}}$, avec quelques exemples de développement qui généralisent

des développements classiques à une variable complexe.

Le chapitre XIII est consacré à l'étude d'une famille (à un paramètre ν) d'espaces de Hilbert \mathcal{H}_ν , de fonctions holomorphes du type espaces de Bergman à poids. Ces espaces ont un noyau reproduisant qui est aisément déterminé en utilisant l'invariance de ces espaces par une action naturelle du groupe $G(T_\Omega)$, et fournissent des représentations unitaires irréductibles de ce groupe (ou de son revêtement universel) : il s'agit de représentations de la série discrète holomorphe (cas "scalaire"). Deux autres modèles équivalents pour décrire ces représentations sont proposés, chacun ayant ses avantages. Via la transformée de Cayley, on obtient une réalisation à l'aide de fonctions holomorphes sur le domaine borné D , et dans ce modèle c'est l'action du compact maximal U qui est agréable : en particulier les polynômes holomorphes sur $V^{\mathbb{C}}$ sont exactement les vecteurs de \mathcal{H}_ν , qui sont U -finis, ce qui permet entre autres d'utiliser les résultats du chapitre XI. On peut aussi décrire les espaces \mathcal{H}_ν comme transformées de Fourier-Laplace de fonctions à support dans $\overline{\Omega}$, de carré sommable pour un poids dépendant du paramètre ν .

Un problème important est le prolongement analytique (par rapport au paramètre ν) de cette famille : on obtient notamment un ensemble fini de valeurs de ν , appelé ensemble de Wallach, pour lesquelles le module des vecteurs U -finis est réductible, mais possède un sous-module invariant correspond à une représentation unitaire irréductible de $G(T_\Omega)$. Les démonstrations de ces résultats (dûs sous cette forme analytique à M. Vergne et H. Rossi) sont nouvelles et limpides.

Dans le chapitre XIV, on aborde l'étude des fonctions sphériques pour l'espace symétrique Ω et le calcul de la fonction c d'Harish Chandra. Les résultats concernant la transformation de Fourier sphérique, en particulier la formule de Plancherel sont cités sans démonstration, faute d'avoir une version spécifique utilisant la structure d'algèbre de Jordan.

Les deux derniers chapitres XV et XVI sont consacrés à une esquisse de théorie des fonctions spéciales sur les algèbres de Jordan généralisant des situations classiques à une variable. Cette partie contient de nombreux résultats nouveaux et bien entendu réclame des développements ultérieurs. On introduit la fonction hypergéométrique de Gauss et ses généralisations, les fonctions de Bessel, les polynômes de Laguerre. Une autre direction de généralisation fait référence à certaines fonctions spéciales introduites classiquement en analyse matricielle. On introduit le concept de représentation d'algèbre de Jordan V sur un espace euclidien E : ce n'est autre qu'un homomorphisme d'algèbres de Jordan de V dans les matrices symétriques sur E . L'exemple classique est la représentation ϕ de l'algèbre des matrices symétriques $Sym(m, \mathbb{R})$ sur l'espace $Mat(m, k, \mathbb{R})$ donnée par :

$$\phi(x)\xi = x\xi \quad .$$

Il lui est naturellement associé une forme quadratique $Q : E \rightarrow V$ telle que $\forall x \in V, (\phi(x)\xi|\xi) = (x|Q(\xi))_V$. Les fonctions sur E qui ne dépendent que de $Q(\xi)$ jouent le rôle de fonctions radiales généralisées. Dans ce contexte, on

peut généraliser la transformation de Hankel, qui résume la transformation de Fourier pour les fonctions radiales. On étudie aussi la fonction zeta $= \det(Q(\xi))^s$, pour laquelle les auteurs obtiennent le prolongement analytique et une équation fonctionnelle.

On retrouve dans ces chapitres d'analyse les qualités d'exposition soulignées précédemment. Certains résultats sont en fait des cas particuliers de résultats valables pour les espaces riemanniens symétriques, mais le point de vue algèbre de Jordan suggère souvent des démonstrations plus simples et plus explicites. Enfin il y a plusieurs résultats nouveaux dus aux auteurs. Des notes en fin de chaque chapitre donnent très précisément les références des travaux antérieurs.

Soulignons enfin que le livre est riche d'exemples, tant dans la partie géométrique que dans la partie d'analyse. Beaucoup d'entre eux se présentent sous formes d'exercices regroupés en fin de chapitre, qui sont accompagnés de conseils ou de références à des articles. La bibliographie est abondante, avec des références très complètes aux travaux récents. Enfin un index des notations, et un index des mots-clé vient compléter le livre. La typographie et la reliure reflètent la qualité habituelles des publications de Oxford University Press. Le tout pour un prix qui reste très raisonnable.

Références

- [1] Jordan, P., Neumann, J.V., and Wigner, E. (1934) On algebraic generalization of the quantum mechanical formalism, *Ann. of Math.*, **36**, 29-64.
- [2] Koecher, M. (1969) An elementary approach to bounded symmetric domains, *Lectures Notes, Rice University*
- [3] Loos, O. (1977) Bounded symmetric domains and Jordan pairs, *Lecture Notes, University of California, Irvine*
- [4] McCrimmon, K. (1978) Jordan algebras and their applications, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84, 612-627.
- [5] Satake, I. (1980) Algebraic structures of symmetric domains, *Iwanami-Shoten and Princeton University Press*
- [6] Springer, T.A. (1973) Jordan algebras and algebraic groups, *Erg. Math.*, vol. 75, Springer Verlag.

Jean-Louis Clerc
Henri Poincaré (Nancy 1)

Modern methods in complex analysis

T. Bloom, D. Catlin, J. D'Angelo, Y.-T. Siu (éditeurs)

Annals of mathematics studies n°137, Princeton University Press, 1995.

Ce livre est le recueil de 15 contributions issues d'une conférence tenue à Princeton en mars 1992, à l'occasion du 60ème anniversaire de R.C. Gunning et J.J. Kohn. Quoique l'analyse complexe à plusieurs variables en soit le prétexte central, les sujets abordés recoupent évidemment d'autres domaines, comme la

géométrie (différentielle, algébrique, analytique...) ou les équations aux dérivées partielles (EDP). Cette diversité permet peu d'entrer ici dans les détails; on se bornera donc à une description brève du contenu de l'ouvrage en regroupant de façon vaguement thématique (et assez arbitraire) les contributions qui y figurent.

Un premier thème révèle clairement l'influence de J.J. Kohn sur le développement de l'analyse complexe des trois dernière décennies : il s'agit de l'introduction de techniques issues de la théorie des EDP dans le cadre des problèmes fondamentaux sur l'opérateur de Cauchy-Riemann. Cette tendance est essentiellement représentée ici par les articles de M. Christ, J. D'Angelo, C. Fefferman. Le texte de Fefferman est de nature introductive : suivant un point de vue développé par Kohn, Christ et lui-même, l'auteur explique comment le problème $\bar{\partial}$ -Neumann peut être réduit à l'étude d'un opérateur pseudodifférentiel A se prêtant à une analyse détaillée dans certaines situations, par exemple celle des domaines pseudoconvexes de type fini dans \mathbb{C}^2 . Après un bref historique, on trouve une description de résultats correspondants sur $\bar{\partial}$ et $\bar{\partial}_b$ ainsi qu'une esquisse de l'analyse microlocale de A . L'article de D'Angelo, quant à lui, rappelle d'abord des idées désormais classiques sur la notion de type fini introduite par Kohn en 1972, puis l'accent est mis sur la technique des "multiplicateurs sous-elliptiques" pour $\bar{\partial}$ -Neumann. Un calcul est raconté sur une classe d'exemples importants. Enfin, le papier de Christ peut être vu comme un remarquable "survey" à propos de l'approche microlocale de la régularité analytique pour l'opérateur $\bar{\partial}_b$ associé à une structure CR réelle-analytique de dimension 3, pseudoconvexe de type fini. Le texte décrit en particulier les résultats de l'auteur sur la non-hypoellipticité analytique pour certaines perturbations d'un modèle rigide standard. À ce thème des EDP, on peut naturellement associer aussi les articles, ici plus éloignés de l'analyse complexe, de L. Nirenberg et de F. Trèves. Celui de Nirenberg rend compte d'une forme raffinée du principe du maximum, développée en commun avec H. Berestycki et S. Varadhan, pour des opérateurs elliptiques du second ordre dans \mathbb{R}^n . Le papier de Trèves décrit divers résultats autour de conditions d'intégrabilité pour des systèmes surdéterminés du premier ordre.

D'autres articles peuvent être rattachés à la théorie générale des fonctions holomorphes de plusieurs variables, sous des aspects divers : dynamique, avec la contribution de J.E. Fornæss & N. Sibony, géométrie complexe, avec celles de G. Henkin et de S. Webster, par exemple. L'article de Fornæss & Sibony s'inscrit dans l'étude systématique des problèmes d'itération menée par les deux auteurs. Après des généralités sur les auto-applications méromorphes de \mathbb{P}^2 , on trouve la définition et l'étude de la fonction de Green et du courant invariant associés à une telle application, "générique" en un sens convenable. Ceci débouche sur des résultats importants autour de la connexité de l'ensemble de Julia ou de l'ergodicité pour la mesure invariante des auto-applications holomorphes de \mathbb{P}^2 . L'article de G. Henkin, quant à lui, étudie la description de l'espace $H^{n,n-1}(\mathcal{D})$ de $\bar{\partial}$ -cohomologie sur un domaine \mathcal{D} linéairement concave de \mathbb{P}^n et l'obtention de conditions pour qu'un élément de $H^{n,n-1}(\mathcal{D})$ soit représentable par un courant $\psi \wedge [V]$, où V est un sous-ensemble analytique fermé de dimension

1 dans \mathcal{D} et ψ est une 1-forme holomorphe sur V . Cette étude sophistiquée débouche sur un critère d'algèbricité pour V et de rationalité pour une 1-forme méromorphe donnée sur V ; le critère s'interprète en termes de généralisations de théorèmes classiques d'Abel, Lie, Poincaré... Enfin, le papier de S. Webster concerne la théorie des invariants d'une hypersurface réelle de \mathbb{C}^n . Dans le cas strictement pseudoconvexe, on connaît la théorie de Chern-Moser des invariants biholomorphes. Ici, l'auteur s'attaque au cas où la forme de Levi dégénère. Pour cela, il choisit de remplacer la notion d'invariant biholomorphe par celle d'invariant des transformations de contact holomorphes, en un sens convenable. Une normalisation formelle remarquable est obtenue dans ce cadre.

Cette voie plus proche de la géométrie algébrique ou analytique, à l'instar des travaux de R.C. Gunning, est également représentée ici par les articles de H. Grauert et de Y.-T. Siu. Celui de Grauert donne une définition des espaces analytiques et semi-analytiques réels et en énonce une série de propriétés fondamentales. Celui de Siu s'inscrit dans le cadre de l'étude des adjoints de fibrés amples sur une variété complexe compacte telle qu'elle est menée dans des articles récents de J.-P. Demailly (J. Diff. Geom. 37 (1993), 323-374, Invent. Math. 124 (1996), 243-261) et de l'auteur (Invent. Math. 124 (1996), 563-571). L'accent y est mis sur les questions d'effectivité de bornes numériques.

Un dernier aspect du recueil est plus proche de la géométrie différentielle. Il s'agit d'articles de R. Bott, de Ph. Eyssidieux & N. Mok, de R.S. Hamilton et de A.M. Nadel. Le papier de Bott est une introduction informelle aux différents aspects des invariants classiques (Euler, Pontryaguine) et à la théorie de Chern-Simons. Celui d'Eyssidieux & Mok est une longue étude de propriétés de rigidité pour certaines sous-variétés complexes compactes de quotients de domaines symétriques bornés. Des situations particulières sont approfondies (quotients du demi-espace de Siegel \mathbb{H}_n , ou du produit $\mathbb{B}_2 \times \mathbb{B}_2$). Les deux contributions de Hamilton concernent des propriétés d'évolution de rapports isopérimétriques sous l'action de certains flots associés à des phénomènes géométriques. Enfin, celle de Nadel étudie sous un point de vue itératif certaines propriétés de l'opérateur de Ricci.

Pour conclure, il importe de remarquer que parmi les articles figurant dans ce recueil, on trouve non seulement des travaux de recherche de premier plan, mais aussi plusieurs excellentes introductions à des développements récents. Le volume de "proceedings" dont il est question ici pourra donc intéresser, à des titres divers, aussi bien les spécialistes d'analyse et géométrie complexe que tout lecteur concerné par certains aspects de cette discipline apparus au cours de la dernière décennie.

Vincent Thilliez
Université de Lille

Notions of convexity**Lars Hörmander**

Progress in Mathematics, Birkhäuser, Boston, 1994.

La parution d'un livre de Hörmander est toujours un évènement. Après la fameuse "Introduction à l'analyse complexe à plusieurs variables" et la non moins célèbre "Analyse des opérateurs aux dérivées partielles linéaires" en 4 volumes, voici un ouvrage consacré à la convexité. Ou plutôt aux convexités car, comme l'indique le titre, il existe plusieurs notions apparentées à la convexité, que l'auteur cherche à unifier. De fait, lecteurs, nous sommes conviés à un voyage qui commence paisiblement avec une révision des fonctions convexes d'une variable réelle, puis fait revisiter les merveilles de la convexité en plusieurs dimensions. Ensuite l'auteur nous entraîne dans les subtilités des fonctions sousharmoniques et plurisousharmoniques et nous replonge dans l'analyse complexe. Enfin nous rejoignons les équations aux dérivées partielles avec la notion de convexité par rapport aux opérateurs différentiels et le périple se termine avec l'application à la question fondamentale suivante : donner une condition géométrique à la résolubilité locale d'une équation aux dérivées partielles.

Ce livre de 414 pages comporte 7 chapitres. Les 3 premiers chapitres sont truffés d'exercices. Ce sont les plus élémentaires bien qu'ils n'évitent aucune question profonde. Les chapitres suivants s'adressent plus aux spécialistes de l'analyse complexe et des équations aux dérivées partielles. Toutefois ils gardent un caractère abordable qui les rend accessibles à l'analyste curieux.

Le premier chapitre concerne la convexité à une variable. Les définitions classiques de base sont données et illustrées de nombreux exercices. On trouve toutes les inégalités résultant de la convexité, en particulier une étude fine de diverses moyennes. La transformée de Legendre est là. La fonction Γ est définie comme la fonction convexe vérifiant son équation fonctionnelle et étudiée en détail. Les notions raffinées de semiconvexité et de quasiconvexité sont présentées et les minima des familles de fonctions convexes sont étudiés. Ces 35 premières pages forment un vademecum très utile à l'analyste.

Le deuxième chapitre est consacré à la convexité dans les espaces de dimension finie. Toutes les propriétés des sous-ensembles convexes sont passées en revue et les théorèmes classiques de Carathéodory, de Helly, de Minkowski et de Birkhoff sont présentés. La transformée de Legendre à plusieurs variables est développée. L'auteur présente un grand nombre d'inégalités géométriques. Enfin la notion de convexité projective est exposée en détail avec tous les rappels concernant les espaces projectifs.

Le chapitre 3 consiste en un exposé très complet d'une centaine de pages de la théorie des fonctions sousharmoniques. On trouve là toutes les bases de la théorie du potentiel et un nombre incroyable de formules classiques.

Dans le chapitre suivant on plonge dans l'espace complexe multidimensionnel avec les fonctions plurisousharmoniques. Le lien avec les ensembles pseudoconvexes est bien sûr présenté. Ensuite des théorèmes d'existence de solutions pour les

équations de Cauchy-Riemann dans des espaces L^2 avec poids sont établis. Il s'agit là d'une reprise d'une fameuse contribution de l'auteur à la théorie de l'analyse complexe. Puis les nombres de Lelong et les courants fermés positifs sont présentés. D'autres notions de convexité pour des sous-ensembles de \mathbb{C}^n sont étudiées. Enfin un développement sur les fonctionnelles analytiques trouve sa place dans ce chapitre.

Le chapitre 5 est une tentative d'unification de la théorie de la convexité. Une théorie générale de convexité par rapport à un groupe linéaire est présentée. Les notions de fonctions convexes, susharmoniques, plurisusharmoniques correspondent respectivement au groupe linéaire, au groupe orthogonal, au groupe complexe linéaire.

Le chapitre 6 s'occupe d'opérateurs différentiels à coefficients constants. Si on s'intéresse à la résolubilité d'un opérateur P dans un ouvert, c'est la notion de P -convexité, pour cet ouvert, qui est importante. Ici les opérateurs considérés sont à coefficients constants.

Enfin le dernier chapitre présente un résultat important de Trépreau. Il s'agit d'étudier la résolubilité locale pour des opérateurs différentiels à coefficients analytiques. Cette propriété de résolubilité est équivalente à une propriété géométrique appelée condition Ψ . Ce résultat est présenté dans une version accessible, la version générale faisant intervenir des transformations microlocales est repoussée en fin de chapitre. La condition géométrique est discutée en détail et une version symplectique est donnée. A cette occasion, l'auteur expose les subtilités de la géométrie symplectique dans \mathbb{C}^n où il y a en fait 2 structures symplectiques réelles induites par la partie imaginaire et la partie réelle de la forme symplectique complexe.

En conclusion il s'agit d'un ouvrage magistral qui doit trouver sa place dans la bibliothèque de l'honnête homme intéressé par les mathématiques.

Alain Grigis
Université Paris 13

Spectral decompositions and analytical sheaves

J. Eschmeier & M. Putinar

Oxford University Press, 1996

La géométrie analytique est une grande consommatrice à la fois d'analyse fonctionnelle et d'algèbre homologique. L'espace vectoriel des sections d'un faisceau cohérent sur un espace analytique est naturellement muni d'une structure d'espace de Fréchet, et l'utilisation de cette topologie se révèle nécessaire dans certains problèmes. Par exemple, si X et Y sont deux espaces analytiques, l'espace vectoriel des fonctions analytiques sur $X \times Y$ n'est malheureusement pas le produit tensoriel des espaces de fonctions sur X et sur Y , et il faut prendre un produit tensoriel complété (Grothendieck). Le produit tensoriel complété n'est pas un foncteur exact en général, et les propriétés de ses foncteurs dérivés sont liées à la géométrie des faisceaux cohérents (Douady, Frisch, etc.).

Une autre question importante concerne la finitude et la dualité (de la cohomologie des faisceaux cohérents). Le cas absolu, traité par Cartan et Serre, ne requiert que les outils "classiques" de l'analyse fonctionnelle (la version de L. Schwartz du théorème de finitude de F. Riesz). Le cas relatif traité par Grauert (finitude) et Ramis-Ruget-Verdier (dualité), nécessite des outils beaucoup plus lourds et est considéré, à juste titre, comme techniquement redoutable, même si la démonstration a été clarifiée par divers auteurs (Kiehl-Verdier, Houzel, Schneiders).

Un autre problème, de nature un peu différente est celui de l'étude du spectre joint d'une famille d'opérateurs linéaires $T_i (i = 1 \dots n)$ commutant entre eux. La "bonne" définition du spectre (introduite par J.L. Taylor en 70) est l'ensemble des points z de \mathbb{C}^n où le complexe de Koszul de la famille $T_i - z_i I$ n'est pas exact, et l'algèbre homologique apparaît là encore naturellement.

Toutes ces questions et un certain nombre d'autres (en particulier la version de R. Levy du théorème de Riemann-Roch) sont traitées en détail, mais l'on prend conscience, à la lecture de ce livre, du manque d'un cadre homologique satisfaisant : la théorie des catégories dérivées des faisceaux d'espaces vectoriels topologiques reste à construire.

La seule réserve que je formulerais est que les auteurs n'abordent absolument pas la théorie des \mathcal{D} -modules analytiques, cadre dans lequel beaucoup de résultats (en particulier ceux liés à la finitude et la dualité) trouvent leur extension naturelle. De plus, le système de Cauchy-Riemann est un \mathcal{D} -module, et son utilisation s'avère parfois pertinente.

Cette réserve mise à part, le livre de Eschmeier et Putinar est écrit dans un style précis, clair et concis et il constitue un outil important pour tous ceux qui s'intéressent à la géométrie analytique et à ses interactions avec l'analyse fonctionnelle.

Pierre Schapira
Université Paris 6

Period Spaces for p -divisible Groups

M. Rappoport et TH. Zink

Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1996

Soit p un nombre premier. Dans ce livre, M. Rappoport et Th. Zink introduisent des analogues p -adiques des espaces symétriques complexes, en étudient la structure et les liens avec les espaces de modules de groupes p -divisibles et les variétés de Shimura. Ils présentent leur travail de recherche sous une forme suffisamment détaillée pour un lecteur familier avec la Géométrie Arithmétique. De nombreux exemples sont décrits en détail, comme le cas particulier du "demi-plan p -adique" et ses généralisation en dimensions supérieures, complémentaires dans l'espace projectif des points rationnels.

Les domaines symétriques complexes, comme le demi-plan de Poincaré ou les espaces de Siegel, peuvent se décrire comme des espaces de modules de structure

de Hodge polarisables. Dans le cas p -adique, les modules de Dieudonné filtrés jouent le rôle des structures de Hodge. Soit k un corps parfait de caractéristique p . Notons W l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k et K_0 le corps des fractions de W (si $k = \mathbf{F}_p$, $W = \mathbf{Z}_p$ et $K_0 = \mathbf{Q}_p$). Un module de Dieudonné filtré sur une extension finie et ramifiée E de K_0 , est un K_0 -espace vectoriel de dimension finie D avec un automorphisme σ -semi-linéaire, le Frobenius, σ étant le Frobenius de K_0 , et une filtration sur $E \otimes_{K_0} D$. Cette analogie avec les structures de Hodge permet à M.R. et T.Z. de définir les espaces symétriques p -adiques comme des sous-espaces analytiques rigides de grassmanniennes. La condition qui définit ces sous-espaces est une condition liant le Frobenius et la filtration. Cette condition a été mise en évidence par J.-M. Fontaine. Un théorème cité de B. Totaro l'exprime en terme de la théorie géométrique des invariants. M.R. et T.Z. donnent de plus une description conjecturale du toiseur entre module de Dieudonné et module de Tate. Cette conjecture permettrait en particulier de décrire la différence entre la classe d'isomorphie d'une forme quadratique invariante par Galois dans la cohomologie étale et de la forme quadratique correspondante dans la cohomologie cristalline (et de de Rham).

Un groupe p -divisible X sur une base un schéma S est une limite inductive X_n de S -schémas en groupes finis X_n vérifiant des propriétés convenables. Si la base S est un corps algébriquement clos de caractéristique 0, il existe un entier h tel que X soit isomorphe à $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ et les X_n à $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$. Une isogénie $\rho : X \rightarrow X'$ est un morphisme qui identifie X' au quotient de X par un sous-schéma en groupes fini et plat. Une quasi-isogénie ρ est un élément de $\mathbf{Q} \otimes \mathrm{Hom}(X, X')$ tel que $p^n \rho$ soit une isogénie. Contrairement à une base S telle que p soit inversible dans O_S , sur les bases telles que p soit nilpotent dans O_S , les groupes p -divisibles peuvent admettre des déformations infinitésimales non triviales (voir par exemple l'exposé 6 de L. Illusie dans Astérisque 127). Soit \mathbf{X} un groupe p -divisible sur k . Dans le chapitre 2, M.R. et T.Z. prouvent la représentabilité par un schéma formel sur W du foncteur qui à un W -schéma S tel que p soit localement nilpotent dans O_S , associe l'ensemble des classes d'isomorphie de groupes p -divisibles X sur S munis d'une quasi-isogénie de $\mathbf{X} \times (S \bmod p)$ sur la réduction modulo p de X .

Dans le chapitre 3, M.R. et T.Z. considèrent le cas d'un problème de modules pour les groupes p -divisibles avec action d'un ordre d'une \mathbf{Q}_p -algèbre semi-simple de dimension finie, d'une structure de niveau de type parahorique, et éventuellement d'une polarisation. Ils donnent une description (locale pour la topologie étale) du schéma formel obtenu. Ils énoncent la conjecture que le schéma formel est plat sur W . Cette conjecture est un théorème de R.E. Kottwitz dans le cas non ramifié. Dans le chapitre 4 est prouvée la représentabilité des correspondances de Hecke.

Dans le chapitre 5 est construite l'application périodes. Sa source est un schéma formel de modules de groupes p -divisibles des chapitres 2 et 3, ou plus précisément l'espace analytique rigide associé. Son but est un espace symétrique p -adique du chapitre 1. Elle associe à un groupe p -divisible le module de Dieudonné de sa réduction muni de la filtration défini par les logarithmes,

suivant en ceci l'exposé de A. Grothendieck à l'ICM de Nice. L'application de périodes est rigide étale. Ses fibres sont formées d'orbites sous les correspondances de Hecke.

Dans le dernier chapitre, M.R. et T.Z. considèrent les variétés de Shimura qui sont des espaces de modules pour les variétés abéliennes munies de polarisations, d'endomorphismes, et de structures de niveau de type parahorique. Ils prouvent que la complétion d'une telle variété de Shimura le long d'une classe d'isogénie de la réduction modulo p est uniformisée (quotient par un sous-groupe discret d'automorphismes) par des schémas de modules de groupes p -divisibles du chapitre 3. Ils examinent des cas particuliers où cette classe d'isogénie est fermée. Ils examinent aussi le cas où elle est toute la réduction de la variété de Shimura, généralisant ainsi des résultats de I.V. Cherednik et de V.G. Drinfeld.

Le lecteur qui souhaite un résumé de la théorie ainsi que des résultats concernant le calcul de la cohomologie de ces espaces symétriques p -adiques et les applications aux conjectures de Langlands locales, pourra lire l'article de M. Rapoport à l'ICM de Zurich. Il pourra aussi lire le séminaire Bourbaki de J.-F. Boutot (Juin 97), et les articles de H. Carayol, V. G. Drinfeld, G. Faltings, M. Harris et P. Schneider et U. Stuhler cités dans la bibliographie de ce séminaire.

*Jean-Pierre Wintenberger
Université Louis Pasteur, Strasbourg*

Les réseaux parfaits des espaces euclidiens

Jacques Martinet

Masson, 1996

Rappelons l'histoire du sujet en admettant que le lecteur sait ce qu'est un réseau régulier dans un espace euclidien E_n de dimension n . En prenant comme origine de E_n un point d'un réseau, celui-ci devient un sous-groupe fermé $\Lambda \sim Z^n$ du groupe R^n d'un espace vectoriel V_n muni d'un produit scalaire défini positif, noté $a.b$. Une base $\{b_i\}$, $1 \leq i \leq n$, de Λ est une base de V_n ; l'ensemble des bases de Λ est une orbite principale de $GL_n(Z)$. La matrice de Gram $q(\Lambda)_{ij} = b_i.b_j$ définit une forme quadratique positive. Notons C_n^+ l'ensemble des formes quadratiques positives sur V_n ; c'est un cône convexe ouvert dans l'espace V_N , $N = n(n+1)/2$, des formes quadratiques sur V_n . Notons que l'espace vectoriel des endomorphismes symétriques u, v, \dots de V_n est aussi un espace orthogonal avec le produit scalaire $(u, v) = \text{tr } uv$; il peut ainsi être identifié à V_N . Réciproquement, tout élément $q \in C_n^+$ définit la matrice de Gram d'un réseau euclidien Λ pour une base choisie dans ce réseau. On peut donc identifier l'ensemble \mathcal{L}_n des réseaux de E_n , modulo leur position (c'est-à-dire à une transformation près du groupe euclidien de E_n) avec $C_n^+/GL_n(Z)$, l'espace des orbites de l'action de $GL_n(Z)$ sur C_n^+ . L'étude de cet espace, appelée "théorie arithmétique des formes quadratiques positives", a été développée par Lagrange, Gauss, Jacobi, Hermite... en rapport avec la théorie des nombres, indépendamment de l'étude des réseaux faite par les cristallographes au XIXème siècle. Pour ceux-ci l'article fondamental est celui de Bravais : J. Ecole

Polytechnique, 19 1-128 (1850) : bien que se limitant aux dimensions $n = 2, 3$ il a une portée plus générale. Par exemple Bravais introduisit le réseau dual $\Lambda^ = \{v \in V_n; \forall \ell \in \Lambda, v \cdot \ell \in Z\}$ de Λ . Ainsi $\det q(\Lambda^*) = \det q(\Lambda)^{-1}$. Les classes de Bravais des réseaux de \mathcal{L}_n correspondent aux différents types d'orbites existant dans $\mathcal{C}_n^+ / GL_n(Z)$ (le type d'une orbite est donné par la classe de conjugaison de ses stabilisateurs). Bien que la définition de ces classes soit un peu moins précise chez Bravais et qu'il ne l'ait pas strictement appliquée, il construisit ces 14 classes pour la dimension $n = 3$.*

Notons $N(q)$ le minimum de la forme quadratique q sur V_n pour les valeurs entières, non toutes nulles, des variables. A la même période Hermite étudia la fonction (invariante par homothétie sur V_n) : $\gamma(q) = N(q)/(\det q)^{1/n}$ définie sur $\mathcal{C}_n^+ / GL_n(Z)$ et montra, en la bornant, qu'elle atteint une valeur maximum, γ_n , appelée depuis constante d'Hermite; elle avait été déterminée pour $n = 2, 3$ par Lagrange, Gauss respectivement. Remarquons que la valeur de $\gamma(q(\Lambda))^{n/2}$ est proportionnelle à la densité d'empilement de boules impénétrables, identiques, centrées sur les points du réseau Λ et de rayon maximal; cette fonction est invariante par le groupe de similitude de E_n . Sans mentionner cette remarque, Korkin et Zolotarev déterminèrent (1877) pour $n = 4, 5$ les maxima locaux de $\gamma(q(\Lambda))$ en utilisant la perfection des réseaux correspondants : l'espace V_N est engendré par les projecteurs orthogonaux de rang 1 sur les vecteurs $s \in S(\Lambda)$, l'ensemble des vecteurs les plus courts de $\Lambda \subset V_n$. Cette propriété est nécessaire, mais pour $n \geq 6$ Voronoï (1908) montra que pour obtenir des propriétés nécessaires et suffisantes il faut ajouter l'eutaxie : l'intérieur du cône convexe engendré par les λp_s , $\lambda > 0$, contient I_n . Il prouva aussi que le nombre des réseaux parfaits, modulo le groupe des similitudes, est fini pour tout n . Depuis l'article de Coxeter de 1951, l'étude des réseaux euclidiens parfaits est devenue de plus en plus active et féconde.

Nous arrivons au livre de J. Martinet! En utilisant les deux côtés du dictionnaire : "théorie arithmétique des formes quadratiques \leftrightarrow réseaux euclidiens", il expose magistralement, en les simplifiant, les travaux classiques sur les réseaux parfaits pour aboutir à une revue presque complète des résultats les plus récents. La simplification se fait aussi en utilisant un cadre plus général et plus riche : on considère non seulement la fonction $\gamma(\Lambda)$ mais une infinité d'autres fonctions sur \mathcal{L}_n , invariantes par les similitudes, la plus intéressante (et plus belle!) étant celle introduite en 1989 par A-M. Bergé et l'auteur : $\gamma'(\Lambda) = (N(\Lambda)N(\Lambda^*))^{1/2}$, manifestement invariante par dualité.

Tout en gardant son unité interne, le contenu de ce livre déborde du champ défini par le titre. Et 5 des 14 chapitres traitent surtout d'autres travaux récents, la plupart étant soit ceux de l'auteur avec Anne-Marie Bergé, soit ceux de ses étudiants. Les mêmes méthodes y sont généralisées (avec les différents degrés d'affaiblissement de la perfection et l'eutaxie qui sont requis), et de nouvelles sont inventées pour les appliquer à des sous-ensembles particuliers de \mathcal{L}_n ; par exemple aux réseaux invariants par un groupe fini donné, ou encore aux réseaux isoduaux : Λ et son dual appartiennent à la même classe de similitude. Cela permet d'étudier

et de classer de nouvelles familles de réseaux non parfaits ou eutactiques, mais à remarquer. Voronoï inventa plusieurs algorithmes; un chapitre est consacré à celui qu'il a créé pour ce problème et un autre à ses généralisations actuelles. Il est clair que le rôle des ordinateurs devient important dans ce domaine de recherche. Un dernier chapitre "Données numériques" récapitule une partie des résultats dispersés dans le livre.

A mon opinion ce livre n'est pas facile pour un étudiant : je préfère enseigner d'abord les définitions classiques et n'introduire leurs généralisations que lorsque cette nécessité est bien motivée. Mais je comprends que l'utilisation d'emblée de la situation la plus générale puisse être le style préféré de la majorité des mathématiciens français. Par contre je suis persuadé que ce livre, par sa remarquable exposition du passé et par son ouverture à des problèmes nouveaux (la préface cite aussi les courants actuels qui ne sont pas traités), est très adéquat pour amener un bon étudiant à entreprendre des recherches dans certains domaines, actuellement très actifs, de l'étude des réseaux.

Pour tout mathématicien, ce livre est une encyclopédie excellente, riche en exemples de réseaux, et unique dans son domaine (son intersection avec Conway et Sloane : *Sphere Packings, Lattices and Groups* 1988, 2ème édit. 1993, est relativement petite). Chaque chapitre, excepté le dernier, commence par une introduction expliquant et motivant son contenu; il se termine par une série d'exercices et une série de notes très intéressantes : beaucoup sont historiques, les autres servent de guide pour explorer la littérature sur le sujet. La bibliographie est exhaustive; l'index des notations est un peu succinct; l'index complet des définitions ne remplace pas un vrai index qui aurait été si utile pour l'aspect "encyclopédie" de ce livre.

Louis Michel
IHES

Computation with finitely presented groups

Charles C. Sims

Encyclopedia of mathematics and its applications 48, Cambridge University Press, 1994

Un des principaux attraits de la théorie des groupes est l'interaction constante entre les développements théoriques et les calculs étendus que l'on peut mener sur de nombreux exemples. Ces calculs ont longtemps été faits à la main, et l'intimité qui s'établit ainsi entre le chercheur et son objet restera à mon avis toujours irremplaçable, mais bien entendu de nos jours les ordinateurs ont entraîné un élargissement vertigineux, et dont on ne voit pas la fin, de ce qui devient possible dans ce domaine. Il s'agit d'ailleurs de l'une des rares parties des mathématiques où l'ordinateur ait apporté une contribution essentielle, dans le grand programme de classification des groupes simples finis, mené à bien entre 1965 et 1985.

Dans le large champ qu'est aujourd'hui la théorie algorithmique des groupes, l'auteur a pris le parti de se limiter dans ce livre aux questions touchant aux présentations de groupes (i.e. aux groupes définis par générateurs et

relations). Parmi les sujets non abordés ici où l'activité algorithmique a été intense, mentionnons les groupes de permutations, la théorie des caractères et des représentations modulaires des groupes finis, et les calculs (notamment les calculs de cohomologie) sur les groupes résolubles finis. Nous renvoyons le lecteur aux documentations de GAP [5], MAGMA [7], à l'Atlas de Conway et al. [2], et à deux récents articles de survey parus aux Notices de l'AMS [1,8] où sont décrits les développements récents dans ces questions.

Étant donné un groupe G défini par un ensemble fini A de générateurs, et un ensemble fini R de relations, ce qui permet d'écrire G sous la forme F/N , où F est le groupe libre engendré par A , et où N est le plus petit sous-groupe distingué de F engendré par les membres de gauche des relations, supposées écrites sous la forme $r = 1$, $r \in F$, les principaux problèmes que l'on se pose sont les suivants :

- le groupe G est-il trivial ?
- le groupe G est-il fini ?
- (problème des mots) : trouver un algorithme (i.e. un programme d'ordinateur) prenant en entrée deux éléments u et v de F , et répondant oui si u et v représentent le même élément de G , non dans le cas contraire ?

On sait qu'il n'y a pas en général d'algorithmes permettant de répondre à ces questions. En particulier, il existe des présentations finies pour lesquelles le problème des mots est insoluble. Néanmoins, les groupes qui apparaissent en pratique ne sont pas donnés au hasard, et en approfondissant leur nature géométrique ou arithmétique on parvient souvent à une solution.

Le livre de Sims se divise en deux grandes parties. Dans la première partie, constituée des sept premiers chapitres, est étudiée en grand détail la procédure de Todd-Coxeter pour l'énumération des classes, qui est une façon systématique de décrire la représentation de permutation de G dans un ensemble G/H , où H est un sous-groupe de type fini de G défini en termes de générateurs. Le point important est que l'on ignore au départ si l'ensemble G/H est fini ; la procédure le construit progressivement et ne s'arrête que si l'ensemble est fini — en théorie, mais pas toujours en pratique ... Tout est systématiquement présenté en termes d'automates et de langages, ce qui est certainement le bon point de vue, mais ne fait pas de ce livre un bon endroit pour s'initier à la procédure (je recommande plutôt pour cela le livre de Johnson [6], ou le grand classique du sujet, le livre de Coxeter et Moser [3]). On trouve dans les premiers chapitres tous les préliminaires nécessaires sur les présentations de groupes et de monoïdes, les systèmes de réécriture, et sur les automates et langages rationnels.

Dans la deuxième partie, l'accent est davantage mis sur les groupes abéliens — la réduction des matrices à coefficients entiers ou modulaires est étudiée en détail, ainsi que l'algorithme des bases de Gröbner, en vue du dernier chapitre où l'on aborde le problème de la détermination des quotients abéliens, nilpotents et polycycliques de G .

L'impression générale que me fait ce livre est un peu vieillotte. Malgré l'abondance d'automates et de langages dans le texte, les groupes automatiques ne sont pas

traités—la référence pour cela reste l'excellent livre d'Epstein et al. [4], et il est vrai qu'il était sans doute inutile de le refaire. De même, malgré l'abondance d'algorithmes décrits en "pseudo-code" dans le livre, le programmeur de terrain reste un peu sur sa faim : on aurait aimé savoir ce qui est vraiment utilisé dans les deux programmes leaders sur le sujet, MAGMA et GAP, et avoir une idée de leurs performances sur des problèmes réels. L'accent a davantage été mis sur les questions de décidabilité de type problème des mots, plus proches de l'informatique théorique, que sur les classes de groupes qui intéressent le plus les mathématiciens : par exemple, on aurait pu imaginer un chapitre sur les présentations de groupes sporadiques...

Il reste que le livre est écrit avec beaucoup de soin, que chaque algorithme décrit est illustré par un ou plusieurs exemples traités en détail, qu'il y a une bibliographie très complète, et qu'il s'agit certainement, et de loin, de la référence la plus complète sur l'algorithme de Todd-Coxeter, qui reste au cœur de tous les programmes informatiques s'occupant sérieusement des groupes définis par générateurs et relations.

Références

- A. Adem, Recent developments in the cohomology of finite groups, *Notices AMS* **44** (1997), n°7, pp. 806–812.
- J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985.
- H.S.M. Coxeter, W.O.J. Moser, *Generators and relations for discrete groups*, 4th ed., Springer, Berlin-New York, 1980 (*Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* **14**)
- D.B.A. Epstein et al., *Word processing in groups*, Jones and Bartlett, Boston, 1992.
- Martin Schvner et al., *GAP — Groups, Algorithms and Programming*, Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, 5e éd., 1995 ([http : //www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~gap/](http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~gap/)).
- D.L. Johnson, *Topics in the theory of group presentations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980. (*LMS Lecture Note series* **42**)
- MAGMA, [http : //www.maths.usyd.edu.au : 8000/comp/magma/](http://www.maths.usyd.edu.au:8000/comp/magma/)
- A. Seress, An introduction to computational group theory, *Notices AMS* **44** (1997), n°7, pp. 671–679.

Fokko Ducloux
Université de Lyon

Introduction to the Numerical Solution of Markov Chains**W.J. Stewart**

Princeton University Press, 1994

Comment connaître le comportement d'un système aléatoire extrêmement complexe? On sait qu'il est souvent pertinent de modéliser une situation industrielle, économique ou biologique par une chaîne de Markov à temps discret ou continu. On sait aussi que ces chaînes ont très souvent un comportement asymptotique régulier, éventuellement périodique. Il est particulièrement utile d'obtenir la loi limite de la chaîne, si elle existe et si elle est unique. Bien que ce problème soit résolu sur le plan théorique, le calcul d'une valeur approchée de cette loi est essentiel pour l'utilisateur et c'est l'objectif de ce livre de nous montrer comment y parvenir par diverses méthodes numériques adaptées à l'état actuel de l'outil informatique.

D'une certaine façon, cet ouvrage est un livre de recettes - il en a la taille, plus de cinq cents pages - permettant de calculer en moindre temps et à moindre coût une valeur aussi précise que possible. On n'y trouvera pas de nouveaux développements mathématiques mais un catalogue organisé et comparatif des méthodes proposées et expérimentées par chercheurs et praticiens dont l'auteur lui-même. D'ailleurs, puisque les équations à résoudre sont linéaires, on y parlera essentiellement d'algèbre linéaire, adaptée à la spécificité des chaînes de Markov.

Le chapitre 1 présente en les résumant les principales propriétés des chaînes à temps discret ou continu. Il se termine par la description des files d'attente, qui constituent l'un des exemples majeurs des chaînes à grand nombre d'états. Les chapitres 2 à 7 s'intéressent au calcul de la probabilité stationnaire π définie par $\pi P = \pi$ dans le cas discret, où P est la matrice de transition, et par $\pi Q = 0$ dans le cas continu, où Q est la matrice des taux de transition, ou encore le générateur infinitésimal. Le chapitre 2 décrit les méthodes directes de calcul de cette probabilité : pivot de Gauss, décomposition LU ou LDU. Pour le cas continu, comme Q est singulière, quatre variantes sont proposées et comparées. La stabilité de l'algorithme et la taille de l'erreur sont également discutées. Le chapitre 3 est consacré aux méthodes itératives : méthodes des puissances, de Jacobi, de Gauss-Seidel, de surrelaxation. La décomposition par blocs et le préconditionnement sont également étudiés, et le chapitre se termine par des énoncés de convergences de ces méthodes. Les méthodes de projection du chapitre 4 n'ont guère encore été appliquées aux chaînes de Markov; elles comprennent les méthodes d'itération simulée, d'Arnoldi, GMRES, de Lanczos et du gradient conjugué. Dans le chapitre 5, les matrices étudiées ont la forme particulière de Hessenberg, c'est-à-dire qu'elles ne comportent que des zéros à partir de la deuxième sous-diagonale (ou surdiagonale). Cela permet d'utiliser des méthodes de calcul récursives, et cela vaut aussi lorsque la structure de la matrice est de Hessenberg par blocs. Les matrices stochastiques presque complètement décomposables, c'est-à-dire celles où la probabilité de transition d'un groupe d'états vers un autre est très faible, donnent lieu à une étude particulière au chapitre 6. Dans ce cas la méthode itérative d'agrégation-désagrégation donne

de bons résultats et converge rapidement vers la distribution stationnaire. Le chapitre 7 cherche à exploiter la structure particulière des chaînes périodiques pour améliorer les performances des méthodes directes et itératives. En étudiant des schémas réduits portant sur une partie de la matrice stochastique, on peut ensuite obtenir facilement l'ensemble de la solution.

On passe avec le chapitre 8 à l'étude de la variation de la loi de la chaîne en fonction du temps, dans le cas continu. La première méthode envisagée est la méthode d'uniformisation, simple à programmer et efficace lorsque le temps écoulé n'est pas trop grand. D'autres méthodes sont intéressantes quand le nombre d'états est petit. Mais comme en réalité la loi de la chaîne à l'instant t est solution d'un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre, une grande partie de ce chapitre est consacrée à l'étude numérique de ces équations et de leur stabilité. La méthode d'Euler et ses variantes sont rappelées, ainsi que les méthodes de Runge-Kutta, de Milne et d'Adams. Comme dans le chapitre 4, la méthode de projection sur un sous-espace de faible dimension peut se révéler efficace. Le chapitre 9 traite des réseaux d'automates stochastiques, qui sont constitués d'automates individualisés opérant de façon plus ou moins indépendante. Pour deux chaînes indépendantes par exemple, on définit une nouvelle chaîne par produit tensoriel de la matrice de transition ou addition tensorielle des générateurs infinitésimaux. Deux cas avec interaction sont ensuite étudiés : soit les taux de transition du second automate sont des fonctions de l'état du premier (transition fonctionnelle), soit une transition du premier induit une transition du second (transition synchrone). La probabilité stationnaire peut alors être obtenue par une description tensorielle compacte du système. Enfin le dernier chapitre apporte une vue globale des différents logiciels permettant d'effectuer les calculs précédents.

Ce livre s'adresse à un large public, celui des scientifiques ou ingénieurs intéressés par les caractéristiques numériques des systèmes aléatoires à évolution markovienne. C'est pourquoi l'explication, le commentaire et l'illustration l'emportent largement sur la démonstration, le plus souvent absente (mais il y a d'autres ouvrages pour cela). Chaque méthode proposée donne lieu à un algorithme testé sur un exemple numérique. Les problèmes d'implémentation sont systématiquement abordés et des programmes MATLAB complètent parfois la présentation. L'intérêt de ce procédé d'exposition est que chaque méthode se trouve en quelque sorte validée par la résolution d'un problème pratique. Comme ce livre n'a pas actuellement de concurrent dans ce domaine, nul doute qu'il ne rende service à de nombreux lecteurs.

Dominique Lepingle
Université d'Orléans

Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres
Gérald Tenenbaum, en collaboration avec Jie Wu

Cours spécialisés 2, publications de la S.M.F., 1996

Voici une façon de s'initier à la théorie analytique des nombres. La première étape, la plus difficile, consiste à trouver un recoin tranquille dans son espace-temps personnel; il s'agit alors de s'y retirer, muni du livre d'exercices de Tenenbaum et Wu et du traité de Tenenbaum [T], et de n'en sortir qu'une fois rédigées ses propres solutions des 181 exercices proposés. L'efficacité de cette méthode est garantie : après une telle épreuve, l'imagination stimulée par une multitude de questions, on aura acquis une superbe technique analytique et on pourra suivre son propre chemin dans la science des nombres entiers.

Si cette expérience radicale n'est, à l'évidence, réservée qu'à un petit nombre d'individus, ce livre est cependant de nature à intéresser et instruire un large public mathématicien : étudiants et chercheurs en analyse, arithmétique ou probabilités y trouveront matière à réflexion ou l'utiliseront comme ouvrage de référence; c'est aussi une source d'exemples originaux pouvant s'insérer dans une leçon d'agrégation.

Ce livre reprend les énoncés des exercices de [T] et en donne des solutions complètes. C'est donc un supplément à [T], conçu comme tel, une invitation à mettre en œuvre les connaissances acquises lors de la lecture du traité, voire à les prolonger. Il suit exactement le découpage en trois parties de [T] : méthodes élémentaires, méthodes analytiques, méthodes probabilistes. Un effort a été fait pour accroître l'autonomie de l'ouvrage par une importante section de notations et des rappels nombreux en bas de pages des définitions et théorèmes fondamentaux. A côté d'exercices d'application plus ou moins directe du cours, on trouvera de nombreux joyaux présentant des résultats récents, parfois inédits. J'ai retenu, entre autres : le théorème de Nicolas sur les nombres entiers ayant une quantité fixée de facteurs premiers, le théorème de Saffari sur les facteurs directs de l'ensemble des nombres entiers positifs, une condition suffisante, due à Erdős, de singularité pour la fonction de répartition d'une fonction arithmétique additive, les premiers résultats de la théorie fine des diviseurs (développée par Hall et Tenenbaum dans [HT]), le théorème de Daboussi sur les coefficients de Fourier-Bohr des fonctions multiplicatives, l'estimation de Montgomery et Vaughan concernant les sommes incomplètes de la fonction de Möbius, etc.

Le numéro 1 de la collection S.M.F. des Cours Spécialisés, précédant immédiatement le fascicule d'exercices corrigés, est justement l'édition la plus récente de l' "Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres". Rappelons que cet ouvrage est le fruit d'une quinzaine d'années d'enseignement et de recherche; depuis la première mouture (un photocopie de l'université de Bordeaux 1), et notamment dans cette dernière édition, l'évolution est considérable et reflète l'approfondissement tant technique que philosophique de la pensée de l'auteur.

Cette discipline, la théorie analytique des nombres, est parfois mal perçue. Presque

ignorée par la tradition encyclopédiste française (en 50 ans de séminaire Bourbaki, 5 exposés sur plus de 800 lui sont dévolus), ses progrès quotidiens semblent infimes, voire dérisoires. J'ai même rencontré un mathématicien professionnel qui, ayant eu à s'y exercer lors d'une "seconde thèse" (tradition malheureusement disparue qui obligeait les savants à être un peu moins ignorants), n'en avait retenu qu'une pratique admirable de technicité, mais un peu vaine, consistant à se bagarrer des pages durant pour parvenir à diminuer de quelques unités la troisième décimale d'un exposant intervenant dans le terme d'erreur d'une formule asymptotique absconse... Il est vrai que, sans une réflexion permanente sur la nature et les enjeux de cette science, la machinerie technique peut tourner à vide. Pour pénétrer l'enchevêtrement des structures, additive et multiplicative, sur l'ensemble des nombres entiers, un éclairage conceptuel est indispensable.

Tenenbaum a choisi le point de vue probabiliste, plus précisément l'approche "directe" : les idées sous-jacentes sont celles de la théorie des probabilités mais l'agencement des démonstrations est analytique. "Le résultat est sidérant, en ce sens qu'il fait soudain apparaître de l'ordre et de la régularité là où semblait régner un chaos constitutif." ([T], p.277). Rappelons quelques-unes des spécificités du livre : un exposé définitif de la méthode de Selberg-Delange, un traitement original du problème de la répartition des nombres premiers dans les progressions arithmétiques à partir de théorèmes taubériens avec restes, deux études approfondies, duales l'une de l'autre, des entiers sans grand ou sans petit facteur premier. La dernière édition [T], outre de nombreuses améliorations ou corrections locales est entièrement mise à jour en ce qui concerne les développements les plus récents de la théorie.

Bien entendu, il est impossible aujourd'hui de présenter l'ensemble de cette discipline dans un traité unique : déjà, en 1909, Landau avait besoin d'un millier de pages, en se limitant au problème de la répartition des nombres premiers. Après avoir présenté les bases de la théorie, Tenenbaum fait donc des choix, évidemment dictés par ses préoccupations personnelles de chercheur. Je saisis cette occasion pour indiquer quelques ouvrages, susceptibles de compléter une formation dans ce domaine ([B], [D], [M],[V]). La théorie est encore jeune, imparfaite, lacunaire ; la tâche est immense, exaltante, et les deux livres de Tenenbaum et Tenenbaum-Wu sont, pour longtemps, des références indispensables à tous ceux qui souhaitent y participer.

Références

- [B] E.Bombieri, *Le grand crible dans la théorie analytique des nombres*, Astérisque **18**, 2^{de} édition, S.M.F., 1987.
- [D] H.Davenport, *Multiplicative number theory*, 2^{de} édition, Springer, 1980.
- [HT] R.R.Hall et G.Tenenbaum, *Divisors*, Cambridge Tracts in Maths. **90**, 1988
- [M] H.L.Montgomery, *Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis*, C.B.M.S., **84**, A.M.S., 1994.

[T] G.Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés S.M.F. **1**, 1995.

[V] R.C.Vaughan, *The Hardy-Littlewood method*, 2^{de} édition, Cambridge Tracts in Maths. **125**, 1997.

Michel Balazard
Université de Bordeaux

Petit cours de statistique

Klaus Krickeberg

Springer Verlag, 1996

Le titre même de cet ouvrage montre bien les intentions de l'auteur : réunir dans un "petit cours" ne demandant pour préalable qu'une connaissance minimale de la statistique l'ensemble des notions de Statistique que tout étudiant devrait maîtriser en entrant en second cycle.

Le lecteur est donc pris par la main - mais dans la langue sans concession du mathématicien - pour être mené depuis la statistique d'ordre jusqu'au modèle gaussien et à la régression, en passant par le modèle binomial et le modèle hypergéométrique, souvent délaissé à tort par les ouvrages de ce niveau.

Le parti pris de Klaus Krickeberg est de comparer dans chaque chapitre l'approche exacte (usuelle) et l'approche asymptotique. La tendance moderne de la discipline, fondée bien sûr sur l'augmentation incessante des moyens de calcul, consiste en effet à exploiter tant que faire se peut les lois exactes des statistiques et de n'avoir recours aux approximations (gaussiennes, par exemple) que lorsque le manque de puissance de l'ordinateur interdit le calcul exact.

L'autre recours massif à l'ordinateur est dû à l'importance accordée à la notion de simulation, non tant pour simuler des données suivant un modèle bien spécifié afin d'évaluer les qualités d'une procédure statistique, mais pour approcher la loi exacte d'une statistique dans la frange qui pose toujours le plus de problèmes : celle où la loi exacte n'est plus accessible et où l'approximation asymptotique est encore très insuffisante.

Cette double philosophie - loi exacte et simulation - est par exemple mise en œuvre dans le test de Fisher, et de façon plus générale dans l'analyse des tableaux de contingence. C'est aussi elle qui sous-tend l'approche non paramétrique, de Kolmogorov-Smirnov à Wilcoxon, la simulation pouvant servir à calculer la puissance des tests proposés.

De multiples remarques parsèment ce "petit livre" pour apporter au débutant la longue expérience de l'auteur en matière d'enseignement des statistiques à un public non nécessairement mathématicien.

Bernard Prum
Université Paris 5