LE RÔLE DES MATHÉMATIQUES

Marc HINDRY*

Université Paris 7

> *"On appelle d'ordinaire inutiles les choses que l'on ne comprend pas. C'est une espèce de vengeance, et comme généralement les mathématiques et la physique ne sont pas comprises, elles sont déclarées inutiles."* Fontenelle (1699)

Ouvrir en 1997 un dossier sur le "*rôle des mathématiques*" peut sembler anachronique. A l'heure où les mathématiques sont utilisées partout – depuis le guidage de la fusée Ariane jusqu'à la construction de réseaux (Minitel, Internet, etc), en passant par le scanner et l'imagerie médicale, les cartes bancaires (codes arithmétiques), la bourse (équation de Black & Scholes pour calculer le prix d'une "option" sur les marchés) – il ne s'agit pas de répondre à la question ingénue "à quoi ça sert ? ". A l'heure où la contribution des mathématiques à la culture et au développement intellectuel et économique n'est plus à démontrer, il ne s'agit pas de répondre à la question rétrograde "pourquoi tant d'abstraction ? ". La question est plutôt que, bien que des concepts de plus en plus abstraits soient requis dans la vie quotidienne, les mathématiques restent méconnues, un malentendu grandissant semble opacifier l'image des mathématiques vis-à-vis du grand public.

Une anecdote peut illustrer ce malentendu : en visitant la nouvelle bibliothèque nationale on peut, à l'entrée des salles d'exposition, regarder sur de multiples écrans Michel Serres – philosophe des sciences – présenter les sciences comme suit. "*Les scientifiques, jusqu'à récemment, se reconnaissaient à leurs instruments : l'astronome à sa lunette, le chimiste à sa cornue ... et le mathématicien à sa blouse blanche et sa craie. Aujourd'hui tous utilisent le même outil : l'ordinateur*". Je ne pense pas que Michel Serres confonde l'enseignement des mathématiques – qui se fait le plus souvent encore avec de la craie – et la recherche en mathématique qui l'utilise rarement mais bien qu'il a simplement pensé que cette image parlerait mieux au grand public, sans remarquer d'ailleurs que l'ordinateur est, pour une bonne part, un contribution des mathématiques au monde technologique moderne.

Les fonctions de boîte à outils et de boîte à idées que remplissent les mathématiques depuis des siècles sont-elles dissociables ?

L'histoire des sciences est riche d'enseignements à ce sujet : Archimède était-il pur ou appliqué ? La science du siècle de Galilée est marquée à la fois par le désir de comprendre et celui d'agir sur la nature. Il ne vint à

* Dossier établi par Marc Hindry, précédent rédacteur en chef de la Gazette des mathématiciens.

l'idée d'aucun mathématicien du XVIIIème siècle de discuter de l'utilité; un débat a existé au XIXème siècle, comme en témoignent les échanges entre Fourier et Jacobi[1]. Aujourd'hui les physiciens continuent de consommer les séries et transformées de Fourier mais utilisent aussi les surfaces de Riemann, variétés jacobiennes, formes modulaires. Certains mathématiciens de la première moitié du XXème siècle ont revendiqué l'inutilité. Ainsi Hardy distinguait seulement les vraies mathématiques des mathématiques ennuyeuses; Siegel déclarait étudier la théorie des nombres et la mécanique céleste car elles n'avaient pas d'applications militaires. Il n'avait pas prévu les fusées, les radars et le codage des télécommunications, etc.

Paradoxalement, c'est en cette fin de XXème siècle que l'utilité et le sens des mathématiques sont parfois remis en question. c'est-à-dire précisément au moment où la technologie et la société se nourrissent directement des résultats de la recherche fondamentale contemporaine. Il est étonnant aussi que, précisément à l'époque où un bagage mathématique et plus généralement scientifique est devenu indispensable pour appréhender le monde, on puisse remettre en question le rôle formateur des mathématiques "trop abstraites". Une des fonctions primordiales des mathématiques étant précisément l'élaboration de nouveaux concepts.

Dans son célèbre ouvrage "La Perestroïka", M. Gorbachev se lamentait sur le fait que son pays avait su développer la technologie pour envoyer des fusées et des cosmonautes dans l'espace mais ne savait pas fabriquer de machine à laver. Il ne concluait pas pour autant que la solution était d'abandonner la recherche spatiale...

Nous avons donc demandé à quelques auteurs de développer leurs idées sur le rôle des mathématiques et de répondre aux attaques formulées contre les mathématiques et leur enseignement[2].

Jean-Jacques Duby présente d'entrée les deux piliers de la mathématique et leurs contributions fondamentales : leur utilité et leur apport conceptuel ou culturel. Il remarque fort justement que la pertinence de ces deux pôles et leur complémentarité sont souvent d'ailleurs brouillées par l'usage malheureusement consacré des vocables "pur" et "appliqué".

Jean-Paul Laumond – roboticien – décrit sa vision en tant qu'utilisateur des mathématiques et explique ce que tout chercheur sait : la recherche finalisée – qui a bien sûr sa raison d'être – est forcément limitée.

---

[1] Cf le célèbre commentaire de Jacobi dans une lettre à Legendre : "M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels, mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde".

[2] Voir par exemple les articles de Claude Allègre et Gilles de Gennes dans "Pour la science" (avril 1996). On notera que plusieurs des textes critiquent les écrits et affirmations de Claude Allègre. Il est clair qu'il s'agit d'un débat d'idées : les textes ont été écrits avant la nomination de ce dernier au Ministère de l'Education, de l'Enseignement Supérieur et de la Technologie.

Gilles Châtelet décrit des aspects plus philosophiques, défendant l'apport profond des mathématiques à la pensée et critiquant une pensée réductionniste qu'il appelle "techno-populisme".

Jean-Jacques Risler illustre l'importance des mathématiques dans le monde contemporain et le rôle formateur majeur qu'elles jouent.

Pierre Schapira, dans un texte déjà publié dans le journal "Le Monde", développe la nécessité grandissante de concepts de plus en plus élaborés dans le monde moderne – les mathématiques jouant clairement un rôle très important dans la génèse de concepts.

Jean-Pierre Bourguignon plaide pour une plus grande ouverture des mathématiciens et les appelle à saisir les occasions offertes par le foisonnement des développements techniques et conceptuels devant faire appel aux mathématiques. Il pose également la question du devenir de nos étudiants[3].

Bref la constitution d'un dossier – sous forme de contributions personnelles variées – sur le rôle des mathématiques dans la société, l'enseignement et la culture nous a semblé utile : une sorte de "défense des mathématiques" qui passerait également par une analyse autocritique. Voici les premiers textes, vous êtes tous invités à continuer à enrichir ce débat au fil des prochains numéros de la gazette.

LES MATHÉMATIQUES, DE L'UTILITÉ À LA CULTURE

Jean-Jacques DUBY

Directeur Général de Supelec

La distinction entre mathématiques pures et mathématiques appliquées est aujourd'hui consacrée par l'usage. Personnellement, je trouve cela très regrettable. Non que je déplore que les mathématiques appliquées se distinguent en tant que branche de la discipline mathématique, mais parce que c'est sous ce terme d'appliquées qui implique, *volens nolens*, que les autres mathématiques ne le sont pas, donc qu'elles ne servent à rien. A cet égard, la dénomination de mathématiques pures n'est pas moins chargée sémiotiquement : les autres mathématiques seraient-elles impures? Les mathématiciens, habitués à jouer avec la sémantique des mots et l'arbitraire des définitions, ont sans doute sous-estimé les conséquences psychosociologiques de cette terminologie qui tend à opposer "pures" et "appliquées". Le sentiment qu'éprouvent bien des mathématiciens purs, d'être victimes d'ostracisme, trouve son origine dans cette opposition, qui n'a pas lieu d'être, mais qui se trouve confortée par la réaction intégriste de certains d'entre eux, de défendre une "pureté" qui relève pourtant plus de la

[3] On pourra, à ce sujet, consulter dans le dossier "Informations" de la Gazette numéro 73 les statistiques concernant les doctorats soutenus dans les trois dernières années.

catachrèse que de la sémantique. Pour tenter de rompre ce cercle vicieux, je ne parlerai plus que de mathématiques, tout court.

Dans tous les métiers que j'ai exercés au cours de ma vie professionnelle – d'un tiers de siècle... – les mathématiques m'ont été utiles. Et pourtant, quelque regret que j'en aie, je n'ai pas fait des mathématiques ma profession. Les hasards de la vie et les opportunités qui se sont présentées ont fait de moi successivement un informaticien – chercheur, ingénieur, responsable de R & D et même... directeur commercial – chez un constructeur, un directeur scientifique au CNRS, un conseiller scientifique d'un grand groupe d'assurance et, depuis peu, un directeur de grande école. Certes, sauf peut-être au début de ma carrière, lorsque je faisais partie des pionniers qui édifiaient les bases de l'informatique, je ne peux pas dire que j'aie beaucoup utilisé les théories mathématiques que j'avais apprises au lycée, puis rue d'Ulm. Mais ma formation de mathématicien m'a servi autrement : d'abord, et d'une manière générale, en m'ayant appris à résoudre des problèmes; ensuite, en m'ayant donné une vue et une intuition des outils qui pouvaient être utilisés pour résoudre certains d'entre eux. Et je crois que c'est comme cela que les mathématiques sont utiles pour les non mathématiciens : par la formation qu'elles leur donnent, par les solutions qu'elles leur apportent.

Parlons d'abord de la formation. Dans mes responsabilités à la tête d'une école d'ingénieurs, je me suis demandé comment caractériser le travail d'un ingénieur. En fin de compte, ce que l'on demande à un ingénieur dans une entreprise, c'est premièrement de poser un problème, deuxièmement de trouver une idée pour le résoudre, troisièmement de s'assurer que son idée "marche". A y bien réfléchir, c'est exactement le travail du mathématicien : premièrement poser le problème en en décrivant exhaustivement les hypothèses et les données, deuxièmement trouver le cadre théorique et l'approche qui permettront de le résoudre, troisièmement vérifier que la solution est correcte dans tous les cas de figure. Contrairement à ce que beaucoup pensent, j'affirme que la résolution de problèmes de maths est une excellente préparation au travail d'ingénieur. Ou du moins qu'elle pourrait l'être, à une condition que je préciserai plus loin.

On a dit ce que l'enseignement des mathématiques apporte à la formation du raisonnement, de la rigueur et de l'honnêteté intellectuelle. Mais on parle moins souvent de la contribution des mathématiques au développement de l'imagination et des capacités d'innovation des jeunes esprits. Or, notre système éducatif français, qui est fondé essentiellement sur l'acquisition de connaissances théoriques, et dont les procédures de contrôle et de sélection reposent sur la restitution de ces connaissances sous une forme canonique, favorise plus les capacités d'abstraction et de mémorisation que les capacités d'invention et de réalisation. Lorsque l'accélération des progrès technologiques et la mondialisation des marchés obligent les entreprises à innover constamment pour se développer ou même survivre, cela représente une faiblesse. Or, aussi paradoxal que cela puisse paraître, les mathématiques sont un champ disciplinaire propice à l'imagination et à la créativité, comme le montrent les nombreux "jeux mathématiques", des concours comme "Kangourou", des revues comme "Tangente", des opérations comme "Maths en Jeans" qui, chacun à sa manière, exaltent l'invention mathématique. Mieux que d'autres disciplines, les mathématiques sont capables de remédier à ce qui devient un point faible de notre tradition pédagogique sans sacrifier son point fort, en conciliant le développement des qualités d'innovation avec celui des connaissances et des capacités conceptuelles. Encore faudrait-il, ainsi que je l'évoquais plus haut, poser les problèmes comme ils se posent à l'ingénieur, c'est à dire sans prétraitement qui les transforme en une suite de questions élémentaires dont chacune peut être résolue par une recette apprise par coeur.

Parlons maintenant des mathématiques comme solution de problèmes qui se posent à l'industrie, et plus généralement à l'entreprise ou même à la société. Ce qu'il est convenu d'appeler la demande socio-économique s'adresse aujourd'hui à toutes les disciplines scientifiques, au premier rang desquelles les mathématiques. On assiste depuis quelques années à une évolution de cette demande, qui tend à s'adresser de plus en plus à l'amont, à la partie la plus fondamentale des disciplines : l'électronique, par exemple, avec la miniaturisation croissante des circuits intégrés, se heurte à des problèmes de physique fondamentale comme les phénomènes quantiques ou les comportements mésoscopiques de la matière ; de même, l'industrie pharmaceutique a besoin pour progresser de connaître les mécanismes biomoléculaires à la base de l'immunologie ou des échanges cellulaires. Il en va de même pour les mathématiques : au fur et à mesure que les problèmes posés deviennent plus difficiles, on a besoin pour les résoudre de faire appel aux mathématiques plus fondamentales, aux théories les plus abstraites. Cette évolution est bien illustrée par les codes auto-correcteurs : tant que l'on se contente de corriger des erreurs portant sur un seul bit, l'algèbre linéaire est suffisante pour fournir les codes de Hamming ; si l'on veut corriger une dizaine de bits, il faut faire appel à la théorie de Galois pour calculer un code de Bose-Chaudhari ; et pour trouver des codes encore plus performants, on espère en la géométrie algébrique avec les codes de Gopa. La tendance est au remplacement des approches locales par des solutions globales, de l'approximation numérique par le calcul formel : en optique, la propagation de fronts d'ondes se révèle un outil plus puissant que le *ray tracing* ; la CAO robotique recourt à la géométrie algébrique réelle. La seule dichotomie épistémologiquement correcte est entre les mathématiques qui ont déjà été appliquées et celles qui ne le sont pas encore : qui aurait prédit que la logique mathématique serait un jour utilisée par l'industrie (celle des progiciels) ou que la théorie des nombres serait indispensable à la télévision à péage ?

C'est ici que l'ingénieur ou le dirigeant dans l'entreprise a besoin de la culture mathématique qu'il aura acquise durant ses études : tous connaissent aujourd'hui les possibilités offertes par les outils mathématiques de modélisation pour résoudre un grand nombre de problèmes industriels, mais seul celui qui aura vu plus de mathématiques que les autres sera capable d'avoir la bonne intuition de l'outil qui résoudra les problèmes les plus difficiles et d'aller voir le spécialiste de la mathématique qu'il faut. Et c'est ici que les mathématiciens, en tant que chercheurs comme en tant qu'enseignants, sont responsables : chercheurs, ils se doivent d'être d'autant plus ouverts aux problèmes industriels que leur domaine de recherche paraît plus éloigné de toute possibilité d'application ; enseignants, ils doivent s'attacher à montrer que les mathématiques sont non seulement une discipline qui est une magnifique construction "pour l'honneur de l'esprit humain", mais aussi qu'elles sont un outil puissant qui n'est pas loin d'être universel.

Ce qui nous ramène à la formation et à l'enseignement des mathématiques. A l'attention de l'immense majorité des jeunes qui n'utiliseront jamais plus les mathématiques, et a fortiori de ceux qui s'en serviront dans leur métier, ce ne sont pas des recettes de calcul qu'il faut bachoter, c'est une culture mathématique qu'il faut inculquer. Une culture mathématique, comme toute culture, doit partir de bases solides : de même qu'une culture historique exige comme préalable la connaissance des dates, une culture mathématique passe par la maîtrise d'éléments de base de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie, tant sur le plan conceptuel que sur le plan opératoire. La culture mathématique telle que je la conçois ne se limite pas, bien sûr, à ces éléments, mais s'étend à ce que j'appellerai l'exploration de différents domaines des mathématiques. Je dis "explorer" et non pas "apprendre" : il s'agit moins de savoir techniquement démontrer un théorème que de comprendre l'idée de sa démonstration, le rôle des hypothèses, la généralité des conclusions, les corollaires que l'on peut en déduire, l'utilisation que l'on peut en faire. Cette exploration ne serait pas uniformément superficielle, car il ne saurait exister de culture qui ne soit, par endroit, allée au fond des choses. L'acquisition d'une culture mathématique implique donc, sur quelques exemples choisis, de descendre dans les détails d'un calcul, de décortiquer la logique d'un lemme technique, de ressentir les difficultés. Bien entendu, les applications à des problèmes concrets, dans tous les domaines de la science, de la technique et même de la société, doivent faire partie d'une culture mathématique moderne. La dimension épistémologique ne saurait non plus en être absente, en ouvrant des perspectives vers le passé avec l'histoire des mathématiques, et vers l'avenir avec l'exposé de quelques problèmes ouverts qui touchent à la recherche – il en existe qui sont compréhensibles. Enfin, je pense qu'une culture mathématique moderne devrait inclure une certaine dose d'expérimental, en tirant parti notamment des capacités de visualisation et d'expérimentation offertes par l'informatique.

La culture mathématique a vocation à être universelle : le scientifique et le littéraire, le mathématicien et le biologiste, chacun doit avoir sa propre culture mathématique, qui diffère de celles des autres par ses bases de départ, son étendue, sa superficialité. Elle a vocation à être utile, d'abord sur le plan de la formation, ensuite sur celui de la vie professionnelle. Mais surtout, et contrairement à ce que l'on voit aujourd'hui, où il tarde à trop de jeunes d'abandonner toute mathématique dès qu'ils ont terminé leurs études, elle a vocation à subsister et à les accompagner dans la vie. Car, comme l'a dit un homme célèbre, "la culture, c'est ce qui reste quand on a tout oublié".

UNE PLACE POUR LES MATHS

Jean-Paul LAUMOND

Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des systèmes du CNRS, Toulouse

Les mathématiques sont partout, elles seraient donc nulle part. Leur identité propre aurait été artificiellement forgée par une élite soucieuse de s'isoler, dans le but de fourbir un moyen de sélection pour sa propre reproduction. Comme dans toute caricature, le trait force un caractère qu'il serait vain de ne pas reconnaître, et contre lequel il est nécessaire et possible de lutter.

Seulement la réalité est plus complexe : une identité ne se résume pas à un trait.

Que les mathématiques soient partout présentes et opérationnelles, nul ne le conteste et nombre de découvertes passées l'attestent. Moult disciplines consomment des mathématiques, voire en produisent pour leur besoin propre. Nombreux sont les champs disciplinaires où l'activité du chercheur pose le problème de son appartenance : physicien ou mathématicien ? chimiste ou mathématicien ? sociologue ou mathématicien ? ... A peine posée, la question est aussitôt tranchée : le chercheur en question, s'il est bien sûr jeune et brillant, est bien physicien, chimiste ou sociologue ; sa reconnaissance est acquise et il n'est pas question que la Section 01 vienne le débaucher.

En consommateur et non producteur de mathématiques je voudrais apporter trois réflexions.

On dit des mathématiques qu'elles sont coupées du réel ; certes elles n'ont pas pour objets l'observation et la compréhension d'un monde "naturel" comme l'ont la physique, la chimie ou la biologie, ou, plaçant l'homme dans la nature, la sociologie ou autres humanités. Leur but est de produire des abstractions, de comprendre leurs structures, leurs articulations ; et si elles deviennent des modèles d'une réalité sensible, tant mieux. On peut s'interroger pour savoir si ces abstractions sont découvertes ou inventées ; là n'est pas la question, elles constituent bien une véritable "matière à penser" dans l'observation et la compréhension de laquelle on peut retrouver des démarches communes aux autres sciences. La seule différence, certes de taille, est que les mathématiques explorent une production humaine non sensible sur laquelle l'expérimentation n'est pas possible[4] ; aussi ont-elles dû inventer leurs propres règles de validation.

Sciences de synthèse et de production, les mathématiques trouvent là leur identité. En celà elles sont proches des sciences pour l'ingénieur qui traitent de la conception d'artefacts. Ce n'est certainement pas un hasard si la même analyse (partout donc nulle part) leur est également appliquée, en particulier dans certaines réflexions sur la restructuration du CNRS. L'essence des mathématiques et des sciences de l'ingénieur est plus "l'augmentation" du réel que sa stricte analyse (sur laquelle elles s'appuient bien sûr). Cette spécificité forge bien une identité. Les unes comme les autres doivent avoir leur place.

Poursuivons le parallèle. Il n'y a pas de mathématiques dédiées à l'ingénierie. L'expérience montre que la synthèse d'artefacts a besoin d'avoir à sa disposition un corpus qui va au delà des seules mathématiques du calcul, et des traditionnelles mathématiques appliquées. Pour ne citer qu'un exemple dans mon domaine, la synthèse des mouvements d'un robot mobile fait appel à des résultats de géométrie différentielle très pointus et contemporains; il faut bien que cette géométrie là se retrouve dans un "lieu" où la rencontrer; ce n'est pas au roboticien de la développer; il n'en a pas le génie, pas plus qu'il ne dispose de la même échelle de temps que le mathématicien.

Et qu'on ne rétorque pas que ce lieu est une tour d'ivoire inaccessible; des mathématiciens existent, curieux du réel et compétents, prêts à poursuivre l'échange de la terrasse de l'Epsilon[5] au tableau noir.

La dernière remarque, basée là aussi sur une expérience de consommateur, concerne la formation. Dans la plupart des cas, il est plus facile de pervertir un bon étudiant en mathématiques aux techniques des sciences pour l'ingénieur, que l'inverse. Concevoir des artefacts nécessite une capacité d'explorer de nouvelles voies, sans a priori quant aux méthodes et formalismes. Loin de brider l'imagination, une formation généraliste solide en mathématiques offre un cadre efficace à son développement. La seule question pour l'étudiant est de bien prendre conscience de l'objectif de sa recherche, qu'il ne fait plus des maths pour les maths. Et s'il trouve des voies qui se passent des mathématiques, au moins il saura pourquoi; trop de "nouvelles" méthodes apparaissent qui ne font que réinventer de vieux rouages mathématiques.

Par les temps qui courent, et les sciences pour l'ingénieur sont bien placées pour le savoir, l'urgence économique impose sa vue à court terme qui confine

[4] Le recours à un ordinateur tend parfois à entretenir l'illusion contraire; force est pourtant de constater qu'un ordinateur ne fait que reproduire et amplifier des capacités calculatoires du cerveau; les symboles et structures qu'il manipule n'en acquièrent pas pour autant plus d'"autonomie".
[5] Café situé place Jussieu, Paris 5ième (NDLR)

à la myopie. Un peu de presbytie ferait à nos sociétés le plus grand bien; elle leur permettrait de mieux évaluer la rentabilité réelle qu'il y a à cultiver "l'honneur de l'esprit humain".

DE LA VICTOIRE DE PLATON ET D'UN CERTAIN TECHNO-POPULISME HOSTILE AUX MATHÉMATIQUES

Gilles CHÂTELET

Université Paris 8 et IHES

"Cette vision platonicienne abstraite qui a infecté l'enseignement français depuis deux cents ans.[6]"

"La France ne peut plus se payer le luxe de produire du mathématicien pur.[7]"

Nous devons reconnaître un mérite au livre de Monsieur Allègre, "La défaite de Platon" : exhiber sans complexe le point de vue que nous qualifierons de techno-populiste, qui souhaite réconcilier deux spiritualités : celles de l'épicier du coin – un sou est un sou – et celle, jusqu'à présent un peu plus ambitieuse, de l'Inspecteur des Finances.

Ces deux spiritualités marchent désormais mains dans la main, sûres de leur bon droit, distribuant les ultimatums : "A quoi servez-vous? Vous devriez avoir honte d'être aussi abstraits, aussi élitistes", agacés sinon exaspérés par toute activité qui ne laisse pas enfermer dans un horizon borné de chef comptable et apparaissant donc comme un défi insupportable au "pragmatisme" contemporain dont aime à se réclamer le *techno-populisme.* Nous touchons ici un point sensible de sa tartufferie : se sentir insulté par tout ce qui le dépasse et dénoncer comme "élitiste" toute démarche tant soit peu éloignée des affairements de l'homme de la rue et de ce qu'il est convenu d'appeler le "sérieux de la vie". C'est pourquoi la Philosophie et les Mathématiques, associés depuis vingt cinq siècles à une discipline totalement étrangère à la vie de tous les jours – la "survie" – constituent des cibles à la fois redoutées et détestées.

Pour punir ce qu'il considère comme une insolence, le folklore techno-populiste aime à se nourrir de deux figures caricaturales de l'activité mathématique : celle du "prof de maths" un peu sadique et garde-champêtre de la logique élémentaire, acharné à détruire la créativité expérimentale des élèves et celle du Nimbus évaporé, inspecteur des travaux finis, toujours prêt à piller les "vrais savants" qui n'hésitent pas à se salir les mains.

---

[6] Page de couverture de "La défaite de Platon", Claude Allègre, éditions Fayard.
[7] Commentaire privé d'un enseignant de marketing à l'Ecole Polytechnique.

Nous prétendons au contraire que les mathématiques visent la plus haute concrétude et ne succombent jamais dans l'"abstraction" privée de toute la richesse de la détermination; les "généralisations" des mathématiques ne se confondent jamais avec des généralités inoffensives : il y a bien une audace propre aux mathématiciens, certes associée à une stricte discipline de la vérification, mais permettant surtout l'accès à un champ où s'esquissent des déterminations virtuelles, non encore explicitées. L'installation dans un tel champ possède tous les caractères d'un *diagnostic* qui opère de manière décisive bien avant toute analyse exhaustive : l'exemple le plus flagrant est celui d'attaque de telle ou telle conjecture par une conjecture plus forte – et donc a priori plus difficile à déduire – qui déplace complètement un problème et révèle l'ancienne conjecture comme étant un problème mal posé. Confondre les mathématiques avec de simples chaînes déductives et ignorer le caractère crucial du sens de la "bonne conjecture" – de ce que nous avons appelé le *diagnostic du mathématicien* – nous semble une conception aussi mutilante que celle qui prétendrait réduire la Physique à un simple exercice de Calcul Différentiel.

Des énoncés du type "Considérons tel point,... tel sous-ensemble... Prolongeons tel segment de droite" sont fréquents au cours d'une démonstration.[8] Ils sont bien insérés dans la chaîne déductive mais possèdent en quelque sorte un caractère stratégique apprécié par les connaisseurs et introduisent subrepticement un autre rythme. "C'est là que quelque chose se passe. Il fallait avoir l'idée de considérer ceci ou cela...". Ces données, ces énoncés ou ces constructions étaient bien disponibles mais endormis et semblent brusquement s'animer par la vertu de ce "considérons" qui porte toute l'attention sur ce qui devient un *élément-charnière*, un levier d'Archimède qui fait basculer et qui manifeste un type de concrétude bien plus intense que le soi-disant "concret" rencontré au coin de la rue.

Nous sommes aux antipodes de l'"abstraction" qui résulte toujours du prélèvement violent d'une partie et donc d'une mutilation alors que le "levier" ne soustrait rien et agit comme certains fragments d'un puzzle qui, d'emblée, esquissent et imposent la solution. Etre absolument concret, c'est persévérer en quelque sorte dans une *espèce de démarche tangentielle de la pensée qui saisit son propre mouvement*; c'est pourquoi le grand mathématicien est tenaillé par une passion du concret comme en témoigne l'entreprise révolutionnaire d'Alexandre Grothendieck.[9] Grothendieck, dans ses écrits, réfère quelquefois à la théorie de Galois, comme exemple toujours

[8] L'exemple des démonstrations et des constructions de la Géométrie dite élémentaire est très éclairant : il suffit de penser à la preuve de caractère concourant en un même point des hauteurs d'un triangle, transformées par des prolongements astucieux en médiatrices d'un autre triangle. Il y a un "effet de synthèse" provoqué par certains points ou constructions remarquable et nullement donné par la simple représentation en figure. La figure devient diagramme car elle suggère en pointillé.

[9] Rappelons que Grothendieck fut le "Prince des géomètres algébristes" des années 60 qui voulait conduire un vaste programme de traduction entre Algèbre et Géométrie par l'utilisation systématique

à repenser, de ce que l'on pourrait appeler une concrétude algébrique pure, aussi bien à l'oeuvre dans les théories classiques comme celles des groupes de Lie et Sylow que dans les théories les plus récentes. On peut comprendre la Théorie de Galois comme *apprentissage* : celui du discernement progressif des racines, les conditions formelles d'un tel discernement portant sur des séquences de réduction[10], et les formules explicites de résolution devenant subsidiaires. Porter tout l'effort de recherche sur les séquences de groupes, de fibrés, de "faisceaux", etc., capables de saisir au vol *le geste même de l'apprendre*... telle serait selon Grothendieck, l'inoubliable leçon de Galois.

Cette concrétude algébrique peut alors épouser une autre concrétude, celle de la Géométrie, qui est celle de l'apprendre des gestes de saisie de l'Espace. Nous aimerions analyser en détail quelques exemples de cette concrétude "géométrico-algébrique" dans l'oeuvre de Grothendieck. Sa conception du point est particulièrement éclairante : le point "classique" de la Géométrie est simplement la trace dans l'espace-temps de l'acte de désignation de ce point-ci alors que le point conçu par Grothendieck (et maintenant par tous les géomètres-algébristes contemporains) est un dispositif, une panoplie infinie de virtualités – dont la désignation serait la plus triviale – un point monadique capable de "concentrer en un point" tout ce qui

de la Théorie des schémas. Comme toute "traduction", elle ne se contente pas de définir une simple banque de références réciproques entre concepts "purement algébriques" et "purement géométriques" laissés intacts. La théorie déplace presque de force l'attention du mathématicien des "points" et des ensembles fixés vers des flèches (ces morphismes) et permet de comprendre algébriquement des effets de synthèse géométriques que nous avons évoqués dans la note (8). On a presque envie de dire que, grâce à l'introduction de la topologie, les structures de l'algèbre commutative se fabriquant elles-mêmes un environnement sans demeurer sous la tutelle de coordonnées, prennent corps et s'organisent en diagrammes suggestifs aussi vivaces que les figures de la géométrie élémentaire... et beaucoup plus puissant! Prenons quelques exemples très simples : a) celui de la notion d'idéal : on ne doit pas le considérer comme une simple "généralisation" des multiples de l'arithmétique mais comme une entité autonome, un point qui a son lieu et qui tient à la fois de l'ensemble (I majuscule) et de l'élément –c'est le point de vue du spectre– b) celui des A-modules M de type fini : il semble plus compliqué de les définir par l'existence de suites exactes du type $A^p \to M \to O$ que par la voie habituelle. C'est pourtant ce type de définition qui incite à se concentrer sur un "bloc" –la suite exacte– qui se révèle aussi condensé qu'un point géométrique et qui se trouve être au cœur du développement de la Théorie des Faisceaux. deux intuitions centrales traversent l'œuvre de Grothendieck : a) la substitution du point de vue de la "flèche" au point de vue –trop fixe– des ensembles, la "flèche" détrônant alors les sources et les cibles. b) saisir le point comme capable de condensation (les structures les plus sophistiquées peuvent devenir des "points" : c'est le cas des classes de fibrés vectoriels sur X vus comme point de $K(X)$) et aussi comme amplification (c'est le cas des points multiples, des points singuliers etc.). Grothendieck n'a jamais caché la difficulté d'une telle entreprise qui oblige à renoncer et même à détruire les intuitions spatiales ordinaires et à se familiariser avec des espaces insolites, sinon pathologiques. C'est le prix à payer pour articuler Arithmétique et Algèbre. La Théorie des schémas apparaît comme le couronnement d'une tradition de découverte et d'approfondissement des analogies entre Théorie des nombres et Géométrie amorcée par Kronecker et développée par Weil (analogie entre corps de nombres algébriques et corps de fonctions algébriques, entre "tours" de corps de nombres et "tours" de revêtement d'une courbe algébrique etc.). On pourrait dire –en paraphrasant une remarque célèbre– un peu d'"abstraction" éloigne de l'intuition mais beaucoup y ramène comme le souligne Grothendieck dans son introduction au langage des schémas (Publications IHES n°4) : "comme dans beaucoup de parties de la mathématique moderne l'intuition première s'éloigne de plus en plus, en apparence, du langage propre à l'exprimer avec toute la précision et la généralité voulue".

[10] Séquences de réduction du groupe de Galois.

auparavant, prétendait retenir séparément l'attention du mathématicien. Le point moderne renoue avec cette "évidence" toujours pressentie, mais jamais saisie avant Grothendieck comme évidence mathématique, rendant disponible une nouvelle puissance opérative et surtout une formidable *puissance allusive* : la "concentration en un point" est tout le contraire d'un affaissement en un point mais se révèle au contraire comme un dispositif de libération et de multiplication des virtualités géométriques.

L'"évidence" de Grothendieck n'est pas liée à la proximité de deux termes dans une chaîne déductive, mais à l'effet de "naturel" lié à l'abolition de l'espace entre le symbole qui capte et le geste qui est capté.

Nous sommes ici bien loin des vociférations utilitaires dont se gorge le pragmatisme contemporain, qui, quelquefois aime se montrer bienveillant et daigne apprécier les mathématiques si elles restent bien sagement à leur place de "boîte à outils" et de bonne à tout faire. On peut soupçonner que les mathématiques ont bien vocation à intervenir dans toutes les disciplines, mais de manière spécifique pour chacune et n'impliquent surtout aucun rapport de subordination. L'exemple de la Physique contemporaine montre à quel point Platon est victorieux : l'enjeu dépasse de très loin un vulgaire rapport d'application en tentant de saisir ce qu'il y a de "physique" dans les mathématiques et amorçant du même coup une épopée encore plus ambitieuse que les grands bouleversements du début du siècle.[11]

Participer à cette épopée suppose naturellement de la part de la communauté physico-mathématique une intelligence des rapports entre physique et mathématique toujours située en amont des différentes pratiques symboliques, qui sont souvent d'ailleurs aussi des pratiques intuitives. Se situer en aval – en laissant aux autres communautés le "luxe" d'être aux avants-postes de la recherche mathématique –, c'est se résigner très vite à appartenir aux provinces subsidiaires de la production des connaissances, à perdre le fil si fragile et si implacable de la concrétude mathématique et se condamner très vite à la sous-traitance théorique qui reçoit des instructions, et obéit à des codes déjà forgés. Mais la démarche d'une "Ecole" – de savants, de philosophes – ne se réduit nullement à la délivrance de prestations informatives de seconde main, mais de définir et de conduire *une problématique de première main*. Le techno-populisme toujours affamé de "visibilité sociale" et de remises de pendule à l'heure, sait-il ce qu'il en "coûte" de siècles et de patience pour former une Ecole mathématique[12] ? Car une Ecole c'est d'abord la patience d'une première main capable d'articuler la génèse des connaissances et

---

[11] Rappelons, entre autres exemples, celui de la Théorie de Jauge utilisant la géométrie différentielle et celui des groupes quantiques.

[12] Cf les difficultés pour reconstruire l'Ecole Allemande et la liquidation de l'Ecole Soviétique par l'accouchement aux forceps du néo-libéralisme. Rappelons aussi que Galois et Abel avaient critiqué le caractère en général "trop appliqué" de l'Ecole mathématique française au début du XIXe siècle alors que s'ébauchait l'Ecole allemande qui, bientôt, allait dominer.

celles des individus-élèves, à mille lieues de la trivialité fébrile du rapport instrumental, aux pratiques symboliques dont se gargarisent ceux qui aimeraient se faire reconnaître comme les "ennemis de Platon" en agitant l'épouvantail du principe de Réalité et d'Efficacité, en inondant des "débats d'idées" de pacotille pragmatique pour masquer leur servilité devant la commande socio-économique et les borborygmes des Marchés.

DÉFENSE DES MATHÉMATIQUES

Jean-Jacques RISLER

Président de la SMF

Il est de bon ton ces temps-ci, chez certains scientifiques médiatiques et de renom, d'attaquer les mathématiques : celles-ci sont considérées comme marginales, périphériques, stérilisant l'imagination, élitistes, etc.[13]

Si on analyse un peu ce flot de reproches, on constate qu'il repose essentiellement sur deux arguments : le rôle (indéniable) que jouent les mathématiques dans la sélection des élites scientifiques, techniques et administratives, et l'inutilité, voire la perversité, des mathématiques.

Ces attaques semblent malheureusement commencer à porter leur fruits, comme le montre par exemple la diminution des horaires de mathématiques dans les classes de cinquième...

Mon propos ici n'est pas de répondre sur le premier point (je dirais simplement pour résumer que ce rôle de sélection est assumé par les mathématiciens, mais non revendiqué, et que c'est faire aux mathématiques un bien mauvais procès que de leur reprocher leur fonction dans le concours d'entrée à l'Ecole polytechnique, qui est a priori une école scientifique et non une préparation à la haute administration), mais d'essayer de rappeler l'importance cruciale des mathématiques dans le monde technique et scientifique. Je laisserai aussi de côté l'aspect purement conceptuel des mathématiques, pourtant essentiel, mais souvent mal compris du grand public, défendu par exemple par le regretté Jean Dieudonné[14], ou Pierre Schapira[15].

Les mathématiques interviennent et s'appliquent dans les sciences me semble-t-il à trois niveaux différents.

Tout d'abord, les sciences s'expriment à travers des mathématiques. Je veux parler ici des sciences qui appréhendent les phénomènes naturels avec des mesures quantitatives, et non pas de sciences comme par exemple la

[13] Claude Allègre, La défaite de Platon.
[14] Pour l'honneur de l'esprit humain.
[15] Défense du conceptuel, le Monde du 26 avril 1996. (Reproduit dans ce numéro NDRL)

botanique ou même la médecine : toute science qui tente de dégager des lois générales, prédictives et quantitatives (comme la physique, la chimie, etc.) s'exprime à l'aide d'un langage mathématique. On peut d'ailleurs noter que même les sciences "non quantitatives", dès lors qu'elles s'intéressent à un grand nombre d'objets ou d'évènements, utilisent des méthodes statistiques qui s'expriment en termes mathématiques (quelquefois très élaborés). C'est par exemple clairement le cas de la médecine.

Le second niveau est constitué par les mathématiques dites appliquées; l'utilité et la pertinence des mathématiques appliquées ne rentrent pas (ou peu) dans le cadre des attaques évoquées plus haut, et personne ne conteste vraiment leur caractère indispensable, même si souvent on n'est pas conscient de l'importance qu'elles peuvent avoir dans tel ou tel processus ou produit technologique. Qu'il me suffise de citer la météo (domaine où la modélisation mathématique, suivie d'une simulation effectuée avec des moyens de calcul surpuissants, montre avec éclat sa pertinence et son utilité), la mécanique céleste (guidage des fusées ou satellites), la mécanique des fluides, etc. Bref, chaque fois que l'on a besoin de simuler un phénomène, soit qu'il soit impossible de faire des expériences, comme pour la météo, soit que ces expériences soient trop coûteuses ou dangereuses (accidents de voitures, rupture d'ouvrages d'art, ou encore essais nucléaires de triste mémoire, ...), on fait appel à des mathématiques (parfois très sophistiquées), pour modéliser et prévoir les phénomènes.

De plus, pratiquement tous les processus industriels élaborés, comme par exemple la C.A.O. (Conception Assistée par Ordinateur[16]), sont conçus avec une base mathématique. Pour faire image, on peut affirmer que si dans un avion on supprimait toutes les parties dans la conception desquelles sont intervenues les mathématiques, il ne resterait que les membres d'équipage, et encore sans leurs uniformes ou sous-vêtements!

Enfin l'ensemble de mathématiques dites "pures" est le principal objet de la vindicte actuelle, qui est à première (ou à courte) vue non sans quelque légitimité ("rien n'est plus éloigné du réel que les mathématiques" affirme Claude Allègre). La démarche du mathématicien semble être en effet de caractère purement spéculatif : il se déplace apparemment de manière tout à fait arbitraire (ou selon sa fantaisie, son imagination, ou même son sens esthétique) dans un monde virtuel, créant des concepts lui permettant de structurer et d'unifier des "objets" préalablement identifiés, pour définir d'autres objets, en une sorte de jeu de cubes abstrait et sans fin. En fait, à partir d'hypothèses de départ, le mathématicien en décrit des conséquences en effectuant un certain nombre de processus élémentaires, chaque processus consistant à appliquer quelques règles de raisonnement simples et précises (ceci est un point de vue théorique; en pratique, le travail du mathématicien est très complexe et subtil, car celui-ci doit intégrer simultanément un

[16] J-J Risler, Mathématiques pour la C.A.O., RMA 18, Masson, 1991

très grand nombre d'étapes élémentaires, faute de quoi son discours serait totalement erratique et incompréhensible).

Cependant, la démarche du mathématicien n'est arbitraire qu'à première vue.

En premier lieu, le milieu des mathématiciens a une conscience très claire de ce qui est intéressant, et de ce qui ne l'est pas, même si les critères d'évaluation ne sont pas très explicites, et les théories jugées avec un large consensus inintéressantes tombent vite en discrédit. Les mathématiciens sont notamment souvent guidés par des conjectures, i.e., des énoncés vérifiés dans des cas particuliers et que l'on essaie de démontrer (ou d'infirmer) dans le cas général, surtout s'ils sont jugés intéressants par la communauté. Parmi les conjectures jugées "intéressantes", on trouve celles dont la résolution aurait beaucoup de conséquences à l'intérieur même des mathématiques, celles qui proviennent plus ou moins directement de questions physiques, mécaniques, ou même informatiques, et des grands problèmes classiques comme le fameux problème de Fermat par exemple. Mais, même en ce qui concerne ces derniers, qui pourrait nier que découvrir de nouvelles propriétés des nombres entiers (ou résoudre le problème des "quatre couleurs"), c'est progresser dans la compréhension de la structure de notre univers ?

Enfin, les hypothèses de départ et les règles de raisonnement sont intimement liées aux propriétés du monde réel, explicitement ou inconsciemment. C'est une des idées que défend avec constance René Thom. Ceci peut peut-être expliquer que souvent des théories issues de spéculations les plus abstraites et les plus éloignées de toute considération pratique trouvent des applications insoupçonnables a priori, fait qui fascine les mathématiciens eux-mêmes (le célèbre physicien américain Eugene Wigner parle de "The unreasonable effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences"[17]). Citons quelques exemples pour illustrer ce phénomène très général.

Les logiciens ont quelquefois été considérés (à tort), même à l'intérieur du milieu mathématique, comme de "doux rêveurs", à moitié philosophes, construisant des théories dénuées de tout intérêt pratique (en mathématiques, et donc a fortiori dans le monde dit réel). Il se trouve cependant que certaines des théories les plus sophistiquées echafaudées avant l'ère électronique par les logiciens, comme le λ-calcul par exemple, se sont révélées cruciales en informatique, pour élaborer de nouveaux langages (indispensables compléments aux ordinateurs), tester s'ils sont contradictoires (i.e., s'ils effectuent bien les tâches que l'on attend d'eux), etc.

Un autre exemple est fourni par la théorie des nombres et la géométrie algébrique sur les corps finis, théories abstraites s'il en fût, qui s'appliquent en cryptographie pour fabriquer des codes secrets pratiquement inviolables, et fournissent des "codes auto-correcteurs" (qui permettent de rendre plus sûres les transmissions de données en corrigeant automatiquement les erreurs inévitables qui surviennent lorsque l'information voyage) aux performances

[17] Comm. in Pure and applied Mathematics 13, 1960, 1-14.

inégalées.

Citons encore, parmi une multitude d'exemples possibles (sans parler du cas classique de la mécanique céleste), les nombreuses applications des mathématiques à la finance, le fait que le principe du fonctionnement du scanner est fondé sur un théorème profond d'analyse (la "transformée de Radon"), et enfin la "théorie des noeuds", branche très active de la topologie, qui a récemment trouvé des applications insoupçonnées pour la compréhension de la "géométrie du génome".

En conclusion, il est peut-être vrai que l'enseignement des mathématiques donne quelquefois l'impression d'être coupé de toute réalité : c'est probablement ce qu'ont ressenti au cours de leurs études des esprits brillants comme ceux de Claude Allègre ou Gilles de Gennes. C'est ce fait auquel il faut s'attaquer (c'est l'affaire des mathématiciens que de reconnaître leurs éventuels torts passés à cet égard et de réfléchir à une réforme de l'enseignement de leur discipline), et non aux mathématiques en tant que telles qui ont été, sont, et seront toujours indispensables à toute démarche scientifique visant à comprendre, modéliser, et prévoir les phénomènes réels.

DÉFENSE DU CONCEPTUEL

Pierre SCHAPIRA[18]

Université Paris 6

Il est étrange de constater qu'à l'aube du XXIème siècle, alors que la notion de réalité classique perd chaque jour du terrain au profit du virtuel, de l'imaginaire et du conceptuel, l'idée même de conceptuel soit si mal perçue par le public et soit dénigrée par beaucoup de ceux qui prétendent appartenir à l'élite intellectuelle.

Ce retour au "concret" est particulièremment frappant à l'école, avec l'évolution des programmes de mathématiques. L'axiomatique et le raisonnement sont pratiquement supprimés au profit de la nouvelle star de la pédagogie, la "sensibilisation". Les têtes blondes n'ont plus à réfléchir dans l'espace à deux ou trois dimensions à partir de quelques axiomes d'où résulteront des théorèmes, mais au contraire, on leur donnera en vrac une liste de propriétés (certaines découlant immédiatement des précédentes, sans que cela soit mentionné) que satisfont les droites et les plans, liste qu'ils n'auront plus qu'à contempler passivement. Bien entendu, la petite soeur du conceptuel, la rigueur, ne sort pas indemne de l'aventure. On a l'impression que l'équation

$$\text{conceptuel} = \text{élitiste} = \text{réactionnaire}$$

est largement acceptée, et donc véhiculée par les médias. Nous n'insisterons pas sur la deuxième égalité qui nous semble elle aussi absurde, mais qui ne relève pas de notre propos ici.

Pourtant la perception de notre environnement est de moins en moins directe, physique, et passe de plus en plus par des représentations abstraites, qui ne sont pas toujours des images.

Prenons l'exemple de la guerre. Après s'être battu à mains nues, puis à l'arme blanche (ce qui implique un contact), on a utilisé des projectiles. Le fait de faire le siège d'une ville veut dire que l'on imagine l'adversaire sans le voir, et le combat aérien moderne se fait par écran d'ordinateurs interposés. Mais la guerre n'est pas seulement question de poudre ou de laser : le "combat idéologique" est par essence un combat conceptuel. Ebranler les bases axiomatiques de l'adversaire, comme par exemple remettre en cause subrepticement la séparation de l'église et de l'état dans une société démocratique industrialisée, a sûrement un effet plus dévastateur que quelques bombes dans le métro.

Les mathématiques sont par excellence le lieu du savoir et de l'apprentissage conceptuel, non bien sûr que toute pensée conceptuelle soit d'ordre

[18] Ce texte est la reproduction légèrement modifiée d'un article paru avec le même titre dans le journal "Le Monde", 26/04/96

mathématique (heureusement). La pensée de tous les jours emprunte de plus en plus aux mathématiques, et l'abstrait d'hier est devenu le concret d'aujourd'hui. Les notions de local/global, d'absolu/relatif, de dualité observateur/observé, les statistiques (à l'époque des grandes épidémies) font partie du langage courant. On lit l'heure "modulo 12", on suit des géodésiques non Euclidienne en voyageant au moins cher et non au plus court. Dans une discussion, des chiffres, un tableau, un graphique, apparaîtront comme des arguments "concrets" et les dérivées troisièmes sont implicites dans un discours de Nixon[19]. Pourtant que de chemin avant d'arriver au concept de nombre!

Mais les idées neuves paraissent toujours trop "abstraites" même, et cela surprend toujours les profanes, parmi les scientifiques, y compris (peut-être même ceux-ci sont-ils en première ligne de ce combat d'arrière garde) parmi les mathématiciens. Les mathématiciens "appliqués" considèrent parfois leurs collègues "purs" comme des artistes élaborant des constructions théoriques sans doute jolies pour ceux qui les comprennent, mais totalement inutiles. Et même chez les mathématiciens dits "purs" cette dichotomie se perpétue. Les analystes sont persuadés que l'intégrale de Lebesgue, c'est du concret, et laissent le maniement des diagrammes aux fanatiques de l'algèbre homologique. D'ailleurs Siegel disait en parlant de Grothendieck que ce n'est pas en répétant "Om, Om" que l'on démontrera des théorèmes sérieux (jeu de mots entre le "Om" tantrique et le "Hom" des algébristes).

Est-ce que "abstrait" ne voudrait-il pas simplement dire "nouveau" et "concret" "bien compris, bien assimilé" ? Auquel cas l'opposition entre les deux se serait qu'un enième avatar de la lutte entre réaction et progrès, conservatisme et modernité?

C'est pourtant au "Conseiller Spécial"[20] de L. Jospin[21] que l'on doit l'un des pamphlets les plus virulents contre la pensée conceptuelle (contre la pensée tout court ?)[22]

Sans être un grand esprit philosophique, on aurait pu penser que le débat sur "théorie et pratique" des intellectuels marxistes des années 60 n'était plus vraiment d'actualité. Or voici que l'on nous ressert le paradoxe de l'oeuf et de la poule, dans sa version physique et/ou mathématiques, mais maintenant l'affaire est tranchée : les mathématiciens arrivent toujours après la bataille, ce sont les physiciens qui trouvent et les mathématiciens se contentent de mettre les choses en forme, de mettre des étiquettes sur les découvertes des autres, ce qui leur permettrait, on imagine, de rafler induement la mise. Est-il

[19] cf. Hugo Rossi, Notices AMS **43**, 10, (1996)
[20] Rappelons que ce texte a été écrit en 1996 et que Claude Allègre est actuellement Ministre de l'Education Nationale de la Recherche et de la Technologie
[21] Claude Allègre, La Défaite de Platon, Fayard Editeur
[22] Voir compte-rendu de Zisman dans la rubrique "livres" (NDLR)

nécessaire de rappeller quelques évidences à tous ceux qui ont réfléchi cinq minutes dans leur vie? Que l'expérience brute, sans outil théorique, n'existe pas, et qu'inversement ces outils théoriques n'existent et ne se développent, qu'à travers l'expérience? Et que "expérience" n'est pas toujours synonyme de paillasse, téléscope, ordinateurs (ou toute autre quincaillerie). Quand Fermat a énoncé son fameux "théorème" sur la résolution de $x^n + y^n = z^n$, n'a-t-il pas commencé par faire des expériences, à savoir, commencé par prendre $n = 3$, et donner des valeurs à x, y et z? N'est-ce pas aussi concret que d'interpréter un changement de trajectoire dans une chambre à bulles?

Et si même la thèse de Allègre était vraie, à savoir que les mathématiciens viennent après les autres, pourrait-on s'en passer? Pourrait-on faire de la chimie ou de la physique sans théorie des groupes ou sans géométrie? Il faut être d'une ignorance scientifique absolue, ne jamais avoir ouvert une revue de physique pour dire que cette dernière pourrait exister sans l'appareillage formidable des mathématiques. D'ailleurs l'imbrication entre les mathématiques et la physique est si étroite, aujourd'hui comme hier, que l'un des plus grands mathématiciens actuels, E. Witten, est physicien.

Comme finalement, il est difficile de contester la nécessité d'outils conceptuels dans l'essentiel des activités humaines, et particulièrement en sciences, la thèse souvent défendue est que l'on aurait suffisament de théorie pour avancer. Les mathématiques, (ou les idées en général), seraient trop en avance par rapport à leurs applications potentielles. En d'autre termes, on a assez de stocks pour tenir, inutile de nous fournir de nouvelles idées, on ne saurait pas quoi en faire. C'est la politique des "flux tendus" en matière conceptuelle. Si l'on veut faire de la France une puissance intellectuelle de deuxième ordre, c'est effectivement une politique à suivre.

L'un des rôles de l'école républicaine est sûrement de permettre aux jeunes générations de comprendre le monde, et cela exige des outils théoriques. Sans même d'ailleurs comprendre le monde, lire un bon roman policier/fiction demande déjà pas mal d'outils théoriques (lire Dan Simmons). Ces outils sembleront toujours trop sophistiqués à ceux du monde ancien, aux vieillards de tous âges qui décident des programmes des lycées à l'aune de leur inculture, mais cette compréhension du monde par la plus grande masse est un enjeu décisif. Sans elle, c'est la porte ouverte à tous les intégrismes, le retour à l'obscurantisme et son corollaire, la tyrannie.

S'OUVRIR SANS FRILOSITÉ

Jean Pierre BOURGUIGNON

Institut des Hautes Études Scientifiques et École Polytechnique

L*es mathématiciens sont déjà*, et à mon avis vont être *de plus en plus, confrontés à la nécessité de faire évoluer la conception qu'ils ont de leur discipline et de la façon de la pratiquer.*

À cela il y a des raisons purement internes : *le mélange des genres mathématiques devient souvent la clef pour obtenir des résultats nouveaux.* Si vous prêtez bien attention aux propos qu'échangent les mathématiciens entre eux, vous avez sûrement noté qu'ils relèvent de plus en plus fréquemment que certaines bornes posées il y a longtemps pour marquer le pays des mathématiques n'indiquaient plus la bonne route, que de nouveaux raccourcis ou des croisements plus féconds avaient été trouvés. Il en va ainsi du rapprochement inattendu de la théorie quantique des champs et de la géométrie algébrique énumérative, de la géométrie à courbure négative et de la complexité, de la théorie du signal et de certains aspects de l'analyse, etc.

Cette motivation interne est bien loin d'être la seule : nous vivons une époque où, avec l'installation d'une société partiellement délocalisée et dominée par les grands systèmes, les domaines de la vie sociale où des mathématiques interviennent de façon substantielle (mais néanmoins le plus souvent cachée) sont de plus en plus nombreux. C'est ainsi que les phénomènes complexes, les structures de réseau, les codes de communication, le stockage de grandes quantités d'information, pour donner quelques exemples, sont des champs dont l'analyse exige le recours à des méthodes et à des outils mathématiques afin d'en améliorer la compréhension et l'usage. Cette nécessité est reconnue par les industriels et les entrepreneurs les plus dynamiques ; elle est largement ignorée par les mathématiciens.

En réalité nous assistons à une *prolifération de nouveaux domaines d'interaction pour les mathématiciens.* Certains sont de nature scientifique (les partenaires potentiels viennent de la physique sous beaucoup de formes, de la chimie, de la biologie, de la médecine ou de l'économie) ; d'autres relèvent plus directement de la technologie et sont souvent regroupés sous le nom de *mathématiques industrielles.* Beaucoup de ces terrains d'aventure requièrent un réel investissement avant que naisse une modélisation pertinente préalable à la mise en œuvre de techniques mathématiques diverses, voire à la définition de nouveaux outils. *Ces nouvelles frontières méritent d'être explorées*, mais force est de constater que les documents à leur propos sont rares, et circulent mal[23]. La variété et

[23] Deux références méritent d'être citées à ce propos : *R.S. Rosenbloom, W.J. Spencer, The Transformation of Industrial Research, Issues in Science and Technology, Spring 1996 ; "SIAM Report on Mathematics in Industry", SIAM Publications.*

la diversité de ces situations méritent plus de publicité, et justifient plus de curiosité.

Une de nos préoccupations premières est bien entendu *le devenir des étudiants*, dont nous savons que demain ils seront nombreux à occuper un emploi hors de la sphère de l'enseignement (même si très bientôt de nombreux emplois dans ce domaine vont être ouverts pour remplacer une génération qui prend sa retraite). Les étudiants d'aujourd'hui devront utiliser leur savoir, enrichi d'une expérience de terrain, dans des situations dont la plupart de leurs professeurs n'ont pas idée. Ils évolueront dans un environnement où les logiciels les plus divers seront d'utilisation quotidienne. Cette situation est largement nouvelle, et les mathématiciens du monde académique ne s'y sont pas bien préparés. Ils doivent prendre garde qu'un repliement frileux sur des terres bien balisées, rejetant assez arbitrairement hors des mathématiques des champs en réalité fondamentalement mathématiques (comme le traitement du signal, l'automatique ou la combinatoire pour n'en citer que trois), vaudra simplement déssaisissement de ces domaines en expansion, et ignorance de nouveaux défis, qui à juste titre attireront des étudiants curieux.

Sur le fond, cet élargissement de leur champ ne dispense pas les mathématiciens de leurs obligations traditionnelles, à savoir *expliquer inlassablement comment des constructions apparemment gratuites se révèlent finalement apporter les réponses à des questions* que l'on ne se posait pas au moment où ces constructions sont apparues (penser aux ellipses et à leur usage en mécanique céleste, ou aux nombres complexes et à leur usage dans la théorie des fonctions et subséquemment dans la formalisation des phénomènes ondulatoires, mais il y en a bien d'autres), et *répéter autant qu'il est nécessaire ce qu'est la véritable signification de l'abstraction.* Nous devons savoir profiter du fait que *la cohérence de l'édifice mathématique provoque toujours l'étonnement.*

Aspirer ces fortes bouffées d'air du large ne va pas sans poser de problèmes : en effet, dans ces conditions nouvelles, que faut-il enseigner ? comment favoriser la prise de conscience chez les étudiants du champ des mathématiques d'aujourd'hui ? comment créer des lieux d'échanges avec les professeurs du secondaire, eux qui occupent souvent les positions les plus exposées ? comment faire naître des documents de toutes sortes aidant cette formidable mutation ? comment mettre sur pied des contacts réguliers avec les industriels susceptibles de recruter des mathématiciens ?

Un véritable plan d'urgence en cette matière me semble inévitable. Il nous revient de l'élaborer. N'attendons pas qu'il le soit en dehors de nous et qu'il nous soit imposé.