

— POINTS D'INFLEXION SUR LES COURBES RÉELLES : —  
UN TRAVAIL DE FELIX KLEIN À LA LUMIÈRE DE LA THÉORIE  
DES SINGULARITÉS D'APPLICATIONS

Félice RONGA

*Université de Genève*

## 1. Introduction

**L**es points d'inflexion d'une courbe plane de degré  $n$  sont l'intersection de la courbe avec sa Hessienne, qui est de degré  $3(n-2)$ ; on en déduit, à l'aide du théorème de Bézout, qu'en général il y a  $3n(n-2)$  points d'inflexion. Dans un article paru en 1876, Felix Klein [4] démontre, entre autres, que pour une courbe réelle "générique" de degré  $n$ , le nombre de points d'inflexion réels ne peut dépasser  $n(n-2)$ , soit le tiers du nombre total de points d'inflexion.

Par exemple, on peut montrer, en mettant l'équation d'une cubique réelle lisse sous la forme de Weierstrass :

$$y^2 - x(x-1)(x-\alpha) = 0 \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

qu'elle possède exactement 3 points d'inflexion réels, dont l'un est sur la droite à l'infini.

C'est là un exemple, comme on en connaît peu, de problème énumératif de la géométrie algébrique qui n'est pas "totalement réel", selon la terminologie introduite par [8]. Ce type de questions a connu récemment un regain d'intérêt (voir par exemple [1] et [8]). En général, le nombre de solutions réelles d'un problème énumératif de la géométrie algébrique ne peut dépasser le nombre de solutions sur les complexes. Alors, deux questions se posent naturellement :

- 1) peut-on réaliser toutes les solutions sur les réels ?
- 2) quel nombre de solutions peut-on réaliser sur les réels ?

Par exemple, le théorème de Bézout nous dit que deux courbes planes de degré respectivement  $m$  et  $n$ , en position générale, se coupent en  $m \cdot n$  points. En prenant comme courbes des droites, certaines réelles, d'autres par paires imaginaires conjuguées, on peut réaliser n'importe quel nombre de points d'intersection réels de la forme  $m \cdot n - 2k$ ,  $0 \leq 2k \leq m \cdot n$ .

Un exemple intéressant est celui du nombre de droites sur une surface cubique lisse dans l'espace. Il y en a 27 sur les complexes, sur les réels on peut en réaliser 27, 15, 7 ou 3 (voir [2]).

F. Klein démontre plus précisément que pour une courbe plane “générique” de degré  $n$  on a :

$$i + 2t'' = n(n - 2)$$

où  $i$  désigne le nombre de points d’inflexion réels et  $t''$  le nombre de droites réelles, tangentes à la courbe en 2 points complexes conjugués distincts; on les appellera bitangentes de type  $t''$  (voir figure 1). Une courbe de degré  $n$  est dite “générique” si, regardée sur les complexes, elle est lisse et ne présente que des points d’inflexion ordinaires et des bitangentes ordinaires. Cela revient à dire que la courbe duale ne possède d’autres singularités que des cusps ordinaires et des points doubles ordinaires. Comme le terme “générique” le suggère, de telles courbes forment un ouvert de Zariski non vide dans l’espace des courbes de degré  $n$ .

F. Klein étend ses résultats au cas des courbes réelles n’ayant que des points doubles et cusps ordinaires, et des points d’inflexion et bitangentes ordinaires. Ses résultats ont été généralisés, par d’autres méthodes, à des courbes quelconques dans [7], puis plus récemment dans [10] et [11].

Nous nous proposons d’interpréter, dans le cas des courbes génériques, la démarche de F. Klein en termes de singularités d’applications, ce qui permet de la rendre rigoureuse. Aussi, l’argument clé de cette démarche peut se lire sur la singularité de la queue d’aronde (voir § 3). On essayera de dégager les idées de base de cette approche, sans entrer dans les détails techniques, que l’on peut trouver dans [6].

Notons que J. L. Coolidge ([3], note en bas de la page 114), trouve la démarche de Klein peu rigoureuse, alors que Wall ([11], page 355, 2ème paragraphe) la qualifie de “somewhat heuristic”.

En fait, la méthode de Klein reste d’actualité, car elle seule permet de montrer l’existence de courbes génériques ayant toutes les valeurs admissibles de points d’inflexion, à savoir

$$i = n(n - 2) - 2k \quad , \quad k \geq 0 \quad , \quad i \geq \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

ce qui répond à la question 2) ci-dessus.

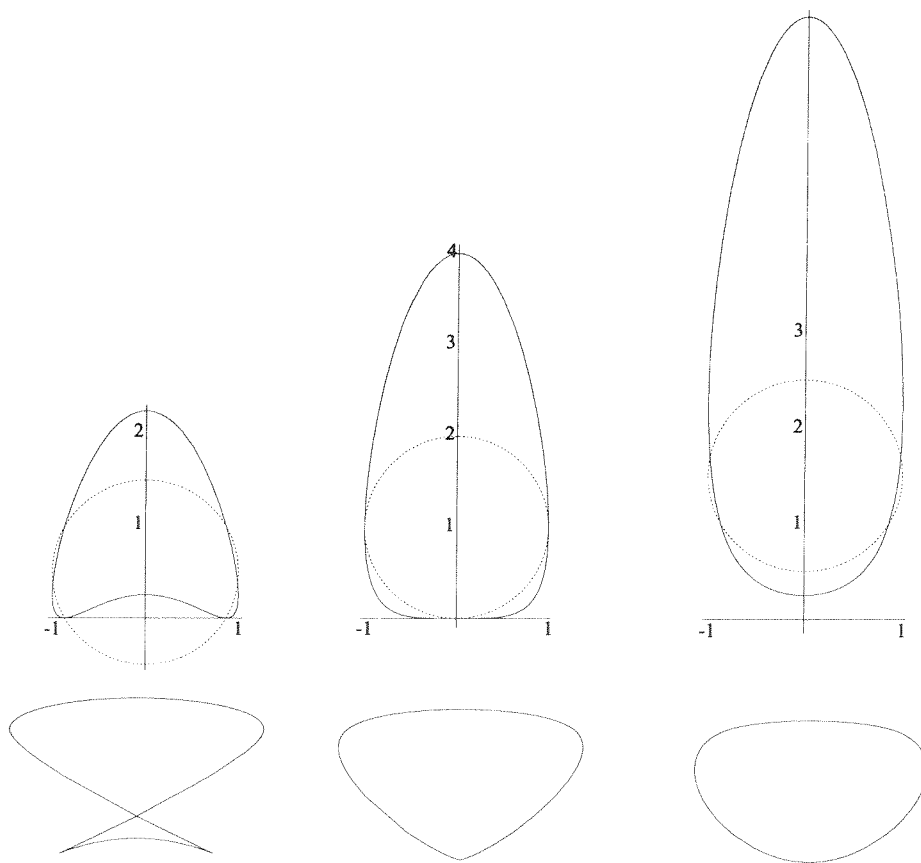
Au § 2 nous esquissons la méthode de Klein, que nous interprétons au § 3 comme l’étude des singularités d’une famille d’applications. Au § 4 nous présentons un cas particulier, suffisant pour traiter le cas des courbes génériques, de la méthode de Viro, qui est très originale et a de nombreuses autres applications.

## 2. La méthode de Klein

Commençons par un exemple qui servira de modèle pour engendrer des bitangentes de type  $t''$ . Considérons l’application :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad (x, y) \mapsto (x, y^2) \quad ;$$

elle envoie le plan entier sur le demi-plan  $\{(x, y) \mid y \geq 0\}$ , en le "pliant" le long de l'axe  $OX$  (voir figure 2). Soit  $C_u$  le cercle de rayon 1 centré en  $(0, u)$ , et faisons varier  $u$  de  $1/2$  à  $3/2$ . Lorsque  $1/2 \leq u < 1$ ,  $C_u$  coupe l'axe  $OX$  en 2 points distincts, pour  $u = 1$  il est tangent à  $OX$  et pour  $1 < u \leq 3/2$  il ne coupe pas l'axe  $OX$ . On en déduit que la courbe  $f(C_u)$ , pour  $1/2 \leq u < 1$  est bitangente à l'axe  $OX$  en deux points réels distincts, qui viennent se confondre en  $(0, 0)$  lorsque  $u = 1$ , puis disparaissent dans l'imaginaire lorsque  $u > 1$ , auquel cas l'axe  $OX$  devient une bitangente de type  $t''$  (voir figure 1). Nous voyons que lorsque  $u$  varie de  $1/2$  à  $3/2$ , 2 points d'inflexion disparaissent et une bitangente de type  $t''$  prend naissance; le nombre  $i + 2t''$  reste donc inchangé durant cette déformation.



-1- Génèse d'une bitangente de type  $t''$ .  
On a représenté les courbes  $f(C_u)$ ,  $u = 1/2, 1, 3/2$ , et leurs duales

La méthode de Klein pour montrer que  $i + 2t'' = n(n-2)$  pour une courbe générique comporte 2 étapes :

- 1) montrer que pour 2 courbes génériques de même degré, le nombre  $i + 2t''$  est le même
- 2) calculer ce nombre pour une courbe générique particulière.

### 2.1 Première étape : existence d'une formule pour $i + 2t''$

Si on a 2 courbes génériques  $f$  et  $g$  de degré  $n$ , on peut passer continûment de l'une à l'autre en rencontrant un nombre fini d'accidents, c'est-à-dire des courbes non génériques. Cela veut dire qu'on peut prendre un chemin joignant  $f$  à  $g$  dans l'espace des courbes de degré  $n$ , qui devra traverser des hypersurfaces de courbes non génériques, comme celle des courbes admettant des tangentes triples, mais pourra éviter des sous-variétés de codimension 2 au moins, comme celle des courbes admettant des tangentes quadruples.

Même si nous restons dans les courbes réelles, puisque nous nous intéressons aux bitangentes en des points non nécessairement réels, il nous faut considérer les points réels et complexes de ces courbes (malgré qu'on ne puisse dessiner que des points réels). Voici la liste des "accidents" qui peuvent arriver :

- a) une tangente triple;
- b) une tangente à un point d'inflexion qui est aussi tangente en un autre point;
- c) un point double ordinaire réel (avec deux branches réelles ou non);
- d) un point d'inflexion dégénéré, où la tangente a un contact d'ordre 3 avec la courbe.

On peut se convaincre facilement que ni  $i$ , ni  $t''$  ne varient lorsqu'on passe par des accidents de type a) ou b).

A titre d'exemple, regardons ce qui se passe pour c); appelons  $P$  le point double. Il faut distinguer deux cas, selon que les deux branches de la courbe sont réelles ou non.

Si elles ne sont pas réelles, c'est un point double isolé et après déformation le point double soit disparaît, soit est remplacé par un petit ovale. Dans les deux cas, aucun point d'inflexion réel n'apparaît : toute droite réelle par  $P$  rencontre la courbe avec multiplicité 2, et il ne peut donc pas y avoir de droite réelle rencontrant l'ovale avec multiplicité supérieure à 2. Au voisinage d'une droite passant par  $P$  et tangente en un autre point  $Q$  de la courbe on trouvera, après déformation, 2 bitangentes, chacune tangente en un point  $P'$  proche de  $P$  et un autre  $Q'$  proche de  $Q$ . Or  $P$  et  $Q$  ne sont pas conjugués, car  $P$  est réel et  $P \neq Q$ , et alors  $P'$  et  $Q'$  ne sont pas non plus conjugués. Les 2 bitangentes que l'on trouve après déformation ne peuvent donc pas être de type  $t''$ .

Si les deux branches sont réelles, on peut utiliser comme modèle local de déformation l'exemple des cubiques  $y^2 - x(x-1)(x-\alpha)$  au voisinage de  $\alpha = 1$ . Lorsque  $\alpha$  traverse la valeur 1, 2 points d'inflexion viennent se confondre en le point double, puis reparaissent. Le nombre  $i$  ne change donc pas. On se convainc que  $t''$  ne change pas non plus, par un même type d'argument que dans le cas du point double isolé.

C'est seulement dans le cas d) que les valeurs de  $i$  et  $t''$  changent. Mais l'exemple du début de ce § nous fournit un modèle local de ce qui se passe, et montre que  $i + 2t''$  ne varie pas. C'est là l'argument clé de la méthode de Klein, qui montre pourquoi il y a une formule exprimant  $i + 2t''$  en fonction du degré.

## 2.2 Deuxième étape : calcul de $i + 2t''$ sur un exemple

On prend d'abord le cas pair,  $n = 2\mu$ . On part de la courbe  $C_n$  de degré  $n$  constituée des  $\mu$  ellipses concentriques images de l'ellipse  $x^2 + 2y^2 = 1$  par des rotations d'angle  $\pi/\mu \cdot i$ ,  $i = 0, \dots, \mu - 1$ . Elle possède  $4\binom{\mu}{2} = n(n-2)/2$  points doubles ordinaires, et pas d'autres singularités, ni de points d'inflexion (réels ou complexes). Lorsqu'on déforme  $C_n$  en une courbe lisse  $C'_n$  proche, chaque point double va engendrer 2 points d'inflexion, ce qui en fait  $n(n-2)$  en tout. D'autre part, les bitangentes de  $C'_n$  seront proches de droites de 3 sortes :

- les droites tangentes à 2 des ellipses constituant  $C_n$  ;
- les droites passant par un point d'intersection de 2 ellipses, tangentes à une troisième ;
- les droites joignant 2 points doubles.

Les points de tangence de toutes ces bitangentes seront proches de paires de points réels distincts. On aura donc  $t'' = 0$ , ce qui démontre la formule  $i + 2t'' = n(n-2)$  dans le cas où  $n$  est pair.

Si  $n = 2\mu + 3$ , on part de la courbe  $C_n$  formée par les  $\mu$  coniques ci-dessus, plus une cubique coupant chaque ellipse en 6 points, distincts des points d'intersection de 2 ellipses (par exemple, on peut prendre une petite déformation de la cubique  $y^3 = 0$ ). Dans ce cas,  $C_n$  possède  $4\binom{\mu}{2} + 6\mu$  points doubles et 3 points d'inflexion réels. On raisonne comme dans le cas pair pour montrer qu'une petite déformation lisse de  $C_n$  possède  $n(n-2)$  points d'inflexion et que  $t'' = 0$ .

Notons que dans les 2 cas,  $n$  pair ou impair, on a construit une courbe  $f_n^{\max}$  ayant le maximum de points d'inflexion réels, soit  $n(n-2)$ . Pour montrer l'existence de courbes ayant tous les nombres admissibles de points d'inflexion réels, il suffit de construire des courbes  $f_n^{\min}$  ayant le minimum de points d'inflexion, soit 0 si  $n$  est pair, 3 si  $n$  est impair. Alors, en déformant continûment  $f_n^{\min}$  en  $f_n^{\max}$ , en prenant soin de ne passer que par des accidents génériques, le nombre de points d'inflexion réels varie de  $-2$ , 0 ou 2, et on aura donc toutes les valeurs possibles. Pour  $f_n^{\min}$ , dans le cas  $n = 2\mu$

on peut prendre  $f_n = x^{2\mu} + y^{2\mu} + 1$ , qui définit la courbe vide; dans le cas  $n = 2\mu + 3$  on peut prendre une petite déformation lisse de  $f_n^{\min} = f_{2\mu}^{\min} \cdot f_3$ , où  $f_3$  est une cubique lisse.

### 3. Singularités d'applications

Le sujet de ce § est traité en détail dans [6].

#### 3.1 Stratification d'une application

Pour faire l'étude d'une application propre  $f : X^N \rightarrow Y^N$ , où  $X, Y$  et  $f$  sont  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $X$  et  $Y$  de même dimension  $N$ , il convient d'introduire les ensembles suivants :

$$\Sigma(f) = \{x \in X \mid \dim(\text{Ker } df_x) \geq 1\} \quad ,$$

l'ensemble des points singuliers de  $f$  à la source. Nous nous restreignons au cas où  $\dim(\text{Ker } df_x) \leq 1, \forall x \in X$ , qui suffit pour nos besoins. Dans ce cas :

$$\Sigma(f) = \Sigma^1(f) = \{x \in X \mid \dim(\text{Ker } df_x) = 1\} \quad .$$

Les équations locales de  $\Sigma^1(f)$  dans  $X$  s'expriment en termes de dérivées premières de  $f$ ; on dit que  $f$  est  $\Sigma^1$ -transverse si ces équations sont de rang maximum. Dans ce cas,  $\Sigma^1(f) \subset X$  est une sous-variété (de codimension 1), et cela a donc un sens de poser :

$$\Sigma^{1,1}(f) = \{x \in \Sigma^1(f) \mid \dim(\text{Ker}(df \mid T_x \Sigma^1(f))) = 1\}$$

où  $T_x$  désigne l'espace tangent. Les équations locales de  $\Sigma^{1,1}(f)$  font intervenir les dérivées d'ordre 1 et 2 de  $f$ , et de nouveau on dira que  $f$  est  $\Sigma^{1,1}$ -transverse si ces équations sont de rang maximum. En continuant ainsi, on définit une suite de sous-variétés :

$$\Sigma^{1k}(f) \subset \Sigma^{1k-1}(f) \subset \dots \subset \Sigma^1(f) \subset X \quad , \quad \text{où } 1_k = \underbrace{1, \dots, 1}_k$$

$\Sigma^0$  désigne les points réguliers de  $f$ , et  $1_0 = 0$ . La codimension de  $\Sigma^{1k}(f)$  est  $k$ .

On pose encore

$$\Sigma^{1k,0}(f) = \Sigma^{1k}(f) \setminus \Sigma^{1k+1}(f)$$

de sorte que les  $\Sigma^{1k,0}(f)$  forment une partition de  $X$  en sous-variétés, ou stratification, et la restriction de  $f$  à chaque sous-variété est une immersion propre. Pour s'assurer que  $f$ , en restriction à chaque sous-variété, soit un revêtement sur son image, il faut raffiner cette stratification en définissant les sous-ensembles de self-intersections à la source :

$$M_h(f, \Sigma^{1k_1,0}, \dots, \Sigma^{1k_h,0}) = \{x \in \Sigma^{1k_1,0}(f) \mid \exists x^2 \in \Sigma^{1k_2,0}(f), \dots, x^h \in \Sigma^{1k_h,0}(f)\}$$

avec  $x, x^2, \dots, x^h$  tous différents et  $f(x) = f(x^2) = \dots = f(x^h)$  ,  
 $k_1, \dots, k_h \geq 0$

et leurs images

$$N_h(f, \Sigma^{1_{k_1}, 0}, \dots, \Sigma^{1_{k_h}, 0}) = f\left(M_h(f, \Sigma^{1_{k_1}, 0}, \dots, \Sigma^{1_{k_h}, 0})\right) .$$

On désignera par  $M_h^0(f, \Sigma^{1_{k_1}, 0}, \dots, \Sigma^{1_{k_h}, 0})$  le complémentaire dans  $M_h(f, \Sigma^{1_{k_1}, 0}, \dots, \Sigma^{1_{k_h}, 0})$  de toutes les autres self-intersections, et

$$N_h^0(f, \Sigma^{1_{k_1}, 0}, \dots, \Sigma^{1_{k_h}, 0}) = M_h^0(f, \Sigma^{1_{k_1}, 0}, \dots, \Sigma^{1_{k_h}, 0}) .$$

En suivant H. Whitney [12], on dira qu'une application est excellente si elle est transverse à toutes les  $\Sigma^{1_k}$  et si toutes les self-intersections de ses restrictions aux  $\Sigma^{1_k}(f)$  sont aussi transverses, ce qui veut dire que si  $x^1 \in \Sigma^{1_{k_1}}(f) \dots x^h \in \Sigma^{1_{k_h}}(f)$ , les espaces vectoriels

$$df_{x^1}(T\Sigma_{x^1}^{1_{k_1}, 0}), \dots, df_{x^h}(T\Sigma_{x^h}^{1_{k_h}, 0})$$

sont en position générale dans  $T_y Y$ , où  $y = f(x^1) = \dots = f(x^h)$ .

Dans ce cas, les  $M_h^0$  et les  $N_h^0$  sont des variétés lisses de codimension  $k_1 + \dots + k_h$  et les restrictions  $f|_{M_h^0(\dots)} : M_h^0(\dots) \rightarrow N_h^0(\dots)$  sont des revêtements localement triviaux.

Prenons par exemple l'application

$$\heartsuit \quad G_n : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad G_n(t, x_1, \dots, x_n) = \\ (t^n + x_1 t^{n-1} + \dots + x_n, x_1, \dots, x_n) .$$

Pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  fixé, posons  $p_x(t) = t^n + x_1 t^{n-1} + \dots + x_n$ . On vérifie que

$$(t^0, x) \in M_h(G_n, \Sigma^{1_{k_1}, 0}, \dots, \Sigma^{1_{k_h}, 0})$$

$\Updownarrow$

$p_x(t)$  possède  $h$  racines distinctes  $t_0, \dots, t_{h-1}$

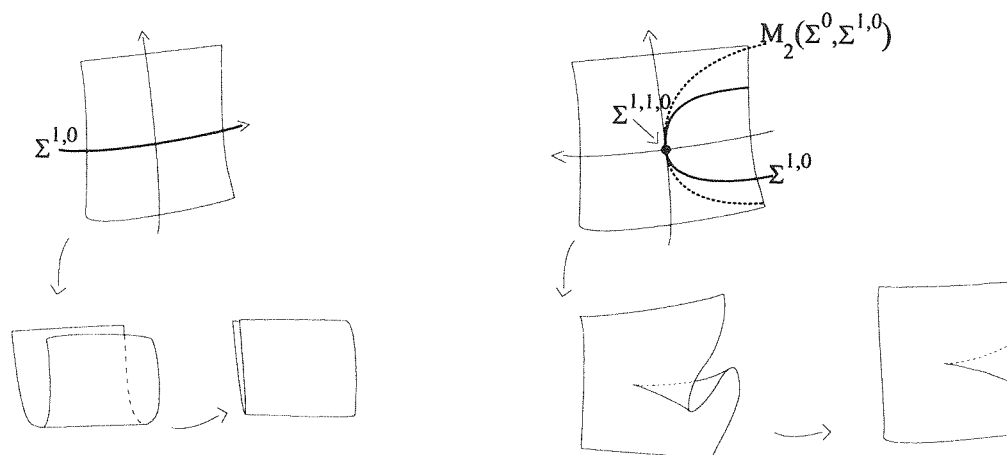
de multiplicité respectivement  $k_1 + 1, \dots, k_h + 1$  .

On déduit du fait qu'il existe des polynômes de degré  $n$  ayant des racines arbitraires, pourvu que la somme de leur multiplicités ne dépasse pas  $n$ , que  $G_n$  est excellente.

Notons que si  $f : X \rightarrow Y$  admet une singularité de type  $\Sigma^{1_k}$  en un point  $x_0 \in X$ , alors toute application  $F : X \times U \rightarrow Y \times U$ , où  $U$  est une variété  $C^\infty$ , de la forme  $F(x, u) = (f(x), u)$  admet le même type de singularité aux points  $(x_0, u)$ ,  $u \in U$ . Une application qui est équivalente à  $F$ , par changement de coordonnées à la source et au but, est appelée une suspension de  $f$ . Par exemple, l'application  $\heartsuit$  est une suspension de

$$F_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, x_2, \dots, x_n) \mapsto (t^n + x_2 t^{n-2} + \dots + x_n, x_2, \dots, x_n) .$$

H. Whitney [12], puis B. Morin [5], ont montré qu'on peut utiliser les  $F_n$ , localement par rapport au but, comme des modèles local pour les applications excellentes.



-2- Le pli et la fronce.

Nous reprenons plus en détail les 3 premiers modèles, les seuls que nous utiliserons explicitement :

- 1) le pli  $F_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2^2)$ . Dans ce cas,  $\Sigma^1(F_2)$  est l'axe  $OX_1$ , et c'est la seule singularité. C'est en fait la suspension de  $x_2 \rightarrow x_2^2$
- 2) La fronce  $F_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2^3 + x_1x_2)$ . Ici

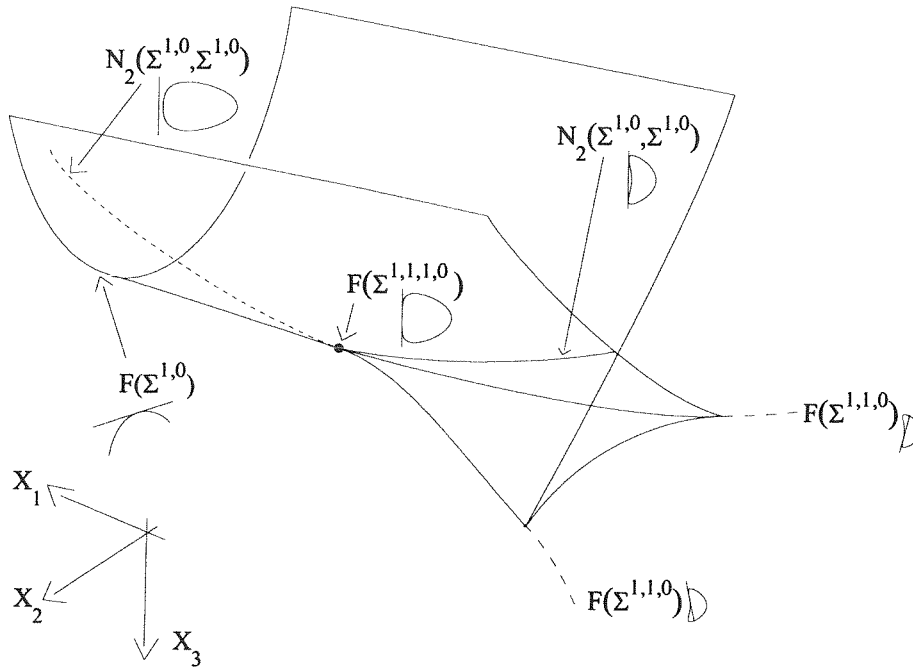
$$\Sigma^1(F_3) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = -3x_2^2\} \quad , \quad \Sigma^{1,1}(F_3) = \{(0, 0)\}$$

$$M_2(\Sigma^0, \Sigma^1) = \{x_1, x_2 \mid 4x_1^2 - 15x_1x_2^2 + 9x_2^4 = 0\} \quad .$$

Pour stratifier  $F_3$ , il faut encore considérer  $M_2(\Sigma^0, \Sigma^1)$  : l'image inverse par  $F_3$  de  $F_3(\Sigma^1(F_3))$  se décompose en la réunion de  $\Sigma^1(F_3)$  et  $M_2(\Sigma^0, \Sigma^1)$ . Aux points de  $\Sigma^{1,0}$ ,  $F_3$  est une suspension du pli.

- 3) La queue d'aronde.  $F_4(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3^4 + x_2^2x_1 + x_3x_2)$ . Cette application présente les singularités  $\Sigma^{1,0}$ ,  $\Sigma^{1,1,0}$ ,  $\Sigma^{1,1,1,0}$ ,  $M_2(\Sigma^0, \Sigma^{1,0})$ ,  $M_2(\Sigma^{1,0}, \Sigma^{1,0})$ . Les lieux singuliers au but sont représentés sur la figure 3.

$F_4$  est une suspension du pli le long de  $\Sigma^{1,0}$ , et une suspension de la fronce le long de  $\Sigma^{1,1,0}$ .



-3- Esquisse de la singularité de la queue d'aronde et interprétation des diverses strates.

### 3.2 L'argument clé et la queue d'aronde

Désignons par  $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_n$  et  $\mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]_n$  les espaces vectoriels des polynômes homogènes de degré  $n$  en  $x_0, x_1, x_2$  à coefficients respectivement complexes ou réels. Les espaces projectifs associés

$$\mathbb{P}_{n,\mathbb{C}} = \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_n) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{n,\mathbb{R}} = \mathbb{P}(\mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]_n)$$

s'identifient aux courbes planes de degré  $n$ , respectivement complexes et réelles.

$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  et  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  désigneront les plans projectifs respectivement complexe et réel. On omettra l'indice  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$  pour se référer à la fois au cas complexe et réel.

Si  $[f] \in \mathbb{P}_n$ ,  $V(f) = \{[x] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid f(x) = 0\}$  désignera la courbe associée.

$\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$  et  $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{R}}^2$  désigneront les plans projectifs duaux, c'est-à-dire les ensembles de droites de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  et  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  respectivement.

On définit l'ouvert de Zariski

$$\mathbb{P}_{n,\mathbb{C}}^0 = \{[f] \in \mathbb{P}_{n,\mathbb{C}} \mid V(f) \text{ ne contient pas de droite}\}$$

et on pose

$$\mathbb{P}_{n,\mathbb{R}}^0 = \mathbb{P}_{n,\mathbb{C}}^0 \cap \mathbb{P}_{n,\mathbb{R}} \quad ,$$

qui est l'espace des courbes réelles qui, regardées sur les complexes, ne contiennent pas de droites.

Pour  $n \geq 3$ , l'espace  $\mathbb{P}_{n,\mathbb{R}}^0$  est connexe, car c'est le complémentaire dans  $\mathbb{P}_{n,\mathbb{R}}$  d'une sous-variété algébrique de codimension  $n - 1$ . On peut supposer dorénavant que  $n \geq 3$ , les cas  $n = 2$  et  $n = 1$  n'ayant pas d'intérêt pour les points d'inflexion.

Soit  $[f] \in \mathbb{P}_n^0$ . Posons :

$$W_f = \{([x], \ell) \in V(f) \times \check{\mathbb{P}}^2 \mid [x] \in \ell\} \quad ;$$

on a deux projections naturelles,  $\theta_f : W_f \rightarrow \check{\mathbb{P}}^2$  et  $\pi_1 : W_f \rightarrow V(f)$ . Cette dernière est une fibration; supposons que  $V(f)$  soit lisse, et alors  $W_f$  l'est aussi.

La fibre de  $\theta_f$  au-dessus de  $\ell \in \check{\mathbb{P}}^2$  est l'intersection  $\ell \cap V(f)$ . Il y a une stratification naturelle de  $\theta_f$  d'après la multiplicité des points d'intersection de  $\ell$  et  $V(f)$ . Le noyau de la dérivée de  $\theta_f$  en un point  $([x], \ell) \in W_f$  s'identifie à l'intersection  $\ell \cap T_x(V(f))$  (strictement parlant, on devrait dire  $T_x(\ell) \cap T_x(V(f))$ ). Ainsi :

$$\Sigma(\theta_f) = \Sigma^1(\theta_f) = \{([x], \ell) \in W_f \mid \ell = T_x(V(f))\}$$

et  $\theta_f(\Sigma(\theta_f))$  est la courbe duale de  $V(f)$ . Si  $V(f)$  est une courbe générique,  $\theta_f$  est une application excellente, et réciproquement; parmi les strates intéressantes de  $\theta_f$ , remarquons :

$$\begin{aligned} \Sigma^{1,1}(\theta_f) &= \Sigma^{1,1,0}(\theta_f) = \\ & \{([x], \ell) \mid \ell = T_x(V(f)), [x] \text{ est point d'inflexion ordinaire sur } V(f)\} \\ N_2(\theta_f, \Sigma^1, \Sigma^1) &= \\ N_2^0(\theta_f, \Sigma^1, \Sigma^1) &= \{\ell \mid \ell \text{ est une bitangente ordinaire de } V(f)\} \quad . \end{aligned}$$

On voit ainsi comment les points d'inflexion et les bitangentes s'interprètent en termes de lieux singuliers de l'application  $\theta_f$ . Aussi, la courbe duale apparait comme lieu singulier au but, ou contour apparent d'une application entre surfaces, ce qui explique pourquoi la duale d'une courbe générique de degré  $n \geq 3$  possède toujours des points doubles et des points cuspidaux.

Pour justifier la démarche de Klein on doit examiner ce qui se passe lorsque  $f$  varie. Il est alors naturel de poser

$$W = \{([x], \ell, [f]) \in \mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2 \times \mathbb{P}_n^0 \mid [x] \in \ell, f(x) = 0\}$$

et de considérer le diagramme d'applications :

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\theta} & \check{\mathbb{P}}^2 \times \mathbb{P}_n^0 \\ S \searrow & & \swarrow T \\ & \mathbb{P}_n^0 & \end{array}$$

où  $\theta([x], \ell, [f]) = (\ell, [f])$ ,  $S([x], \ell, [f]) = [f]$ ,  $T(\ell, [f]) = [f]$ . En effet, si on fixe  $[f] \in \mathbb{P}_n^0$ , la restriction de  $\theta$  à  $S^{-1}([f])$  s'identifie à l'application  $\theta_f$  de tout à l'heure.

Il s'agit donc d'étudier  $\theta$ , considérée comme famille d'applications paramétrée par  $\mathbb{P}_n^0$ . Tout d'abord, voici le résultat fondamental concernant  $\theta$  :

**Théorème** *L'application  $\theta$  est excellente et  $([x], \ell, [f]) \in \Sigma^{1,k,0}(\theta) \Leftrightarrow f$  restreinte à  $\ell$  possède un zéro d'ordre exactement  $k+1$  en  $x$*

L'idée de la preuve est de considérer  $\theta$  comme famille d'applications  $\theta_\ell : W_\ell \rightarrow \mathbb{P}_n^0$ , où  $W_\ell = \theta^{-1}(\{\ell\} \times \mathbb{P}_n^0)$ , paramétrées par  $\check{\mathbb{P}}^2$  :

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\theta} & \check{\mathbb{P}}^2 \times \mathbb{P}_n^0 \\ S' \searrow & & \swarrow T' \\ & \check{\mathbb{P}}^2 & \end{array} .$$

Pour  $\ell$  fixé,  $\theta_\ell$  est une application excellente, car c'est essentiellement l'exemple  $\heartsuit$  du § 3.1, et il en suit que  $\theta$  elle-même est excellente.

On peut déjà déduire de ce théorème l'existence d'un ouvert de Zariski non vide de courbes génériques : il suffit de prendre l'ouvert  $\Omega_{n,\mathbb{C}}$  de  $\mathbb{P}_{n,\mathbb{C}}^0$  constitué par les valeurs régulières des restrictions de  $S$  aux strates de la stratification de  $\theta$ , car si  $[f] \in \Omega_n$ , les propriétés de transversalité de  $\theta$  sont héritées par  $\theta_f$ . Dans le cas réel, il faut prendre l'ouvert  $\Omega_{n,\mathbb{R}} = \Omega_{n,\mathbb{C}} \cap \mathbb{P}_{n,\mathbb{R}}^0$ .

Pour contrôler les points d'inflexion réels, il faut étudier l'application

$$\phi_{\mathbb{R}} : \Sigma^{1,1}(\theta_{\mathbb{R}}) \rightarrow \mathbb{P}_{n,\mathbb{R}}^0$$

qui est la restriction de  $S$  à  $\Sigma^{1,1}(\theta_{\mathbb{R}})$ .

Pour contrôler comment les bitangentes de type  $t''$  varient en fonction de  $[f] \in \mathbb{P}_{n,\mathbb{R}}^0$ , considérons d'abord l'application

$$\psi_{\mathbb{C}} : \overline{M}_2(\theta_{\mathbb{C}}, \Sigma^{1,0}, \Sigma^{1,0}) \rightarrow \mathbb{P}_{n,\mathbb{C}}^0$$

qui est la restriction de  $S$  à  $\overline{M}_2(\theta_{\mathbb{C}}, \Sigma^{1,0}, \Sigma^{1,0})$ ; la fibre de  $\psi_{\mathbb{C}}$  au-dessus de  $[f] \in \Omega_{\mathbb{C}}$  est constituée des couples  $([x], \ell)$ ,  $[x] \in V(f)$ ,  $\ell$  tangente à  $V(f)$  en  $[x]$ , mais aussi en un autre point de  $V(f)$  distinct de  $[x]$ .

L'application qui nous intéresse, dénotée par  $\psi_{t''} : \overline{M}_2(t'') \rightarrow \mathbb{P}_{n,\mathbb{R}}^0$ , est la restriction de  $\psi_{\mathbb{C}}$ , où :

$$\overline{M}_2(t'') = \overline{M}_2(\theta_{\mathbb{C}}, \Sigma^{1,0}, \Sigma^{1,0}) \cap \left( (\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2) \times \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{R}}^2 \times \mathbb{P}_{n,\mathbb{R}}^0 \right) .$$

Ni  $\phi_{\mathbb{R}}$  ni  $\psi_{t''}$  ne sont excellentes, et d'ailleurs la source de  $\psi_{t''}$  n'est pas lisse. C'est à partir de l'étude de  $\theta$  qu'on pourra avoir les renseignements nécessaires sur le comportement des fibres de  $\phi_{\mathbb{R}}$  et  $\psi_{t''}$ .

Les points de ramification de  $\phi_{\mathbb{R}}$  et  $\psi_{t''}$  sont de 2 sortes :

1) Les points  $([x], \ell, [f])$  appartenant à une strate de codimension 3 de  $\theta$  (et donc de codimension 1 dans  $\Sigma^{1,1}(\theta_{\mathbb{R}})$  ou  $\overline{M}_2(t'')$ ). C'est le cas

pour les accidents a),b) et d), qui proviennent de  $M_3^0(\theta, \Sigma^{1,0}, \Sigma^{1,0}, \Sigma^{1,0})$ ,  $M_2^0(\theta, \Sigma^{1,1,0}, \Sigma^{1,0})$  et  $\Sigma^{1,1,1,0}$  respectivement.

2) Les points  $([x], \ell, [f])$  appartenant à une strate de codimension 2 de  $\theta$ , avec  $[x]$  point double ordinaire de  $V(f)$ . C'est le cas pour l'accident c), qui se produit lorsque  $([x], \ell, [f]) \in \Sigma^{1,1,0}(\theta)$ , ce qui veut dire ici que  $\ell$  est simplement tangente à l'une des branches de  $V(f)$  par  $[x]$ .

Par exemple, pour examiner ce qui se passe lorsque dans le cas 2) ci-dessus, ou cas c) du § 2, lorsque les deux branches sont réelles, on montre que  $\phi_{\mathbb{R}}$  s'écrit localement, au voisinage de  $([x], \ell)$ , sous la forme  $(x_1, \dots, x_N) \mapsto (x_1^3, x_2, \dots, x_N)$ , qui est un homéomorphisme local. Cela explique pourquoi les accidents de type c) n'ont pas d'influence sur le nombre de points d'inflexion, et aussi pourquoi dans le cas complexe un point double absorbe 6 points d'inflexion (3 pour chaque branche).

Notons que ce modèle local de  $\phi_{\mathbb{R}}$  est indépendant de  $n$ , donc pour examiner le comportement de  $\phi_{\mathbb{R}}$  au voisinage de tels points il suffit de considérer le cas des cubiques. Aussi, ce modèle local peut être utilisé pour justifier la construction de  $f_n^{\max}$  du § 2.2.

Venons-en à l'argument clé. Les accidents de type d) se produisent lorsqu'on traverse  $S(\Sigma^{1,1,1,0}(\theta))$ . On se ramène à étudier la singularité de la queue d'aronde, considérée comme famille d'applications paramétrée par  $x_1$  :

$$\begin{array}{ccc} (x_1, x_2, x_3) & \xrightarrow{F} & (x_1, x_2, x_3^4 + x_3^2 x_1 + x_3 x_2) \\ & \searrow & \swarrow \\ & x_1 & \end{array}$$

où la variable  $x_1$  joue le rôle d'un chemin de l'espace des courbes de degré  $n$ . La courbe des points doubles de  $F(\Sigma^1)$ , qui est  $F(N_2(F, \Sigma^1, \Sigma^1))$ , se prolonge au-delà du point central de la singularité, là où les arêtes cuspidales se rencontrent. Ce prolongement, que l'on ne dessine généralement pas, est l'image de paires de points imaginaires conjugués, et fait partie de l'adhérence de Zariski de  $F(\Sigma^1)$  (voir figure 2). On voit donc que, lorsque  $x_1$  passe de valeurs négatives à des valeurs positives, les 2 arêtes cuspidales et la courbe des points doubles viennent se confondre dans le point central, puis la courbe de points doubles images de paires de points imaginaires conjugués apparaît. Ce qui s'interprète par le fait que  $i$  diminue de 2, et qu'une bitangente réelle en des points réels devient bitangente de type  $t''$ , et donc  $t''$  augmente de 1.

On peut aussi se contenter de dire simplement que, puisqu'on a un modèle local de la famille  $\theta$  en un point de  $\Sigma^{1,1,1,0}$ , il suffit d'avoir recours à l'exemple du début du § 2.

L'étude de la variation des points d'inflexion et des bitangentes d'une courbe plane peut donc se ramener à l'étude des strates singulières de  $\theta$  et de leur position par rapport à la projection  $S$  sur l'espace des courbes de

degré  $n$ . On sort ainsi le problème de son contexte, ce qui permet de mieux le comprendre, et aussi d'entrevoir des généralisations. Cette démarche s'inspire de la "théorie des catastrophes" de R. Thom [9], et d'ailleurs la singularité de la queue d'aronde est l'une des 7 catastrophes élémentaires auxquelles, selon cette théorie, on se ramène pour comprendre les phénomènes.

Quant aux généralisations, on devrait facilement pouvoir trouver des formules analogues à celle de  $i + 2t'' = n(n - 2)$ , par exemple pour les coniques par 3 points tangentes à l'ordre 2 à une courbe donnée. On pourrait aussi généraliser en étudiant des singularités plus compliquées, comme  $\Sigma^{15,0}$  pour l'étude des points sextactiques d'une courbe plane (points où il y a une conique ayant un contact d'ordre 6), ou des questions analogues pour les surfaces dans l'espace.

#### 4. Introduction à la méthode de Viro

Cette méthode, que nous exposerons dans un cas particulier qui exige très peu de technique, utilise la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un espace  $X$  :

$$\chi(X) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim(H_i(X, \mathbb{R}))$$

où  $H_i(X, \mathbb{R})$  dénote le  $i$ -ème groupe d'homologie singulière. Pour que  $\chi(X)$  soit bien défini, il faut supposer que ces groupes soient de dimension finie et que seul un nombre fini d'entre eux soient non nuls. C'est le cas si  $X$  est un ouvert de Zariski dans une variété projective.

Les propriétés suivantes de la caractéristique d'Euler-Poincaré se démontrent à l'aide des propriétés fondamentales des groupes d'homologie :

1) Si  $X$  et  $Y$  sont ouverts dans  $X \cup Y$ , on a :

$$\chi(X \cup Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(X \cap Y) \quad ;$$

2)  $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$  .

Notons que 1) est faux en général : on prend  $X = \{0, 1\}$ ,  $Y = ]0, 1[$ . Alors  $X \cap Y = \emptyset$ ,  $\chi(X \cup Y) = \chi([0, 1]) = 1 = \chi(Y)$ ,  $\chi(X) = 2$ ,  $\chi(X \cap Y) = 0$ .

La propriété 2) se généralise :

2')  $E \rightarrow Y$  est un fibré localement trivial, de fibre type  $F$ , alors

$$\chi(E) = \chi(Y)\chi(F) \quad .$$

On va généraliser encore la propriété 2') :

2'') Soit  $f : X \rightarrow Y$  et supposons qu'il existe un fermé  $Y_1 \subset Y$  tel que, en posant  $X_1 = f^{-1}(Y_1)$ ,  $f|_{X \setminus X_1} : X \setminus X_1 \rightarrow Y \setminus Y_1$  soit une fibration localement triviale, de fibre type  $F_0$ . Supposons qu'il existe un voisinage  $U$  de  $Y_1$  dans  $Y$  qui se rétracte par déformation sur  $Y_1$  et tel que  $V = f^{-1}(U)$  se rétracte par déformation sur  $X_1$ . Alors :

$$\chi(X) = \chi(Y)\chi(F_0) - \chi(Y_1)\chi(F_0) + \chi(X_1) \quad .$$

On démontre 2'') à l'aide de 1) et 2'), en remplaçant d'abord  $Y_1$  par  $U$  :

$$\begin{aligned}\chi(X) &= \chi(X \setminus X_1) + \chi(V) - \chi(V \setminus X_1) = \chi(Y \setminus Y_1)\chi(F_0) + \chi(V) - \chi(U \setminus Y_1)\chi(F_0) \\ &= (\chi(Y) - \chi(U) + \chi(U \setminus Y_1))\chi(F_0) + \chi(V) - \chi(U \setminus Y_1)\chi(F_0) \\ &= \chi(Y)\chi(F_0) - \chi(U)\chi(F_0) + \chi(V) = \chi(Y)\chi(F_0) - \chi(Y_1)\chi(F_0) + \chi(X_1) \quad .\end{aligned}$$

Si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme algébrique, on peut lui appliquer la propriété 2'') en prenant pour  $Y_1$  l'ensemble des valeurs non régulières de  $f$ .

Pour appliquer 2''), il faut stratifier les applications, comme au § 3.1. Par exemple, soit  $\Gamma \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  une courbe lisse de degré  $n$  et  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  une projection à partir d'un point générique. On peut supposer que, dans des coordonnées affines, c'est la projection parallèle à l'axe  $OY$ . Si  $\gamma(x, y) = 0$  est l'équation de  $\Gamma$  dans ces coordonnées affines, on a :

$$\Sigma(f) = \{(x, y) \mid \gamma(x, y) = 0 \text{ et } \frac{\delta\gamma}{\delta y}(x, y) = 0\}$$

et donc, d'après Bézout,  $\Sigma(f)$  consiste en  $n(n-1)$  points, ainsi que  $Y_1 = f(\Sigma(f))$ ; la fibre générique de  $f$  consiste en  $n$  points, et  $\Gamma_1 = f^{-1}(Y_1)$  en  $n(n-1)(n-1)$  points. On tire de 2'') la formule bien connue :

$$\begin{aligned}\chi(\Gamma) &= \chi(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)\chi(F_0) - \chi(Y_1)\chi(F_0) + \chi(\Gamma_1) = \\ &= 2n - n(n-1)n + n(n-1)(n-1) = n(3-n) \quad .\end{aligned}$$

Pour la formule de Klein, soit  $\Gamma_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  une courbe générique et désignons par  $\Gamma_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  ses points complexes. On pose

$$X = \{(\ell, [x]) \in \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{R}}^2 \times \Gamma_{\mathbb{C}} \mid x \in \ell_{\mathbb{C}}\}$$

où  $\ell_{\mathbb{C}}$  désigne la complexifiée de la droite réelle  $\ell$ . On a 2 projections :

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{R}}^2 & & \Gamma_{\mathbb{C}} \end{array}$$

Appliquons 2'') à  $\pi_2$ . Si  $x \in \Gamma_{\mathbb{C}} \setminus \Gamma_{\mathbb{R}}$ ,  $\pi_2^{-1}(x)$  consiste en un seul point, alors que si  $x \in \Gamma_{\mathbb{R}}$ ,  $\pi_2^{-1}(x)$  est un faisceau de droite réelles, isomorphe à  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ . En fait  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  est l'ensemble des valeurs singulières de  $\pi_2$ ,  $\chi(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1) = \chi(\Gamma_{\mathbb{R}}) = 0$ ,  $\chi(\Gamma_{\mathbb{C}}) = n(3-n)$  d'après l'exemple précédent, et on déduit alors de 2'') que :

$$\chi(X) = \chi(\Gamma_{\mathbb{C}}) - \chi(\Gamma_{\mathbb{R}}) + \chi(\Gamma_{\mathbb{R}})\chi(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1) = n(3-n) \quad .$$

Appliquons 2'') à  $\pi_1$ . La fibre  $\pi_1^{-1}(\ell)$  est constituée par les points d'intersection de  $\ell_{\mathbb{C}}$  et  $\Gamma_{\mathbb{C}}$ . L'ensemble des valeurs singulières est la courbe duale  $\check{\Gamma}_{\mathbb{R}}$ . Celle-ci contient :

- le sous-ensemble  $T$  de points doubles ordinaires à branches réelles, constitué par les bitangentes réelles en des points réels; on notera  $t$  sa cardinalité;
- le sous-ensemble  $T''$  des points doubles isolés, constitué par les bitangentes de type  $t''$ ;

— le sous-ensemble  $I$  de points cuspidaux ordinaires, constitué par les tangentes aux points d'inflexion.

On voit facilement, par exemple en utilisant la propriété 1) de  $\chi$ , que  $\chi(\tilde{\Gamma}_{\mathbb{R}}) = -t + t''$  et  $\chi(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2) = 1$ . La fibre de  $\pi_2$  au-dessus de  $\ell \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  est constituée par  $n-2$  points si  $\ell \in T \cup T'' \cup I$ ,  $n-1$  points si  $\ell \in \tilde{\Gamma}_{\mathbb{R}} \setminus T \cup T'' \cup I$  et  $n$  points si  $\ell \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus \tilde{\Gamma}_{\mathbb{R}}$ . On applique 2'') :

$$\chi(X) = \chi(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)n - \chi(\tilde{\Gamma}_{\mathbb{R}})n + \chi(\pi_2^{-1}(\tilde{\Gamma}_{\mathbb{R}})) \quad .$$

Pour calculer  $\chi(\pi_2^{-1}(\tilde{\Gamma}_{\mathbb{R}}))$ , on recommence : l'ensemble des valeurs singulières de

$$\pi_2 \mid \pi_2^{-1}(\tilde{\Gamma}_{\mathbb{R}}) : \pi_2^{-1}(\tilde{\Gamma}_{\mathbb{R}}) \rightarrow \tilde{\Gamma}_{\mathbb{R}}$$

est constitué par  $T \cup T'' \cup I$ . Ainsi :

$$\chi(\pi_2^{-1}(\tilde{\Gamma}_{\mathbb{R}})) = \chi(\tilde{\Gamma}_{\mathbb{R}})(n-1) - \chi(T \cup T'' \cup I)(n-1) + \chi(\pi_2^{-1}(T \cup T'' \cup I))$$

Finalement, on trouve :

$$\begin{aligned} \chi(X) &= \chi(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)n - \chi(\tilde{\Gamma}_{\mathbb{R}}) - (n-1)\chi(T \cup T'' \cup I) + \chi(\pi_2^{-1}(T \cup T'' \cup I)) \\ &= 2n - (-t + t'') - (n-1)(t + t'' + i) + (n-2)(t + t'' + i) = n - 2t'' - i \end{aligned}$$

et puisque on a aussi que  $\chi(X) = n(3-n)$ , on en déduit bien que  $i + 2t'' = n(n-2)$ .

## Références

- [1] S. Akbulut (ed.), *Real Algebraic Geometry and Topology*, Vol. 182, Contemporary Mathematics (1996).
- [2] R. Benedetti and R. Silhol, *Spin and Pin<sup>-</sup> structures, immersed and embedded surfaces and a result of B. Segre on real cubic surfaces*, Vol. 34, Topology (1995), 651–678.
- [3] J.L. Coolidge, *A treatise on algebraic plane curves*, Oxford University Press, Oxford (1931).
- [4] F. Klein *Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Curve*, Vol 10, Math. Ann. (1876), 199–209.
- [5] B. Morin, *Formes canoniques des singularités d'une application différentiable*, Comptes Rendus Acad. Sci., Paris, vol. 260 (1965), 5662–56665 et 6503–6506.
- [6] F. Ronga, *Klein's paper on real flexes vindicated*, à paraître en 1977 dans *Singularities Symposium - Lojasiewicz 70*, editors : B. Jakubczyk, W. Pawlucki and J. Stasica, Banach Center Publications.
- [7] F. Schuh, *An equation of reality for real and imaginary plane curves with higher singularities*, Proc. section of sciences of the Royal Academy of Amsterdam, vol. 6 (1903–1904), 764–773.
- [8] F. Sottile, *Enumerative Geometry for real Varieties*, à paraître dans Proceedings of Symposia in Pure Math., Algebraic Geometry, Santa Cruz 1995.
- [9] R. Thom, *Stabilité structurelle et morphogénèse*, W.A. Benjamin Inc. (1972).
- [10] O. Ya. Viro, *Some integral calculus based on Euler characteristic*, in : Topology and Geometry – Rohlin Seminar, Vol. 1436, Springer Lecture Notes in Mathematics (1988), 127–138.
- [11] C.T.C. Wall, *Duality of real projective plane curves : Klein's equation*, Vol. 35, Topology (1996), 355–362.
- [12] H. Whitney, *On singularities of mappings of Euclidean spaces, I. Mappings of the plane into the plane*, Annals of Math. (2) 62 (1955), 374–410.