Le travail de bibliographie est très complet et chaque chapitre se termine par une section de notes commentant l'historique des résultats et les prolongements non étudiés dans le texte. Un regret cependant : celui que l'article de Takens, "Unfoldings of certain singularities of vecteur fields. Generalized Hopf bifurcations". J. D. E. 14 (1973) ne soit pas mentionné dans les références concernant les bifurcations de Hopf dégénérées.

En conclusion, ce livre présente une version synthétique très détaillée des résultats connus concernant l'étude des bifurcations locales des champs de vecteurs du plan. Tous ces résultats sont décrits avec la précision souhaitée et les preuves sont complètes. Malgré les quelques légers défauts et lacunes mentionnés ci-dessus, il sera une référence très utile aussi bien à l'étudiant désirant s'initier aux méthodes de base (variété centrale, forme normale) et aux bifurcations classiques (Hopf, selle-noeud) qu'au chercheur plus avancé ou à l'utilisateur de la théorie des bifurcations ayant besoin de renseignements précis concernant les diagrammes de bifurcations et les techniques nécessaires à leur obtention.

Robert Roussarie
Université de Bourgogne

Non Linear Infinite Dimensional systems
Viorel Barbu

Du titre du livre de Viorel Barbu on peut extraire en premier lieu le mot clef suivant "control". Cette théorie, avatar moderne du calcul des variations, date des années cinquantes; son développement a répondu à des questions technolgiques dont les plus stimulantes étaient liées à la préparation des vols spatiaux.

Dès cette époque un vocabulaire propre et une démarche mathématique standard ont été introduits bien sur, pour des problèmes dépendant d'un nombre fini de paramètres.

Pour les solutions observées on parle d'états et on les dénote y; le contrôle par lequel on agit sur le système se dénote u; on veut réaliser un objectif (mettre un satellite sur son orbite par exemple) en tenant compte de contraintes (domaine dans lequel on peut choisir le contrôle u), en évaluant la qualité du résultat et en minimisant un facteur coût (par exemple le temps qui aura été nécessaire à la réalisation de l'opération ou la quantité de carburant utilisée). Ceci se traduit par la minimisation d'une fonction, on parle souvent de fonctionnelle. $J(y,u)$. Ainsi l'exemple mathématique le plus simple consiste à chercher u^* tel que :

$$J(y,u^*) = \min J(y,u) \text{ sous la contrainte } F(y,u) = 0 \qquad (1)$$

Un calcul formel, fait en supposant l'existence et l'uncité de cette solution et en admettant que les fonctions sont, dans un sens convenable, dérivables conduit à *caractériser u^* par le système suivant :*

$$F(y^*, u^*) = 0, \quad (\partial_y F)^* p = \partial_u J(y^*, u^*), \quad (\partial_u F)^*(y^*, u^*)p = \partial_u J(y^*, u^*) \quad (2)$$

Ce système est dit système d'optimalité et p est appelé état adjoint.

Les systèmes d'évolution :

$$y'(t) = F(y, u), \quad y(t_0) = y_0, \quad (3)$$

avec contraintes et fonction coût :

$$J(t, T, u) = \int_{t_0}^{T} (g(y(t)) + h(u(t)))dt + \phi(y(T)) \quad (4)$$

(où le temps t apparait explicitement) correspondent souvent plus à l'intuition et réprésentent mieux les vrais problèmes physiques formulables de la manière suivante :

-1- Exacte atteignabilité : Déterminer les points Y qui peuvent être atteints en faisant varier le contrôle u et déterminer le temps minimum y arriver.

-2- Controlabilité optimale : Prouver l'existence d'un contrôle u^* qui minimise la fonctionnelle $J(t, T, u)$ sur les solutions de (3) satisfaisant les contraintes, caractériser cette solution à l'aide d'un état adjoint de manière à avoir de bonnes formules pour des calculs numériques.

-3- Expliciter la valeur de ce minimum, qui devient maintenant une fonction $\psi(t, T, y_0)$ dépendant donc de n variables d'espace, et d'une variable de temps, si la dimension du système est n.

-4- Montrer que le contrôle optimal peut sous de bonnes hypothèses obtenu comme une fonction locale de l'état. On parle alors de "feed back".

En dimension finie tous ces problèmes ont été systématiquement étudiés et on peut consulter, par exemple le livre de Fleming et Rishel "Deterministic and Stochastic Optimal Control", Springer Verlag 1975. En particulier on y verra que la fonction $\psi(t, T, y_0)$ est solution d'une équation aux dérivées partielles non linéaires du premier ordre dite équation d'Hamilton-Jacobi. Lorsque l'on cherche à prendre en compte des phénomènes aléatoires (bruit) dans l'équation d'évolution (3) on introduit dans l'équation d'Hamilton Jacobi un terme de diffusion. On trouvera une étude détaillée des propriétés mathématiques des équations d'Hamilton-Jacobi dans le livre de Pierre Louis Lions "Generalized solutions of Hamilton Jacobi Equations".On remarque en particulier qu'en l'absence de bruit cette équation n'admet que des solutions faibles. Pour caractériser parmi ces solutions faibles, la "bonne" Pierre Louis Lions et Mikle Crandall ont introduit la notion de solution de viscosité.

Les seconds mots-clefs du titre du livre de Viorel Barbu sont "Non linear Infinite Dimensionnal Systems". Ceci signifie que l'auteur se propose d'étendre à des systèmes de dimension infinie la problématique.

Il s'agit d'un programme de longue haleine initialisé par Jacques Louis Lions et auquel de nombreux mathématiciens y compris, pour une part importante Viorel Barbu, ont contribué.

Le terme non linéaire s'impose de manière naturelle ne serait ce que par le fait que les contraintes sont en général non linéaires, le cas le plus naturel consiste à imposer à la solution d'appartenir à un sous ensemble fermé convexe K d'un espace de Banach convenable.

L'ambition de Barbu est d'obtenir des résultats généraux valables pour une assez vaste classe de données, de conditions initiales ou de contraintes.

La démarche part de plusieurs observations élémentaires.

1- Si la fonction $x \to f(x)$ est monotone (croissante) sur $\mathbb{R}$ et vérifie la relation :

$$\lim_{x \to \infty} |f(x)| = +\infty \tag{5}$$

l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution. De plus les solutions de l'équation différentielle :

$$\dot{x}(t) + f(x(t)) = 0$$

sont uniformément stables c'est à dire que deux quelconques d'entre elles vérifient pour tout $t > 0$ la relation :

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(0) - x_2(0)| \tag{6}$$

2- Si A est une matrice $n \times n$ vérifiant la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad (Ax, x) \geq 0,$$

son spectre est contenu dans le demi plan $Rez < 0$ et, pour tout $\lambda > 0$, l'équation $\lambda u + Au = f$ admet toujours une unique solution. L'application $t \to exp - tA$ est analytique de $\mathbb{C}$ à valeur dans l'espace des opérateurs linéaires continus et pour t réel positif on a : $\|exp - tA\| \leq 1$. Cette application résoud l'équation différentielle :

$$u' + Au = 0, \quad u(0) = u_0.$$

3- Si j est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$, elle admet une dérivée à droite et à gauche en tout point et on peut introduire son gradient généralisé comme une fonction définie dans les parties de $\mathbb{R}$ par la formule :

$$A(x) = dj(x) = \{y / j'_g(x) \leq y \leq j'_d(x)\}$$

Ces remarques ont conduit à la notion d'opérateur monotone, défini sur un sous ensemble d'un espace de Banach, à valeur dans les parties du dual de celui-ci et caractérisé par les relations :

$$\forall (x_1, y_1 \in A(x_1)), \qquad (x_2, y_2 \in A(x_2)), \quad (y_2 - y_1, x_2 - x_1) \geq 0 \tag{7}$$

4-Tout convexe K peut être caractérisé par une fonction convexe généralisée définie en posant :

$$h_K(x) = 0 \quad \forall x \in K, \quad h_K(x) = \infty \quad \forall x \notin K \tag{8}$$

et l'unique minimum d'une fonction convexe sur un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ est un point x caractérisé par l'une des différentes relations suivantes :

$$x \in K, \quad j(n) \leq j(y) \, \forall y \in K, j(x) + h_k(x) \leq j(y) + h_K(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$
$$(dj(x), x - y) \leq 0 \; \forall y \in K, \quad (dj(x) + dh_K(x), x - y) \; \leq 0 \; \forall y \in \mathbb{R}^d \qquad (9)$$

Dans cette dernière relation il conviendra de définir dh_K comme un opérateur non borné.

Enfin à toute fonction convexe on peut associer sa transformée de Legendre définie par la relation :

$$j^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{(x, p) - j(x)\}.$$

L'application $j \to j^*$ est une involution dans l' espace des fonctions convexes.

Il se trouve que ces propriétés sont extrêment robustes vis-à-vis de généralisations à des fonctions ou des opérateurs définis sur les espaces de Banach de l'analyse classique. Ceci a conduit à l'élaboration de la théorie des opérateurs maximaux montones, des inéquations variationnelles, des semi groupes non linéaires de contraction et des équations différentielles accrétives. Il s'agit d'un long programme de recherche commencé dans les années 60 sous l'impulsion de Brézis, Kato, Crandall et autres...

L'auteur du livre y a apporté une contribution très importante. Ainsi après un chapitre d'introduction sur les espaces de Banach il consacre les chapitre 2, 3 et 4 à un exposé excellent de cette théorie.

Comme il s'agit souvent de problèmes non linéaires le recours à des espaces de Sobolev autres que ceux construits sur L^2 s'impose. Ceci est particulièrement frappant pour les équations du type :

$$\partial_t u - \epsilon \Delta u - \partial_x a(u) = 0 \qquad (10)$$

avec u désignant une fonction à valeur réelle. Dans ce cas des estimations uniformes (indépendantes de $\epsilon > 0$) dans l'espace des fonctions à variation bornée sont obtenues en utilisant les propriétés suivantes Pour toute fonction convexe j régulière on a :

$$\Delta j(u) \geq \Delta u j(u)$$

et, avec une définition convenable de la fonction sgn on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x^2(a(u)) sgn(\partial_x u) = 0 \qquad (11)$$

Des relations du type (11) s'apparentent au principe du maximum et seront essentielles pour faire rentrer dans la théorie générale des problèmes d'équations aux dérivées partielles et c'est pour cela que les très nombreux exemples *d'application donnés dans le livre sont presque tous scalaires et paraboliques ou elliptiques (ie justifiable d'un des nombreux avatars du principe du maximum).*

La caractérisation (8) d'appartenance à un convexe permet de formaliser les problèmes de contrôle elliptiques ou paraboliques sous la forme de la recherche d'une fonction de contrôle u qui minimise une fonctionelle du type :

$$L(y,u) + h_K(u) \text{ sous la contrainte } F(y,u) = 0 \tag{12}$$

On généralise (passer de la dimension finie à la dimension infinie) et on démontre complètement (utilisation de la convexité) la caractérisation du minimum introduite, sous des hypothèses convenables en dimension finie (équations (9) et(10)) et obtient le système d'optimalité :

$$F_y^*(y^*,u^*)p = L_y(y^*,u^*), \quad F_u^*(y^*,u^*)p - L_u(y^*,u^*) = \partial h_u(u^*) \tag{13}$$

Ces développement sont faits pour le cas stationnaire au chapitre 3, pour le cas d'évolution au chapitre 5 et de nombreux exemples sont donnés pour jusitifier le cadre abstrait proposé.

Pousuivant son analyse, l'auteur montre comment traiter les questions d'atteignabilité, de temps optimal et de contrôle optimal pour des équations d'évolutions de la forme :

$$y' + My = B(u), \quad y(0) = y_0. \tag{14}$$

avec M un opérateur maximal monotone. Il est intéressant de noter qu'avec un bon cadre fonctionnel il peut adapter tous les éléments de la théorie du contrôle en dimension finie. En particulier pour l'équation d'évolution :

$$y'(t) + A(y(t)) + \partial\phi(y) = B(u), y(0) = y \tag{15}$$

et la fonctionnelle :

$$J(y) = \int_0^T (g(y(t)) + h(u(t)))dt + \phi(y(T)) \tag{16}$$

il établit l'équation d'Hamilton Jacobi :

$$\partial_t\psi(t,y) - h^*(-B^*\nabla_x\psi(t,x)) - (Ay, \nabla_x\psi(t,y)) - \partial\phi(y) + g(y) = 0. \tag{17}$$

qui donnera le contrôle optimal.

Comme en dimension finie il convient d'introduire pour l'équation (17) une bonne notion de solution faible (solution de viscosité) dont on prouve selon Tataru, l'existence et l'unicité.

En guise de conclusion, on peut dire que ce livre est au carrefour de plusieurs domaines : L'analyse fonctionnelle, la théorie des équations aux dérivées partielles avec contraintes convexes et la théorie du contrôle de ces mêmes équations. Le fil directeur est l'ambition de généraliser à des problèmes en dimension infinie (équations aux dérivées partielles) des résultats classiques en dimension finie (système d'équations différentielles ordinaires).

Ainsi l'auteur a de bonne raisons d'inclure dans le livre une théorie très complète (j'ai par exemple omis de parler de l'exploration systématique des méthodes de perturbations qui sont à la fois utiles et instructives) que le lecteur découvrira avec plaisir (le livre est très bien rédigé) et intérêt (il s'agit d'un des éléments importants de l'analyse fonctionnelle moderne).

On peut cependant faire une critique : En atteignant un cadre abstrait général l'auteur, peut être sans s'en rendre compte, est obligé de restreindre la classe des problèmes considérés. L'abstraction conduit à une perte d'information et la vérification des hypothèses conduits inévitablement à des problèmes justifiables d'une forme ou d'une autre du principe du maximum c'est à des équations scalaires, elliptiques ou paraboliques. Il en résulte que les nombreux exemples qui illustrent très bien la théorie sont encore souvent très loin des vraies applications.

Par exemple le problème de la digue décrit page 139 est traité dans une modélisation bidimensionnelle et sans porosité partielle par une méthode élégante due à Baiocchi. Mais cette méthode n'a aucune chance de s'adapter à des situations plus réalistes. De même l'auteur présente le problème de Stefan biphasique (page 286) et dit qu'il va en traiter un modèle simplifié (bas de la page 286) la démarche est intéressante mais il n'y que peu de chances qu'elle apporte une solution au cas non simplifié qui est essentiellement vectoriel.

L'application des méthodes à l'équation des ondes conduit à introduire des perturbations, certes non linéaires, mais préservant la monotonie, (§ 4.3.5) qui ne semblent pas avoir d'applications et qui n'ont rien à voir avec les préoccupations des ingénieurs qui étudient des problèmes d'ondes.

Le choix fait de privilégier l'analyse fonctionnelle se traduit aussi dans les commentaires et la bibliographie. Aucun ouvrage sur les problèmes en dimension finie n'est cité pas même le livre fondamental de Fleming et Rishel que j'ai évoqué en introduction, les noms de Pontryagin et Kalman n'apparaissent pas dans la bibliographie. Tout cela pourrait laisser un lecteur naif croire que la théorie du contrôle commence avec l'analyse fonctionnelle et se réduit aux problèmes décrits par les équations figurant dans ce livre

Cette série de critiques n'aurait pas lieu d'être si l'auteur avait proposé pour son livre un titre moins ambitieux et plus explicite comme celui ci : "Functionnal Analysis : application to control of elliptic and parabolic non linear scalar equations"

Claude Bardos
Université Paris 7