SUR LES TRAVAUX DE JEAN CERF

Adrien Douady

1. Topologie topologique et topologie différentielle

A priori, il est raisonnable d'imaginer qu'on peut, pour tout n, déformer tout homéomorphisme (resp. tout difféomorphisme) de S^n en une isométrie par un chemin continu[†] parmi les homéomorphismes (resp. les difféomorphismes), ce chemin dépendant continûment[†] de l'application de départ. Autrement dit que $\text{Homéo}(S^n)$ (resp. $\text{Diff}(S^n)$) se rétracte par déformation sur O_{n+1}, ce qu'on appellera *conjecture* $\mathcal{H}$ (resp. *conjecture* $\mathcal{D}$).

Pour $n = 2$, cela peut effectivement se faire en utilisant le théorème d'intégrabilité de Morey-Ahlfors-Bers (MRMT ou "Measurable Riemann Mapping Theorem"). Si f est un difféomorphisme, on considère les ellipses infinitésimales $E(x)$ qui sont transformées par f en des cercles. Au temps t on munit la sphère de départ d'un champ d'ellipses infinitésimales E_t : $E_t(x)$ a même direction d'axes que $E(x)$, mais le rapport des axes varie avec t et devient 1 quand $t = 1$. On peut alors trouver un difféomorphisme f_t qui transforme les ellipses infinitésimales de E_t en des cercles, et qui coïncide avec f en trois points donnés. Cette méthode marche pour les applications quasi-conformes, et on peut l'adapter aux homéomorphismes. En dimension 3 ou plus, on ne dispose pas du MRMT, et tous les efforts des analystes pour trouver un substitut se soldent par un échec : à chaque fois, on obtient des solutions qui deviennent singulières en temps fini.

Le cas $n = 2$ est une des premières choses que Cerf ait faites, histoire de se faire la main dans sa jeunesse. Il étudiait alors un article (connu pour être erroné) publié par Jacques Feldbau en 1943 sous le nom de Jacques Laboureur. Feldbau croyait avoir démontré la conjecture $\mathcal{H}$ pour tout n. On sait aujourd'hui que les conjectures $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}$ sont toutes les deux fausses pour $n \geq 5$; le cas $n = 4$ reste ouvert.

En 1956, Milnor fait sensation en exhibant une "sphère exotique" de dimension 7. Il s'agit d'une variété $\mathcal{C}^\infty$ homéomorphe mais non difféomorphe à S^7, obtenue en recollant deux copies de la boule D^7 par

[†] La continuité est relative à la topologie $\mathcal{C}^0$ dans le cas des homéomorphismes, et $\mathcal{C}^\infty$ dans le cas des difféomorphismes.

un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^-(S^6)$ qui bien entendu ne doit pas être isotope aux symétries ; ceci infirme la conjecture $\mathcal{D}$ pour $n = 6$.

Cet exemple incite Cerf à se tourner vers la topologie différentielle dont il deviendra l'un des fondateurs. En 1957, Cerf et Smale travaillent, chacun de son côté, sur Diff S^3. Lorsqu'ils se rencontrent en 1958 au Congrès d'Edimbourg, ils croient tous deux avoir prouvé la conjecture $\mathcal{D}$ pour $n = 3$. Mais Cerf s'aperçoit bientôt que sa méthode, fondée sur le théorème récent de Moïse permettant l'approximation des homéomorphismes des variétés triangulées de dimension 3 par des homéomorphismes PL†, ne donne en fait que l'implication :

$$\mathrm{Diff}\ S^3 \simeq O_4 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Homéo}\ S^3 \simeq O_4 .$$

Comme sur ces entrefaites Arnold Shapiro trouve dans le papier (non publié) de Smale un trou apparemment irrémédiable, Cerf dans sa thèse (1960) doit se contenter d'énoncer que, pour S^3, la “conjecture de Smale” $\mathcal{D}$ implique “la conjecture de Feldbau” $\mathcal{H}$. Insatisfait, Cerf cherche à comprendre quelles relations lient (indépendamment de la conjecture de Smale) les groupes d'homotopie de Diff S^3 et de Homéo S^3. En 1962, il obtient ainsi le résultat inattendu

$$\pi_{i+3}(\mathrm{Homéo}\ S^3, O_4) \simeq \pi_i(\mathrm{Diff}\ S^3, O_4)$$

et la démonstration le conduit à conjecturer

$$\pi_{i+n}(\mathrm{Homéo}\ S^n, O_{n+1}) \simeq \pi_i(\mathrm{Diff}\ S^n, O_{n+1}) .$$

On peut donner de cette conjecture une formulation PL (et semi-simplicial), dans laquelle au lieu de Homéo S^n, on considère les homéomorphismes linéaires par morceaux d'une triangulation de Whitehead‡ de S^n. Cette version a été démontrée pour tout n par Morlet dans son cours Peccot de 1969. La version topologique ci-dessus a été

† Une application PL entre complexes simpliciaux finis est une application continue qui est linéaire (affine) sur chaque simplexe d'une subdivision linéaire convenable de la source. Le terme PL vient de l'anglais “piecewise linear” ; en français on dit “linéaire par morceaux”.

‡ J.H.C. Whitehead a démontré que toute variété V de classe $\mathcal{C}^\infty$ admet une triangulation par un complexe simplicial telle que le plongement de chaque simplexe dans V soit $\mathcal{C}^\infty$ et *non-singulier*. Le cas de S^n est trivial, car la projection radiale sur S^n de la frontière d'un polyèdre convexe contenant l'origine de R^{n+1} dans son intérieur donne toujours une triangulation de Whitehead. Les triangulations de Whitehead de V sont en outre toutes équivalentes entre elles au meilleur sens possible : deux quelconques d'entre elles admettent des subdivisions linéaires liées par

démontrée pour $n \neq 4$ par Siebenmann en 1970.† Conséquence : *Soit* $n \neq 4$ *; si la conjecture* $\mathcal{D}$ *est fausse pour* n *(en particulier si* $\Gamma_{n+1} \neq 0$ *; voir plus loin), alors la conjecture* $\mathcal{H}$ *est elle aussi fausse pour* n.

Cerf démontre par la suite deux théorèmes très importants, appelons-les théorème jaune et théorème bleu (couleur de la couverture du mémoire). Le théorème jaune est :

$$\pi_0 \, \mathrm{Diff}^+ S^3 = 0 \, .$$

Autrement dit, *tout difféomorphisme de* S^3 *préservant l'orientation est isotope à l'identité.*

Le théorème jaune peut aussi s'énoncer $\pi_0 \, \mathrm{Diff}^+ D^3 = 0$, forme sous laquelle il peut se génaraliser. En effet, un cas particulier du théorème bleu est : π_0 $\mathrm{Diff}^+ D^n = 0$ *pour* $n \geq 6$, Nous en donnerons plus loin l'énoncé complet.

2. Les Γ_n et le lissage des variétés combinatoires

Etant donné un difféomorphisme $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$, en recollant 2 copies de la boule D^n au moyen de f on obtient une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui est toujours homéomorphe à S^n et que j'appellerai "*sphère biboule*" définie par f ; cette sphère biboule est difféomorphe à S^n si et seulement si f s'étend en un difféomorphisme de D^n. Ceci amène à considérer le groupe $\Gamma_n = \mathrm{Diff} \; S^{n-1} / \rho \mathrm{Diff} \; D^n$, où ρ est la restriction au bord. Le groupe Γ_n est un quotient de $\pi_0 \, \mathrm{Diff}^+ S^{n-1}$. Il s'identifie à l'ensemble des classes à difféomorphisme près des sphères biboules de dimension n.

Milnor obtient $\Gamma_7 = Z/28$, ce qui signifie comme on le verra qu'il y a 28 classes à difféomorphisme près de variétés homéomorphes à S^7.

Entre 1958 et 1961, Milnor et Kervaire obtiennent beaucoup de résultats sur les groupes Γ_n : tous les Γ_n (pour $n \neq 4$) sont des groupes commutatifs finis, qu'on peut plus ou moins calculer à partir des groupes d'homotopie stable $\pi_{N+k} S^N$. La finitude résulte de la finitude de ces derniers, établie par J.-P. Serre dans sa thèse. On a $\Gamma_n = 0$ pour $n = 1$, 2, 3, 5, 6. Il manquait Γ_4, et c'est sous la forme faible $\Gamma_4 = 0$ que le théorème jaune est devenu célèbre.

---

une isotopie qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur chaque simplexe. On dit qu'elles définissent la structure PL (ou combinatoire) sous-jacente à la structure différentiable de V.

† Une bibliographie sur le sujet se trouve dans le livre de Kirby et Siebenmann, "Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and triangulations".

La théorie dite de Thom-Munkres (à l'élaboration de laquelle beaucoup d'autres ont contribué : Whitehead, Cairns, Hirsch, Mazur, Lashof-Rothenberg...) montre que les obstructions au lissage d'une variété combinatoire† compacte V de dimension n se trouvent dans les groupes de cohomologie de V à coefficients dans les Γ_i, $i < n$. De la finitude de tous les Γ_i résulte, via cette théorie, qu'à difféomorphisme près il ne peut exister sur V qu'un nombre fini de structures différentiables compatibles avec la structure combinatoire. De la nullité de Γ_i pour $i \leq 6$ résulte que, si $n \leq 7$, V peut être muni d'une structure différentiable, unique si $n \leq 6$.

La dimension 4 apparaît donc comme une "petite dimension" comme les autres lorsqu'on compare les variétés *combinatoires* aux variétés *différentiables*. Freedman, Donaldson, et d'autres, nous ont appris au cours des années 80 qu'il en va tout autrement lorsqu'en dimension 4 on compare les variétés *topologiques* aux variétés différentiables. On sait aujourd'hui qu'il y a en dimension 4 des variétés topologiques compactes sans bord, simplement connexes, qui admettent une infinité de structures différentiables distinctes.‡ Grâce à la théorie de Thom-Munkres, et à $\Gamma_4 = 0$, nous savons que ces structures sont toutes *combinatoirement distinctes*, et constituent donc autant de contre-exemples de dimension 4 à la "Hauptvermutung", déjà démolie en 1969 par Kirby et Siebenmann pour les variétés de dimension ≥ 5.

Un défi soulevé par cette théorie de lissage des 4-variétés combinatoires auquel Cerf a contribué reste d'actualité : *trouver pour tous les invariants de Donaldson, Witten etc. de bonnes définitions combinatoires.*

3. Contexte : l'hypothèse de Poincaré

Poincaré a conjecturé que toute 3-variété fermée C^∞ simplement connexe — donc ayant le type d'homotopie de S^3 — est difféomorphe à S^3. On s'est ensuite posé la même question pour tout n.

---

† Une $n-$variété combinatoire (ou PL) à bord est un complexe simplicial dont chaque point admet un voisinage qui est PL-homéomorphe à un n-simplexe linéaire.

‡ Il y a aussi des R^4 exotiques, c'est-à-dire des variétés homéomorphes à R^4 mais non difféomorphes à R^4 ; il y en a même une infinité non dénombrable (Gompf, Taubes). Alors que pour $n \neq 4$, toute variété homéomorphe à R^n est difféomorphe à R^n. La dimension 4 joue un rôle si particulier que c'en est à se demander si ce n'est pas pour ça que le bon Dieu nous fait vivre dans un espace-temps de dimension 4.

Afin de faire le point, donnons un peu de terminologie. On appelle

— "S^n homotopique" une variété $\mathcal{C}^\infty$ orientée ayant le type d'homotopie de S^n.

— "S^n topologique" une variété $\mathcal{C}^\infty$ orientée homéomorphe à S^n.

— "S^n biboule" une variété $\mathcal{C}^\infty$ orientée obtenue en recollant deux exemplaires de D^n par un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^- S^{n-1}$. Il est facile de voir que la structure combinatoire sous-jacente d'une sphère biboule est la structure PL standard ; et il s'agit même là d'une caractérisation des sphères biboules (Whitehead, Cairns, Hirsch).

— "S^n $\mathcal{C}^\infty$" une variété $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphe à S^n.

Cas $n = 3$.

On sait que S^3 topologique $\Rightarrow$ S^3 $\mathcal{C}^\infty$ (Moïse, Cairns). Ce qu'on considère aujourd'hui comme l'hypothèse de Poincaré est S^3 homotopique $\Rightarrow S^3$ topologique. Poénaru a établi depuis longtemps un vaste programme pour la démonstration. En suivant ce programme il a écrit un texte qui sort de l'ordinaire par ses dimensions. Il se trouve des topologues (pas assez !) pour lire ses papiers à mesure qu'ils paraissent.

Cas $n = 4$.

— S^4 homotopique $\Rightarrow S^4$ topologique (Freedman).

— La question S^4 topologique $\overset{?}{\Longrightarrow} S^4$ biboule est ouverte, et on n'a pour le moment aucune voie d'attaque. On peut formuler la question autrement : y a-t-il sur la variété topologique S^4 une structure combinatoire unique ? Sous cette forme, la question apparaît comme l'ultime refuge de la "Hauptvermutung".

— On a S^4 biboule $\Rightarrow S^4$ $\mathcal{C}^\infty$ par le théorème jaune de Cerf.

Cas $n \geq 5$.

— S^n homotopique $\Rightarrow$ S^n biboule. C'est une conséquence de la théorie du h-cobordisme de Smale, du moins pour $n \geq 6$ (voir plus loin). Pour $n = 5$, il a fallu en plus la "chirurgie" de Kervaire-Milnor qui prouve que toute S^5 homotopique borde un D^6 homotopique.

— On a S^n biboule $\Rightarrow S^n$ $\mathcal{C}^\infty$ pour $n = 5$ et 6 seulement. En général, Γ_n donne la classification $\mathcal{C}^\infty$ des S^n biboules.

4. Principe de démonstration du théorème jaune,

ou comment mettre un paramètre dans un théorème d'Alexander (1924)

Le théorème d'Alexander, connu sous le nom de "Schoenflies pour S^2", dit que *toute S^2 $\mathcal{C}^\infty$ plongée $\mathcal{C}^\infty$ dans R^3 borde une boule D^3 $\mathcal{C}^\infty$.*

Autrement dit, en notant Σ_2 l'espace des S^2 $\mathcal{C}^\infty$ de R^3 et $\mathrm{Pl}^+(D^3, R^3)$ l'espace des plongements $\mathcal{C}^\infty$ d'orientation positive de D^3 dans R^3, l'application $\delta : f \mapsto f(S^2)$ de $\mathrm{Pl}^+(D^3; R^3) \to \Sigma_2$ est surjective. Il est facile de voir que $\mathrm{Pl}^+(D^n; R^n)$ est connexe quel que soit l'entier n (lemme dit de Palais-Cerf). Il résulte donc du théorème d'Alexander que

$$\pi_0 \Sigma_2 = 0\,.$$

Inversement, la connexité de Σ_2 entraîne la surjectivité de l'application δ, car celle-ci a la propriété de relèvement des chemins (c'est en fait une fibration localement triviale). Ainsi $\pi_0\Sigma_2 = 0$ équivaut au théorème d'Alexander.

On montre facilement, en utilisant le fait que $\mathrm{Diff}^+ S^2$ se rétracte sur SO_3, que $\pi_0 \mathrm{Diff}^+ S^3 = \pi_0 \mathrm{Diff}^+ D^3$.

Etant donné un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^+ D^3$, on lui associe un lacet γ_f dans Σ_2 de la façon suivante. Pour $r \leq r_0$ assez petit, $f\left(S^2_r\right)$ est convexe. On prend γ_f raccordant S^2 à $f\left(S^2_{r_0}\right)$ par des sphères convexes pendant l'intervalle de temps $[0, r_0]$, et on prend $\gamma_f(t) = f\left(S^2_t\right)$ pour $t \in [r_0, 1]$. On obtient ainsi une application

$$\pi_0 \mathrm{Diff}^+ D_3 \to \pi_1 \Sigma_2$$

et il est facile de voir que c'est une bijection. Cerf ramène ainsi le théorème jaune à

$$\pi_1 \Sigma_2 = 0\,.$$

Le problème d'Alexander est de *"remplir"* une S^2 $\mathcal{C}^\infty$ (notée X) par un D^3 $\mathcal{C}^\infty$; nous indiquons une preuve utile pour la suite. Soit Σ_2^0 l'ensemble des X qui sont plongés de façon *"générique pour la hauteur"*, ce qui signifie que la restriction à X de la fonction hauteur $(x, y, z) \mapsto z$ est une fonction de Morse, i.e. n'a que des points critiques non dégénérés, avec valeurs critiques distinctes. On peut supposer $X \in \Sigma_2^0$ car, d'après un théorème de Morse, Σ_2^0 est un ouvert dense de Σ_2. On prouve successivement que X borde une boule si le nombre α de points critiques d'indice 1 (cols) est 0 ou 1. Ensuite on peut supposer $\alpha \geq 2$ et considérer le plus petit nombre β de cercles d'une section plane $z = t$ non-critique où t sépare deux niveaux critiques d'indice 1. Le couple (α, β) sera la "complexité" de X, qu'on munit de l'ordre lexicographique pour une démonstration par récurrence. Coupant X par un tel plan horizontal, on trouve une famille de $\beta \geq 1$ cercles, et en étranglant un cercle qui est minimal dans son plan, on décompose X en deux S^2 $\mathcal{C}^\infty$ plongées X_1 et X_2 de moindre complexité, d'où des paramétrages par D^3 de X_1^{rempli} et de X_2^{rempli} ; lesquelles donnent facilement (par "recollement" ou "différence") un paramétrage de X^{rempli}.

Pour démontrer le théorème jaune, Cerf construit une section continue du revêtement universel $\mathcal{R}$ de Σ_2, qui est l'espace des "classes de paramétrages par D^3 à isotopie près". On ne peut plus se borner aux X qui sont génériques pour la hauteur. Il faut en plus considérer l'ensemble Σ_2^1 des X dont la fonction hauteur est générique à ceci près qu'elle a exactement *un* accident, qui est :

— soit l'existence d'une "croupe", c'est-à-dire d'un point critique du type présenté à l'origine par la fonction $-x^2 + y^3$;

— soit l'égalité des valeurs prises par la fonction en deux points critiques.

L'ensemble Σ_2^1 est de codimension 1 dans Σ_2 : il possède localement des voisinages tubulaires dont les fibres sont homéomorphes à l'intervalle. Le long d'une telle fibre (ou plus généralement de tout chemin qui traverse Σ_2^1) se produit soit l'apparition (ou la disparition) d'un couple de points critiques, soit le croisement de deux valeurs critiques.

L'ensemble résiduel $\Sigma_2 - (\Sigma_2^0 \cup \Sigma_2^1)$, contrairement à $\Sigma_2 - \Sigma_2^0$, est génériquement évité par les chemins de Σ_2, de sorte que toute section *continue* de $\mathcal{R}$ au-dessus de $\Sigma_2^0 \cup \Sigma_2^1$ se prolonge par continuité à tout Σ_2.

Une section continue au-dessus de $\Sigma_2^0 \cup \Sigma_2^1$ se construit par récurrence sur une complexité, en mettant à profit l'"addition" associative que le procédé d'Alexander de recollement ou différence permet de définir sur $\mathcal{R}$. Sur la composante $\alpha = 0$ de Σ_2^0 il convient d'utiliser partout un paramétrage par D^3 qui envoie chaque section horizontale sur une section horizontale, ce qui détermine sa classe d'isotopie (corollaire de $\mathcal{D}$ pour $n = 2$).

Ayant conçu ce plan d'attaque, Jean Cerf était très confiant d'aboutir. Pourtant, les détails sont ardus...

Démonstrations ultérieures de $\Gamma_4 = 0$. Des preuves un peu plus simples mais "ne sortant pas de la famille" peuvent être extraites de celle du théorème de Laudenbach et Blank (1979) sur les 1-formes fermées non singulières des variétés de dimension 3, ainsi que de la preuve par Hatcher de la conjecture de Smale.

En 1991, Y. Eliashberg donne une preuve de $\Gamma_4 = 0$ qui est radicalement différente; elle est aussi la première preuve "directe", en ce sens que le résultat n'apparaît pas comme un corollaire de $\pi_0 \operatorname{Diff} S^3 = 0$. Eliashberg montre d'abord que tout difféomorphisme d'orientation positive de S^3 est isotope à un difféomorphisme conservant la structure de contact standard; pour prolonger un tel difféomorphisme à D^4, il utilise la méthode de "remplissage par des disques holomorphes", dont l'origine remonte à Gromov (1985).

5. Le théorème bleu

Revenons sur la différence entre $\pi_0 \operatorname{Diff} S^n$ et Γ_{n+1}. Le groupe $\pi_0 \operatorname{Diff} S^n$ est l'ensemble des classes d'isotopie de difféomorphismes $f : S^n \to S^n$. Le groupe Γ_n est le quotient de Diff S^n par la relation de pseudo-isotopie : on dit que f_0 et f_1 sont *pseudo-isotopes* s'il existe un difféomorphisme F de $S^n \times [0,1]$ sur lui-même tel que $F(x,0) = \big(f_0(x), 0\big)$ et $F(x,1) = \big(f_1(x), 1\big)$. La relation d'isotopie est plus forte : elle exige que $F(x,t)$ soit de la forme $\big(f_t(x), t\big)$ pour tout $t \in [0,1]$.

Les notions d'isotopie et de pseudo-isotopie peuvent bien sûr se définir en remplaçant S^n par une variété différentiable M quelconque. L'énoncé du théorème bleu est le suivant :

Théorème. *Soit M une variété, sans bord, compacte, simplement connexe, et de dimension $n \geq 5$. Si deux difféomorphismes f_0 et f_1 de M sont pseudo-isotopes, ils sont isotopes.*

Mieux, toute pseudo-isotopie peut être connectée parmi les pseudo-isotopies à une véritable isotopie.

Corollaire. *Pour $n \geq 5$, $\pi_0 \operatorname{Diff} S^n = \Gamma_{n+1}$ et $\pi_1 \operatorname{Diff} S^n$ est une extension de Γ_{n+2}.*

De ceci résulte en particulier, compte tenu du théorème de Milnor "$\Gamma_7 \neq 0$", que *la conjecture $\mathcal{D}$ est fausse pour $n = 5$ au niveau du π_1.*

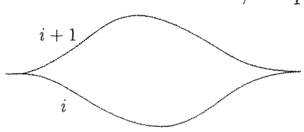
Le théorème bleu est une généralisation à 1 paramètre du théorème de h-cobordisme de Smale (comme le théorème jaune en est une du théorème d'Alexander pour S^2).

Nous avons vu le théorème de h-cobordisme intervenir pour montrer que toute S^n homotopique est biboule; un autre corollaire en est "Schoenflies pour S^n" : toute $S^n \mathcal{C}^\infty$ de R^{n+1} borde une $D^{n+1} \mathcal{C}^\infty$. Le précédent du théorème jaune a donc conduit tout naturellement Cerf à "mettre un paramètre" dans une forme appropriée du théorème de Smale. Rappelons l'énoncé de Smale :

Théorème de h-cobordisme. *Soit W une variété différentiable à bord, compacte, de dimension $n+1 \geq 6$. On suppose que le bord de W est réunion disjointe de deux variétés M_0 et M_1 simplement connexes, et que W se rétracte par déformation sur M_0 et sur M_1. Alors W est difféomorphe à $M_0 \times [0,1]$.*

On peut énoncer autrement la conclusion de ce théorème : il existe une fonction $h : W \to [0,1]$ telle que $h = 0$ sur M_0 et $h = 1$ sur M_1, qui soit sans point critique (autrement dit h est une submersion). C'est strictement équivalent, l'intérêt réside dans la forme que prend alors la démonstration (calquée sur celle de Smale). On part d'une fonction de Morse h vérifiant les conditions ci-dessus sauf celle d'être une submersion, puis on déforme h en une submersion en lui faisant décrire un chemin générique, c'est-à-dire comportant un nombre fini d'accidents : apparition (ou disparition) d'un couple de points critiques ou croisement de 2 valeurs critiques.

Cerf, qui tenait de Thom cette façon de voir la théorie de Smale, et qui en avait mis au point les détails, n'eut aucune peine à mettre la conclusion du théorème bleu sous la forme "fonctionnelle" suivante : l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions $h : M \times [0,1] \to [0,1]$ qui sont des submersions avec $h(x,0) = 0$ et $h(x,1) = 1$, est connexe. Notons que $\mathcal{E}$ n'est pas vide, car $h_0 : (x,z) \mapsto z$ en est un élément. Tout $h \in \mathcal{E}$ peut être raccordé à h_0 par un chemin $(h_t)_{t\in[0,1]}$ dans l'espace $\mathcal{F}$ des fonctions $h : M \times [0,1] \to [0,1]$ qui sont C^∞ avec $h(x,0) = 0$ et $h(x,1) = 1$ (mais sans condition de submersion), puisque $\mathcal{F}$ est un espace affine; il faut voir qu'on peut déformer ce chemin, sans bouger ses extrémités, en un chemin qui reste dans $\mathcal{E}$. Le chemin (h_t) peut être choisi générique, donc tel en particulier que $h_t : M \times [0,1] \to [0,1]$ soit une fonction de Morse sauf pour un nombre fini de valeurs de t. On peut associer au chemin (h_t) son *graphe de Cerf* : c'est l'ensemble G des couples (t,u) tels que u soit une valeur critique de h_t. Le graphe G est réunion d'un nombre fini d'arcs allant d'un "point de naissance" à un "point de mort" ; chacun de ces arcs est le graphe d'une fonction définie sur un intervalle, et il peut être affecté d'un indice, qui est celui du point critique correspondant. La technique de Cerf consiste à déformer le chemin (h_t) par une suite de modifications élémentaires, de façon à simplifier progressivement le graphe G jusqu'à ce qu'il soit vide, auquel cas le chemin correspondant restera dans $\mathcal{E}$. La première chose à faire est de dresser la liste des modifications élémentaires qui sont permises, compte tenu des indices des arcs concernés. C'est ce qu'on appelle les lemmes géométriques de Cerf (triangle, bec, œil, queue d'aronde, ...). Par exemple, le lemme de l'œil dit que si le graphe a la forme d'un œil, on peut le faire disparaître :



Cerf appelle ce lemme "lemme d'unicité des morts" ; c'est une généralisation à 1 paramètre du "cancellation lemma" de Smale.

Ceci fait, on commence par déformer le chemin de façon qu'il n'y ait que des points critiques d'indice $[\frac{n}{2}]$ ou $[\frac{n}{2}]+1$; c'est assez facile, il s'agit de la marche d'approche. La partie centrale de la démonstration consiste à modifier le chemin de façon à amener le graphe à être une réunion d'"yeux" disjoints. La difficulté est ici de nature algébrique; Cerf la résoud par un calcul assez délicat, dont le résultat peut se traduire en termes de K-théorie algébrique[†] En fait c'est la théorie de la pseudo-isotopie qui est à l'origine du développement, à la fin des années 60, de la K-théorie algébrique, jusque là limitée aux seuls K_0 et K_1.

6. Miscellanées

Après le livre bleu, Cerf est retourné s'attaquer à la *"conjecture de Smale"*; le théorème jaune équivaut à la simple connexité de l'espace Σ_2 des 2-sphères de R^3, il s'agit cette fois de prouver l'acyclicité de Σ_2. La difficulté est de taille, car la classification des singularités des familles génériques à k paramètres de fonctions réelles n'est connue que pour les petites valeurs de k. (Pour le théorème jaune comme pour le théorème bleu, $k = 2$ suffit). Il fallait donc trouver une méthode permettant d'éviter tout recours à ces singularités, et c'est Hatcher qui devait emporter le morceau. Cerf en a certes été contrarié, mais il n'en a pas conçu d'amertume. Je crois que chez lui la satisfaction de voir que le résultat était acquis, et par les voies qu'il avait ouvertes, l'a depuis longtemps emporté sur la vexation que ce ne soit pas lui.

Il faut dire que Cerf n'a jamais cherché le rendement en matière de publication. L'attitude qu'on est un peu obligé d'encourager chez nos étudiants, qui consiste quand on réfléchit à une question à se demander "est-ce que je pourrai en tirer un papier? ", lui est complètement étrangère. Il n'est pas de ceux qui alignent des listes de publications de plusieurs centaines de titres. Pourtant nombre de ceux qui sont ici peuvent témoigner de l'influence qu'il a eue sur eux. Beaucoup se sont servis des outils qu'il a créés. Quand à lui, il reconnaît volontiers l'influence de Cartan, mais aussi de Thom. Entre autres pour lui avoir dit : *"ne fais pas ce que tu sais faire, fais ce que tu as envie de faire"*.

Depuis quelques années, il s'intéresse à un sujet auquel il est le seul à croire, avec Shih Wei Shu et son étudiant Lalonde. Il s'agit de l'homologie

[†] Il s'agit de l'annulation du groupe Wh_2 du groupe trivial. Ici $\mathrm{Wh}_2(G)$, ou deuxième groupe de Whitehead d'un groupe G, est un quotient de $K_2(Z[G])$ qui intervient clairement dans la version non-simplement connexe du théorème bleu élaborée ultérieurement par Hatcher-Wagoner et Igusa. $\mathrm{Wh}_2(\pi_1 M)$ contient l'obstruction primaire (entre deux) à déformer une pseudo-isotopie sur M en isotopie. Ensuite, Waldhausen a su introduire de nouveaux foncteurs donnant une vision homotopique et globale de l'espace (stable) des pseudo-isotopies.

définie à partir de simplexes plongés. Lalonde a démontré que, pour une variété différentiable de dimension n, les simplexes différentiablement plongés donnent, en degré $< n$, les mêmes groupes que l'homologie usuelle.

Cerf cherche à comprendre ce qui se passe quand on enlève les hypothèses de différentiabilité. Cette étude est délicate, et Cerf a le sentiment de travailler sur un bon matériau. Dans ces cas-là, on peut s'attendre à ce qu'un jour, ça devienne le point crucial pour un développement inattendu.

SOUVENIRS STRASBOURGEOIS

René Thom

Cher Jean

A l'occasion de cette rencontre qui t'est dédiée j'aimerais évoquer quelques souvenirs qui me sont chers. Parvenu à l'âge qui est le mien, on ne peut guère éviter d'être ce que les Classiques appelaient un "laudator temporis acti". J'aimerais saisir cette occasion pour évoquer un peu de l'ambiance intellectuelle qui régnait à Strasbourg lors de l'immédiat après-guerre, époque où je fis ta connaissance. La circonstance, je sais que tu ne l'as pas oubliée.

Sorti de la Rue d'Ulm en l'été 1946, j'avais suivi mon maître d'alors, Henri Cartan, à Strasbourg. Pour améliorer un peu mon traitement de stagiaire au C.N.R.S., les collègues mathématiciens m'avaient procuré quelques travaux rémunérés. Ce furent d'abord des "colles" à la taupe du Lycée Kléber, c'est là que j'eus une première impression de tes capacités mathématiques. Plus tard, le directeur de l'Institut de Mathématique, Georges Cerf, ton père, me procura un service de "moniteur", on dirait maintenant des travaux dirigés. Ainsi nanti, je pouvais me consacrer à la recherche...

L'ambiance de l'Institut était alors très stimulante. Contrairement à Paris, où le nouveau venu est toujours un peu perdu, je ne tardai pas à trouver à Strasbourg un groupe de jeunes mathématiciens dans la force de l'âge, qui pouvaient m'initier rapidement aux développements les plus récents de la Science d'alors.

Disons d'abord que la mixité culturelle de la ville de Strasbourg me plaisait. J'y retrouvais une certaine tradition issue de mes origines