COMPTES RENDUS

Theory of Algebraic Invariants
David Hilbert

The Algebraic Theory of Modular Systems
F. S. Macaulay

Cambridge University Press 1993

Ces deux ouvrages sont publiés par Cambridge University Press dans une nouvelle collection intitulée "Cambridge Mathematical Library", dont le but est de proposer aux mathématiciens des textes classiques à un prix abordable.

David Hilbert donna en 1897 à l'Université de Göttingen un cours d'introduction à la théorie des invariants algébriques, cours conservé sous forme de notes manuscrites prises par son élève Sophus Marxsen. "Theory of Algebraic Invariants" est la traduction anglaise de ces notes.

Le cours, constitué de 51 leçons assez brèves, présente deux parties. Dans la première, Hilbert introduit les notions d'invariants et de covariants : considérons $V = \mathbb{C}^n$, et soit S l'algèbre des fonctions polynomiales sur V. Alors le groupe linéaire $Gl_n(\mathbb{C})$ opère à gauche sur V, et à droite sur S. Il opère donc à gauche sur l'espace des fonctions polynomiales sur S (resp. sur $S \times V^*$). Un invariant (resp. un covariant) d'ordre δ est une fonction polynomiale I sur S (resp. $S \times V^*$) telle que pour tout élément g du groupe linéaire, on ait $g \cdot I = \det(g)^\delta I$. En fait, Hilbert considère essentiellement le cas $n = 2$ pour les besoins de l'exposé. Par une étude fine de l'action de l'algèbre de Lie de Gl_n, il donne une description explicite de l'espace vectoriel des covariants et des invariants d'ordre δ. La deuxième partie est consacrée essentiellement au "théorème de finitude" : l'algèbre des invariants est de type fini. Il s'agit d'une conjecture de Cayley, qui avait été démontrée par Gordan lorsque $n = 2$. Hilbert en donne une nouvelle démonstration, généralisable à n quelconque; elle repose sur le "théorème de la base de Hilbert", qui affirme essentiellement que l'algèbre des polynomes en n variables est noethérienne, et sur l'usage des opérateurs de Reynolds. Le cours s'achève sur des applications géométriques de la théorie des invariants algébriques. On y voit déjà apparaître, dans le contexte particulier des courbes du plan projectif, la notion de semi-stabilité au sens de Mumford.

La question fondamentale de la théorie des invariants algébriques est le problème de finitude : étant donné un espace vectoriel de dimension finie V sur lequel un groupe algébrique affine G opère linéairement, la partie G-invariante de l'algèbre symétrique de V est-elle une algèbre de type fini? C'est le $14^{\text{ème}}$ problème de Hilbert. La question avait déja été examinée dans certains cas par Cayley et Gordan entre autres. La démonstration de Hilbert mentionnée ci-dessus apportait une réponse positive lorsque le groupe

G est réductif. Après les résultats de Hilbert, la question resta en suspens jusqu'aux travaux de Hermann Weyl, qui vers 1939 détailla la théorie des invariants algébriques pour les groupes de Lie classiques. M. Nagata donna enfin en 1959 un exemple de groupe non réductif qui admet une représentation V pour laquelle l'algèbre des invariants n'est pas de type fini, et V. L. Popov montra en 1979 que pour tout groupe algébrique affine non réductif, il existe une telle représentation.

Ces travaux de Hilbert ont joué un rôle crucial en géométrie algébrique, puisqu'ils sont à l'origine de la théorie des invariants géométriques de D. Mumford [2]. Cette théorie a permis de construire de nombreux espaces de modules, notemment l'espace des modules de courbes stables de genre donné (F. Knudsen et D. Mumford) et l'espace de modules de fibrés vectoriels semi-stables de rang et degré donnés sur une courbe projective lisse (M. S. Narasimhan et C. S. Seshadri).

"The Algebraic Theory of Modular Systems" fut publié pour la première fois en 1916. F. S. Macaulay aimait les situations concrètes, et les constructions explicites : son livre traîte de ce que l'on appelle aujourd'hui algèbre commutative, mais toujours dans le cadre des anneaux de polynômes, avec en vue le calcul, ou tout au moins la description, de l'ensemble des zéros communs d'un système de polynômes. Les deux premiers chapitres sont consacrés aux notions de résultant et de résolvant. Le résultant d'une famille de n polynômes homogènes $P_1, \dots P_n$ en n indéterminées, est un polynôme en les coefficients des P_i qui s'annule exactement lorsque les P_i ont un zéro commun non trivial. Le résolvant est une notion dérivée du résultant, qui permet, en théorie, de calculer les zéros communs des P_i. L'algorithme ainsi obtenu serait trop lent pour des calculs explicites, car pour $n \geq 3$, l'expression du résultant est compliquée : les résolvants servent plutôt à Macaulay pour décrire les composantes irréductibles et la dimension du lieu des zéros d'un ideal (la dimension "de Krull" n'était pas encore connue). Dans le troisième chapitre, Macaulay souligne l'importance des composantes plongées, et introduit la notion d'intersection complète. C'est ici qu'apparaît la notion d'anneau de Cohen-Macaulay, sans qu'elle soit dégagée explicitement (on pourra consulter [1] pour une référence "moderne"). Dans le dernier chapitre, Macaulay introduit les notions d'idéal de Gorenstein (il montre en particulier qu'une intersection complète est de Gorenstein), de multiplicité, et d'idéal parfait.

Macaulay avait une bien plus grande prédilection pour les exemples concrets que pour les concepts abstraits; ainsi, il donne le premier exemple d'anneau intègre qui ne soit pas Cohen-Macaulay, mais ne dégage pas la notion d'anneau de Cohen-Macaulay pourtant inscrite en filigrane dans la démonstration de son théorème sur les intersections complètes (chapitre 3). La préface de Paul Roberts est donc très utile, puisqu'elle explique en quoi la démarche de Macaulay diffère des approches modernes, et met en lumière le rôle de précurseur de Macaulay dans des domaines comme l'algèbre commutative, l'algèbre homologique, et *les methodes de calcul dans les anneaux de polynômes. Elle s'accompagne d'un glossaire indispensable, car le langage a beaucoup changé (ainsi Macaulay appelle modules nos idéaux).*

C'est une chance pour les mathématiciens que de pouvoir lire ces deux ouvrage dont le contenu a profondément influencé les mathématiques de ce siècle; c'est aussi l'occasion, et le plaisir, de découvrir deux personnalités mathématiques très différentes, et toutes deux fascinantes.

Références

[1] *H.Matsumura : Commutative Algebra, W.A.Benjamin Co, New York 1970.*

[2] *D.Mumford, Fogarty : Geometric Invariant Theory, Springer, 1965.*

Alain Bruguières
Université Paris 7

Heat kernels and Dirac operators

Nicole Berline, Ezra Getzler et Michèle Vergne

Edition Springer–Verlag 1992
Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 298

Soit M une variété riemannienne compacte, que nous supposerons orientée et de dimension paire $2l$. Les opérateurs de Dirac ont été introduits dans le contexte riemannien par Atiyah-Singer et Lichnerowicz. Ce sont certains opérateurs différentiels d'ordre 1 opérant sur les sections d'un superfibré hermitien $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$ sur M. Plusieurs opérateurs différentiels classiques sont des opérateurs de Dirac (voir Atiyah-Singer) :

I) L'opérateur de Dirac sur un variété spinorielle orientée de dimension paire, et ses versions tordues par un fibré complexe hermitien.

II) L'opérateur $\sqrt{2}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)$ sur une variété Kalhérienne, et ses versions tordues par un fibré holomorphe hermitien.

III) L'opérateur de signature.

IV) L'opérateur $d + d^*$ où d est l'opérateur de de Rham et d^* son adjoint.

Un opérateur de Dirac D est somme directe de deux opérateurs D^+ et D^-, où D^+ envoie l'espace des sections différentiables $\Gamma(M, \mathcal{E}^+)$ dans $\Gamma(M, \mathcal{E}^-)$, et où D^- est l'adjoint de D^+. L'opérateur D^+ est elliptique, et son indice peut être calculé comme cas particulier des théorèmes d'Atiyah-Singer. Cependant, avant et après les travaux d'Atiyah-Singer, on s'est intéressé à des méthodes donnant directement l'indice des opérateurs de Dirac (ou de certains des opérateurs de Dirac). Celles basées sur l'équation de la chaleur, et plus précisément sur l'étude du comportement asymptotique du noyau de la chaleur au voisinage du temps $t = 0$, permettent de définir un "indice local". C'est une forme différentielle sur M qui est calculée localement en fonction des jets de la métrique riemannienne. De plus l'indice est l'intégrale de l'indice local. Le calcul de l'indice local (au moins dans les cas classiques) –et en particulier *le fait conjecturé par McKean-Singer qu'il ne dépende que de la courbure riemannienne– est dû à Patodi, Gilkey, Atiyah-Bott-Patodi il y a une vingtaine d'années, par des méthodes indirectes.*

Plus récemment de nouvelles démonstrations de l'indice local sont apparues (citons Getzler, Bismut, Berline-Vergne), suffisamment directes pour s'étendre au cas des opérateurs de Dirac équivariants et au cas des familles d'opérateurs de Dirac. L'objet du livre de Berline, Getzler et Vergne est l'étude de ces théorèmes d'indice local.

Voyons plus en détail le contenu du livre. Les chapitres 1 à 3 contiennent les résultats d'analyse et de géométrie différentielle utilisés par la suite, notamment la théorie de Chern-Weil et Quillen des classes caractéristiques, les définitions de géométrie riemannienne et spinorielle (construction des opérateurs de Dirac, formule de Lichnerowicz), la construction du noyau de la chaleur, l'existence de son développement asymptotique, la formule de McKean-Singer.

Le chapitre 7 est aussi un chapitre de géométrie différentielle, exposant la théorie des formes différentielles équivariantes, la généralisation de la théorie de Chern-Weil dans ce contexte et la formule de localisation de Berline-Vergne. Ces notions ont trouvé de nombreuses applications depuis une dizaine d'années, et ce chapitre de 40 pages peut être utilisé indépendamment du reste du livre comme une excellente référence.

Pour expliquer le coeur du livre, introduisons quelques notations. Pour $t > 0$ *on considère l'opérateur* e^{-tD^2} *dans l'espace* $\Gamma(M, \mathcal{E})$*. Cet opérateur admet un noyau* $k(t,x,y)$ *(c'est le noyau de la chaleur) qui est une fonction différentiable de* $t > 0$*,* $x \in M$*,* $y \in M$*, et* $k(t,x,y)$ *est une application linéaire de la fibre* $\mathcal{E}_y$ *dans la fibre* $\mathcal{E}_x$*. En particulier,* $k(t,x) := k(t,x,x)$ *est un endomorphisme de la fibre* $\mathcal{E}_x$ *et, d'après la formule de McKean-Singer (notant* str *la différence des traces dans les parties paires et impaires) l'indice de* D^+ *est égal à* $\int_M str(k(t,x))dx$*, quel que soit* $t > 0$*. La fonction* $k(t,x)$ *admet au voisinage de* $t = 0$ *un développement asymptotique*

$$k(t,x) = (4\pi t)^{-l} \sum_{j \geq 0} t^j k_j(x).$$

Le théorème de l'indice local classique affirme que $str(k_j(x))$ *est nul pour* $j < l$*, et donne une formule pour* $str(k_l(x))$*.*

Dans le ch.4, les auteurs donnent une version plus précise du théorème de l'indice local. Comme elle sert de prototype au reste du livre, je la décris dans le cas de l'opérateur de Dirac d'une variété spinorielle, tordu par un fibré hermitien $\mathcal{W}$ *muni d'une connection* ∇*. La fibre* $\mathcal{E}_x$ *en un point* $x \in M$ *est égale à* $S_x \otimes \mathcal{W}_x$*, où* S *est le fibré des spineurs construit sur l'espace cotangent* T^*M *de* M*. L'espace des endomorphismes de* S_x *est isomorphe à l'algèbre de Clifford* $C_x(M)$ *de* T^*_xM*. L'algèbre* $C_x(M)$ *admet une filtration croissante* $C_{x,j}$*,* $j = 0,...,2l$*, telle que le gradué associé soit isomorphe à l'algèbre extérieure* ΛT^*M*. Il se trouve que* $k_j(x)$ *appartient à* $C_{x,2j} \otimes End(W_x)$*.*

On peut donc considérer son image $\sigma_j(k(x))$ dans $\Lambda^{2j}T_x^*M \otimes End(\mathcal{W}_x)$, et le symbole total $\sigma(k) = \sum \sigma_j(k)$, qui est une forme (différentielle paire) à valeurs dans le fibré $End(\mathcal{W})$. Le théorème 4.1 du livre est la formule suivante pour $\sigma(k)$:

(1)

$$\sigma(k) = \hat{A}(M) \exp(-F).$$

Ici $\hat{A}(M)$ est la forme calculant le $\hat{A}$-genre de M à l'aide de la courbure riemannienne, et F est la courbure de ∇ de sorte que la forme $tr(exp(-F))$ est le représentant du caractère de Chern de $\mathcal{E}$ associé à ∇. Le théorème de l'indice local classique s'obtient en considérant la partie homogène de degré $2l$ de la formule (1).

Deux démonstrations de ce théorème sont données, l'une due à Getzler au ch. 4, et l'autre à Berline-Vergne au ch. 5.

Dans les ch. 6 et 8, les auteurs considèrent des opérateurs de Dirac équivariants sous l'action d'un groupe compact G. Pour tout élément γ de G, l'opérateur γe^{-tD^2} admet un noyau $k_\gamma(t,x,y)$. L'évaluation asymptotique de $k_\gamma(t,x,x)$ conduit à une généralisation de la formule (1), exprimée en terme de formes différentielles sur la variété M^γ des points fixes de γ dans M à valeurs dans le fibré $End(\mathcal{E})$ restreint à M^γ. Cette formule implique des formes équivariantes de l'indice local due à Patodi et Gilkey, et la formule d'Atiyah-Segal-Singer pour l'indice des opérateurs de Dirac équivariants.

Supposons maintenant γ de la forme $\exp X$, où X est petit dans l'algèbre de Lie de G. Les auteurs montrent d'abord (suivant Berline-Vergne) que la formule de localisation du ch. 7 permet d'écrire la formule d'Atiyah-Segal-Singer au point $\exp X$ comme l'intégrale d'une forme différentielle équivariante $\int_M \alpha(X)$. La formule obtenue est appelée "formule de Kirillov" par les auteurs car, de même que la formule d'Atiyah-Segal-Singer implique la formule d'H. Weyl pour le caractère des représentations irréductibles de G, la formule obtenue implique celle de Kirillov. Ils expliquent ensuite (suivant Bismut, mais par une méthode différente) comment on peut déduire directement cette formule d'un théorème local pour un noyau $k_X(t,x,y)$ dont la définition est due à Bismut.

Les ch. 9 et 10 traitent le cas de familles d'opérateurs de Dirac D_z sur des variétés M_z qui sont les fibres d'un espace fibré $M \to B$. Lorsque la dimension du noyau de D_z^+ est constante, l'indice de la famille D_z^+ est le superfibré sur B de fibre $\ker D_z^+ \oplus \ker D_z^-$. (En général, d'après Atiyah-Singer, l'indice est bien défini dans $K(B)$, mais l'accent est surtout mis dans ce livre sur des objets explicites plutôt que sur des classes). Le chapitre 9 expose une généralisation de la formule de McKean-Singer. Suivant Quillen et Bismut, les auteurs considèrent une famille de superconnexions $\mathbf{A}_t$ définies pour $t > 0$: $\mathbf{A}_t$ est un opérateur différentiel d'ordre 1 sur M qui consiste en gros à ajouter à une connexion sur le fibré de base B de fibre (de dimension infinie) $\Gamma(M_z, \mathcal{E}_z)$ l'opérateur $\sqrt{t}D_z$. Pour tout $t > 0$ l'opérateur $e^{-\mathbf{A}_t^2}$ est une forme sur B à valeurs dans *les endomorphismes de* $\Gamma(M_z, \mathcal{E}_z)$ *et* $str(e^{-\mathbf{A}_t^2})$ *est une forme différentielle sur* B *dont la classe représente le caractère de Chern du fibré indice. En fait, pour* t *tendant vers* ∞*, la forme* $str(e^{-\mathbf{A}_t^2})$ *tend vers une limite qui est le représentant du caractère de Chern associé à une certaine connexion sur le fibré indice.*

Le chapitre 10 porte sur l'indice local des familles : pour certaines superconnexions définies par Bismut, le théorème de Bismut affirme que la forme $str(e^{-\mathbf{A}_t^2})$ *admet une limite lorsque* t *tend vers* 0*, et cette limite est calculée (ce qui implique la formule d'Atiyah-Singer pour le caractère de Chern du fibré indice). Par les méthodes du ch. 4, les auteurs obtiennent ce théorème d'une généralisation de leur formule (1).*

En conclusion, le présent ouvrage contient un exposé très à jour des résultats sur l'indice local des opérateurs de Dirac, depuis ceux "classiques" de Patodi jusqu'aux versions les plus générales : indice local des opérateurs de Dirac équivariants, formule "de Kirillov", théorèmes de Bismut sur l'indice local des familles. Les démonstrations sont complètes, souvent originales, et relativement élémentaires. Tous les préliminaires sont traités dans le livre, ceux que l'on peut trouver ailleurs avec éventuellement plus de détails (les résultats de base de géométrie différentielle et riemannienne, et sur le noyau de la chaleur) et ceux qui ne figuraient que dans des articles (particulièrement le chapitre 7, traitant de la "théorie de de Rham équivariante"). Ce livre est fortement recommandé à tous ceux qui s'interessent à l'un des sujets suivants : noyau de la chaleur, opérateurs de Dirac, indice des familles.

Michel Duflo
Université Paris 7-Denis Diderot
URA 748 du C.N.R.S.

Harmonic maps and minimal immersions with symmetries

J. Eels et Andrea Ratto

Annals of Mathematics Studies
Princeton University Press 1993

Le but de ce livre est de donner un exposé unifié et détaillé de plusieurs résultats importants obtenus ces dernières années dans le domaine des applications harmoniques et des immersions minimales entre variétés riemanniennes. Le point commun à tous ces résultats est la présence de symétries permettant la réduction de la dimension du problème étudié.

La première des trois parties qui composent ce livre commence par le rappel d'un certain nombre de généralités sur les fonctionnelles Energie et Volume, et sur leurs points critiques respectifs, les applications harmoniques et les immersions minimales. Bien que ces deux notions correspondent à des problèmes variationnels totalement différents, un très grand nombre de liens existent entre elles. Les auteurs en donnent quelques uns. Ainsi, par exemple, une immersion riemannienne est minimale si et seulement si elle est harmonique, alors qu'une submer-

sion riemannienne est harmonique si et seulement si toutes ses fibres sont minimales.

Les auteurs s'intéressent ensuite à la notion d'immersion à courbure moyenne parallèle (c.m.p.) qui est une généralisation naturelle de celle d'immersion minimale (courbure moyenne nulle). Dans le cas particulier des immersions de codimension 1 entre variétés orientées, la propriété "c.m.p.", qui revient alors simplement à dire que la norme du champs des courbures moyennes et constante (c.m.c.), devient la propriété caractéristique des points critiques du problème variationnel isopérimétrique (i.e. extème liés du Volume). Les auteurs montrent de ce fait en détail avant de donner une preuve complète du célèbre théorème d'Alexandrov (les sphères sont les seules hypersurfaces compactes plongées à c.m.c. de l'espace Euclidien).

Le cas où la variété source est une surface de Riemann présente un grand nombre de particularités. En effet, dans ce cas, on peut associer de manière naturelle à toute application harmonique, ainsi qu'à toute immersion à c.m.p. à valeurs dans un espace forme, une différentielle quadratique holomorphe. Parmi les nombreux résultats fondés sur cette remarque il y a le théorème de Hopf (les sphères sont les seules surfaces compactes à c.m.c. de genre zéro immergées dans $\mathbf{R}^3$*), et le théorème d'Almgren-Calabri (toute surface minimale compacte de genre zéro immergée dans la sphère* S^3 *est un équateur).*

L'autre fait important caractéristique du cas 2-dimensionnel est la correspondance biunivoque qui existe entre les solutions bornées de l'équation de Sinh-Gordon et une classe d'immersions à c.m.c. définies sur le plan $\mathbf{R}^3$*. cette construction, due à Wente, est très importante vus les théorèmes d'Alexandrov et de Hopf sus-mentionnés.*

La technique de réduction apparaît à la fin de cette première partie. Son schéma général est donné comme suit : soient $\rho : M \longrightarrow P$ *et* $\sigma : N \longrightarrow Q$ *deux submersions riemanniennes. Une application* $\phi : M \longrightarrow N$ *est dite* (ρ, σ)*-équivariante si elle induit une application* $\bar{\phi} : P \longrightarrow Q$ *telle que* $\sigma \circ \phi = \bar{\phi} \circ \rho$*. La réduction consistera alors en les 2 étapes suivantes :*

(i) Montrer qu'une application équivariante ϕ *est harmonique (ou minimale) si et seulement si elle est stationnaire parmi les applications équivariantes (i.e. pour la restriction de la fonctionnelle à l'espace des applications équivariantes),*

(ii) Traduire sur $\bar{\phi}$ *l'harmonicité (ou la minimalité) de* ϕ*.*

Les auteurs donnent quelques situations importantes où l'étape (i) est vérifiée. Dans le cas où P peut être choisi de dimension 1*, l'étape (ii) donne lieu à des équations différentielles ordinaires (E.D.O.).*

La seconde partie, qui est le coeur du livre, contient de belles illustrations du schéma que nous venons de décrire. Presque tous les résultats et les constructions qui y sont présentés sont dus à W. T. Hsiang, seul ou avec des collaborateurs (B. Lawson, W. T. Hsiang,, Sterling, Tomter,etc.). En effet, les auteurs y donnent une preuve détaillée des résultats suivants :

- *Tout espace homogène riemannien*

compact admet une immersion harmonique (resp. minimale) dans une sphère.

- *Classification des hypersurfaces minimales compactes (resp. à c.m.c. complètes) de révolution (i.e. $SO(n-1)$-invariantes) de la sphère S^n (resp. de $\mathbf{R}^n$).*
- *Existence d'une infinité d'hypersurfaces minimales (non équatoriales) de S^4 qui sont difféomorphes à S^3 (ce résultat est à comparer avec les théorèmes d'Alexandrov et de Hopf).*

La preuve de tous ces résultats, à l'exception du premier, passe par une analyse fine de certaines E.D.O.

La troisième et dernière partie du livre est consacrée aux applications harmoniques entre sphères. Elle commence par le rappel des exemples classiques (applications propres, fibrations de Hopf, multiplications orthogonales...). Les auteurs s'intéressent ensuite aux "joints" d'applications harmoniques définis par Smith : si $\alpha : [0, \pi/2] \to [0, \pi/2]$ est une fonction différentiable qui fixe 0 et $\pi/2$, le α-joint $u *_\alpha v$ de deux applications $u : S^p \to S^q$ et $v : S^1 \to S^5$ est une application de S^{p+s+1} à valeurs dans S^{q+s+1}. Dans le cas où u et v sont des applications propres, la condition d'harmonicité sur $u *_\alpha v$ se réduit à une E.D.O. vérifiée par α. Les auteurs donnent des conditions nécéssaires et suffisantes pour l'existence de solutions de cette équation. Une des conséquences importantes de ce travail est l'existence d'un représentant harmonique dans chaque classe d'homotopie d'applications de S^n dans S^n pour tout $n \leq 7$, ainsi que pour $n = 9$.

Un traitement analogue est effectué pour les α-Hopf constructions associées à une application $f : S^p \times S^q \to S^n$, et qui sont des applications de S^{p+q+1} à valeurs dans S^{n+1}.

Ce livre est intéressant à plusieurs égards. La première partie est une bonne introduction au sujet. Le reste du livre constitue une présentation quasi-exhaustive des résultats les plus importants obtenus par cette méthode de réduction et montre comment des problèmes très sérieux de Géométrie riemannienne peuvent se ramener à l'analyse (non moins sérieuse) de certaines E.D.O. Par ailleurs, hormis quelques imprécisions, la rédaction du livre est claire et son organisation est excellente, ce qui rend sa lecture tout à fait agréable. On ne s'y sent jamais perdu, les paragraphes et les chapitres se succédant selon une logique simple et naturelle. Les commentaires donnés au début et à la fin de chaque chapitre seront très appréciés du lecteur. En somme, c'est un livre qui mérite amplement une place dans toute bonne bibliothèque.

Ahmad El Soufi
Université François Rabelais - Tours

Differential Algebra and Diophantine Geometry

A. Buium

Hermann 1994 (192 pages, 130 Francs)

Les deux thèmes de cet ouvrage ne pourraient guère avoir histoires plus différentes. La géométrie diophantienne, c'est-à-dire l'étude des solutions rationnelles d'équations algébriques à plusieurs variables à coefficients rationnels, remonte aux origines des mathématiques, et en a été une source d'inspiration constante. Quant à l'algèbre différentielle, la "description" qu'en donne I. Kaplansky dans sa préface à [K] montre qu'elle est tout au plus sexagénaire : "Differential algebra is easily described : it is (99 per cent or more) the work of Ritt and Kolchin". Une version géométrique de l'algèbre différentielle, développée ces dernières années par l'auteur à la suite des travaux de Cassidy et Kolchin (voir [K2], [B1]), l'a récemment conduit à la solution de plusieurs problèmes classiques de géométrie diophantienne (voir par exemple [B2], [BV]). C'est à cette jonction des deux thèmes qu'est consacré le présent livre.

Une mise en garde toutefois : la géométrie diophantienne dont il s'agit ici est celle des corps de fonctions de caractéristique nulle : le corps $\mathbf{Q}$ *est remplacé, dans le cas le plus simple, par le corps* $K = \mathbf{C}(t)$ *des fonctions rationnelles à coefficients complexes, et on recherche les solutions* (x, y) *dans* K^2 *d'une équation* $P(X,Y) = 0$, *où* P *est un polynôme à coefficients dans* K. *L'existence d'une dérivation non triviale* $\partial = d/dt$ *sur* K *simplifie considérablement la vie. Par exemple, si* $x^n + y^n = 1$, *alors* $x^{n-1}\partial x = -y^{n-1}\partial y$, *d'où l'on déduit, pour* $\partial x \partial y \neq 0$, *que le maximum* h *des degrés des numérateurs et des dénominateurs de* x *et* y *vérifie* $(n-1)h < 2h$. *Les seuls points* K*-rationnels des courbes de Fermat d'exposants* ≥ 3 *sont donc les points "constants"* $(x, y) \in \mathbf{C}^2$. *Certes, on peut aussi cacher le rôle de* ∂ *dans la démonstration, en notant qu'un point* K*-rationnel non constant fournit une injection du corps* $\mathbf{C}(X)[Y]/(Y^n - 1 + X^n)$ *dans* $\mathbf{C}(t)$, *ce qui contredit le théorème de Lüroth pour* $n \geq 3$. *Mais même quand leurs démonstrations sont ouvertement "différentielles" – comme c'est bien sûr le cas ici –, les énoncés sur les corps de fonctions jouent un rôle important en géométrie diophantienne. Le titre de l'ouvrage est donc approprié.*

S. Lang a conjecturé en 1960 l'analogue fonctionnel suivant de la conjecture de Mordell : soit X *une courbe algébrique définie sur* K, *de genre* ≥ 2; *alors, l'ensemble* $X(K)$ *des points* K*-rationnels de* X *est fini, à moins que* X *ne soit* K*-isoconstante (c'est-à-dire birationnellement isomorphe sur* K *à une courbe* X_0 *définie sur* $\mathbf{C}$ *), auquel cas, à un nombre fini d'exceptions près,* $X(K)$ *se ramène comme dans l'exemple ci-dessus à* $X_0(\mathbf{C})$. *Ce problème servant de fil conducteur au livre de Buium, il en sera de même dans ce compte-rendu.*

La première preuve, due à Manin (1963), de la conjecture de Lang fait jouer un rôle central à la dérivation ∂ *: elle attache aux points* P *de* $X(K)$ *des équations differentielles à second membre* $Ly = f_P$, *où* $L \in K[\partial]$ *est une équation de*

Picard-Fuchs pour X/K, dont la dégénerescence éventuelle permet de détecter l'isoconstance de X. Je renvoie à $[L]$ pour un historique sur la question, et pour la preuve de Parshin de 1968 (à ∂ caché), qui a ouvert la voie au passage de K à $\mathbf{Q}$.

Une seconde approche de la conjecture de Lang a été développée par W. Schmidt, à la suite de travaux de C. Osgood. Bien qu'elle ne permette de traiter qu'un type restreint de courbes (les courbes hyperelliptiques de genre ≥ 8, dans [S], 1.3), je crois utile de la citer ici : inspirée de la méthode de Thue, elle attache aux points de $X(K)$ des approximations rationnelles de solutions d'équations différentielles algébriques, et reprend à ce propos l'étude initiée par Kolchin dans [K1]. Il s'agit donc sans conteste d'une preuve par l'algèbre différentielle.

Sans être totalement étrangère à celle de Manin, l'approche de Buium est encore différente. Tout d'abord (et c'est déjà une nouveauté dans le domaine), la conjecture de Lang est établie par le biais de l'énoncé plus général suivant (dont l'analogue arithmétique regroupe des questions de Manin, Mumford et Lang) : plongeons la courbe X (supposée de genre ≥ 2) dans une variété abélienne A, et soit M un sous-groupe de rang fini de $A(\overline{K})$, où $\overline{K}$ désigne une clôture algébrique de K. Si X rencontre M en un nombre infini de points, alors X/K est isoconstante. La preuve, qu'on va maintenant esquisser, met en jeu les principaux outils développés dans le livre :

– d'abord, une commodité technique (dont il serait agréable de se débarrasser) : on remplace le corps différentiel $(\overline{K},\partial)$ par un "domaine différentiel universel" (F,∂), où toutes les équations différentielles algébriques ont des solutions.

– en second lieu, la notion, cruciale, d'"adhérence différentielle" Z^* d'un sous-ensemble Z d'une variété algébrique Y/F : c'est l'ensemble des éléments de $Y(F)$ qui satisfont toutes les équations différentielles algébriques (à coefficients dans F) satisfaites par les éléments de Z. Ce n'est donc en général pas un F-sous-schéma de Y.

– enfin, une passerelle vers la géométrie algébrique usuelle : à la variété algébrique Y/F, on associe un F-schéma (de dimension infinie, en général) Y^∞ au-dessus de Y, qui est muni d'une action naturelle de ∂; les points de Y se relèvent canoniquement sur Y^∞, et les dérivées successives des fonctions régulières sur Y s'interprètent comme des fonctions régulières sur Y^∞. Ainsi, pour tout sous-ensemble Z de $Y(F)$, le relèvement $Z^{*\infty}$ de Z^* dans Y^∞ constitue (l'ensemble des points d'un F-sous-schéma, stable sous ∂, de Y^∞. Et dès que les solutions du système différentiel attaché à Z^* ne dépendent que d'un nombre fini de "constantes d'intégration", $Z^{*\infty}$ est un F-schéma de dimension finie.

Dans le problème de Lang généralisé, le sous-ensemble $Z = M$ de $A(F)$ est un sous-groupe de rang fini. Cela entraîne que le sous-schéma horizontal $H = M^{*\infty}$ de A^∞, est un "vrai" sous-groupe algébrique du F-schéma en groupe A^∞. Là où la théorie de Manin faisait apparaître des extensions de la cohomologie de de Rham de A, c'est à des extensions de A elle-même par des groupes vectoriels *que Buium aboutit ainsi.*

Dans ces conditions, supposons $X \cap M$ *infini. Alors, le* F*-schéma* $W = X^{\infty} \cap M^{*\infty}$ *l'est aussi, et domine donc* X. *On est finalement ramené à pouver qu'une sous-variété horizontale W d'un "groupe algébrique différentiel"* H/F *ne peut dominer* X *que si* X *est isoconstante. La preuve que le livre donne de cet énoncé est délicate, mais l'exemple suivant le rendra plausible : supposons que* H *soit un groupe vectoriel. Alors,* H *s'interprète comme un* $F[\partial]$*-module de dimension finie sur* F, *et* W *comme* $F[\partial]$*-sous-module d'une puissance symétrique de* H. *Comme* F *est différentiellement clos, le classique lemme du wronskien montre que* H *et* W *se déduisent par extension des scalaires à* F *des* $\mathbf{C}$*-espaces vectoriels formés par leurs vecteurs horizontaux. Autrement dit,* W *est isoconstant. L'isoconstance de* X, *que* W *domine, découle alors de propriétés standard des variétés abéliennes sur les corps de fonctions.*

Arrivé à ce stade, le lecteur (ou tout au moins le rapporteur) est prêt à entrer dans le vif du sujet. Il trouvera au chapitre 2 les énoncés de base de l'algèbre différentielle (théorèmes de Ritt, Kolchin et Seidenberg), qui jouent, par rapport à la nouvelle "géométrie algébrique différentielle" mentionnée plus haut (et exposée au chapitre 3), le rôle de l'algèbre commutative par rapport à la géométrie algébrique. La théorie est illustrée au chapitre 4 par l'étude des fibrés sur les variétés rationnelles, et des espaces de jets de leurs sections. Les chapitres 5 et 6, qui forment le coeur du livre, sont consacrés aux variétés abéliennes A/F, et plus particulièrement à l'adhérence différentielle $A\dagger$ *de l'ensemble des points de torsion de* $A(F)$. *Comme on l'a "vu",* $A^{\dagger\infty}$ *est une extension vectorielle de* A *: sa trivialité fournit un nouveau critère d'isoconstance de* A, *et l'auteur la décrit en détail quand* A *est une courbe elliptique. Outre l'énoncé mentionné ci-dessus sur les sous-groupes de rang fini de* $A(F)$, *il en déduit, en termes d'équations de Picard-Fuchs, une intéressante caractérisation de l'adhérence différentielle (dans la droite affine sur* F*) de l'ensemble des invariants de Legendre d'une classe d'isogénie de* F*-courbes elliptiques. Enfin, les applications à la géométrie diophantienne sont rassemblées au chapitre 7 : versions fonctionnelles des conjectures de Manin-Mumford-Lang et de Mordell, et du théorème de Siegel sur les points entiers. Pour déduire la seconde conjecture de la première, on fait bien entendu appel à l'analogue sur* K *du théorème de Mordell-Weil. Ce résultat, dû à Lang et Néron, fait l'objet du chapitre 1 du livre, tandis qu'un appendice reproduit une preuve du grand théorème de Picard, qui intervient dans la démonstration, omise ci-dessus, de l'isoconstance de* X.

Les questions d'effectivité ne sont pas abordées dans cet ouvrage. Buium signale une majoration explicite du cardinal de $X(K)$, *mais je doute que sa méthode fournisse une borne pour la hauteur* h *des éléments de* $X(K)$. *(De telles bornes effectives sont connues; cf. [L], et aussi, dans le cadre différentiel, [S]). Il serait intéressant de préciser ce qu'il en est, de ce point de vue, de la méthode de Manin.*

Le livre suppose connu le langage de base de la géométrie algébrique, mais rien de la géométrie diophantienne ni de l'algèbre différentielle. Comme notre résumé ne donne qu'un aperçu de ses nombreux résultats, on ne s'étonnera pas d'apprendre qu'il est dense. Sa lecture en est heureusement facilitée par un plan clair et un index soigneusement composé, et par le souci qu'a l'auteur de restreindre la présentation de sa théorie aux cas les plus simples (les références bibliographiques permettent d'aller plus loin). On aimerait néanmoins plus d'exemples concrets, et je recommande à ce propos l'introduction de [B1] (ainsi que [BV], p. 305) comme accompagnement à ce livre.

Puisque j'en suis venu aux critiques, je dois signaler, outre les fautes typographiques que chacun saura corriger (I : a au lieu de I, au milieu de la p. 22; ∞ au lieu de 0, au bas de la p. 56; ...), plusieurs erreurs dans les références internes du livre (6.4 au lieu de 6.3, p. 130; 2.7 au lieu de 6.1, à la fin de la p. 166; ...). Enfin deux critiques destinées (même par ces temps de TEX) à l'éditeur : la lecture serait simplifiée si le haut de chaque page faisait apparaître le n° du chapitre; et le coût modéré de l'ouvrage n'excuse pas les déplacements intempestifs de la ponctuation!

L'algèbre différentielle est réputée d'accès difficile. Le livre de Buium, par les relations qu'il tisse avec la géométrie algébrique, et par les applications qu'il en tire à un domaine aussi classique que la géométrie diophantienne, devrait lui faire connaître une plus large audience.

Références

[B1] A. BUIUM : Differential algebraic groups of finite dimension; Springer L.N. 1506, 1992.

[B2] A. BUIUM : Intersection in jet spaces and a conjecture of Lang; Ann. Math., 136, 1992, 583-592.

[BV] A. BUIUM and J-F. VOLOCH : Integral points of abelian varieties over function fields of char. 0; Math. Ann., 297, 1993, 303-307.

[K] I. KAPLANSKY : An introduction to differential algebra; Hermann, 1957.

[K1] E. KOLCHIN : Rational approximation to solutions of algebraic differential equations; Proc. AMS, 10, 1959, 238-244.

[K2] E. KOLCHIN : Differential algebraic groups; Acad. Press, 1985.

[L] S. LANG : Number TheoryIII (Diophantine geometry); Encycl. Math. Sc., vol. 60, Springer, 1991.

[S] W. SCHMIDT : Polynomial solutions of $F(x,y) = z^2$; Queen's Papers in p. appl. maths, vol. 54, 33-65, 1980.

Daniel Bertrand
Université Paris 6

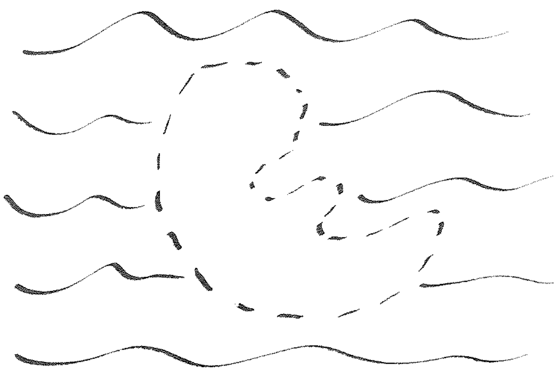
Les enjeux du mobile, Mathématique, physique, philosophie

Gilles Châtelet

Collection Des Travaux,
Editions du Seuil, octobre 1993.

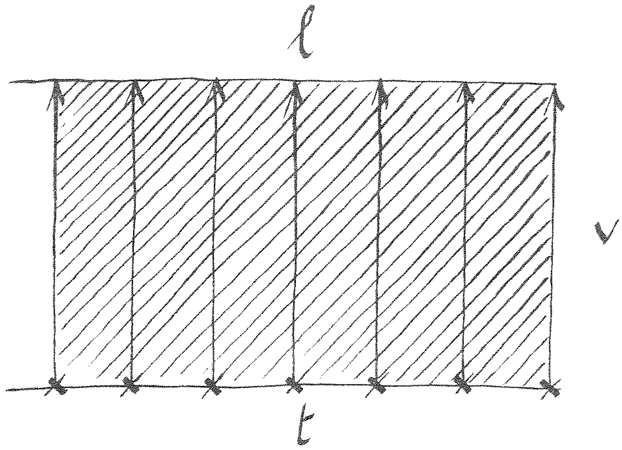
Le livre de Gilles Châtelet est un évènement. Combien de mathématiciens va-t-il réveiller? Afin qu'ils considèrent autrement leurs axiomes et techniques reçus. Ils verront l'intuition capturée dans leurs calculs, l'un d'eux saura en nourrir sa recherche. L'appel vient de la philosophie qui pense le physico-mathématique. Décourageant toute neutralité, ruinant les habitudes d'un vieux ménage à trois, elle montre une dynamique de l'entendement et découvre une grammaire vivante de gestes et de diagrammmes. Le livre est riche, en style superbe. Il m'évoque la danse d'un projectile animé, vorace et décidé, une âme assoiffée de chocs qui s'entoure de nouvelles sphères auprès de tout ce qu'elle touche. Pour en rendre compte, je préfère survoler de loin et prendre dans le texte juste quelques figures, comme des proies brutalement attrapées. La voie suivie par Gilles Châtelet demande l'intervention de plus en plus grande de notre propre corps. Premièrement l'être mathématique en jeu n'est pas simplement abstrait du réel, ni venu d'implications logiques de toute éternité. Le voila qui entre en scène, pour saisir la dimension, la force ou le travail; il s'exprime dans les découpages virtuels, conjugant acte et puissance. Sa figure est la ligne pointillée :

Figure 1



Pour apprécier "le libre pouvoir d'agir des forces internes", l'expérience de pensée installe le pointillé dans un fluide (Archimède) ou dans tout système mécanique à l'équilibre (Lagrange), proposant "tout ce dont le système est capable : rompre, distordre, etc..". Le long de la découpe des flèches illustreraient le tenseur énergie-impulsion. De même Cauchy ou Poisson et Riemann provoquent une cavité virtuelle dans la droite complexe : "le plan devient charnel". Selon Leibniz le métaphysicien doit propulser vers la matière certaines composantes de son propre corps. Une fois disposé là, l'homme se redresse pour donner l'élasticité du *mouvement (puis un mouvement du mouvement). Le graphique est un diagramme d'Oresme :*

Figure 2

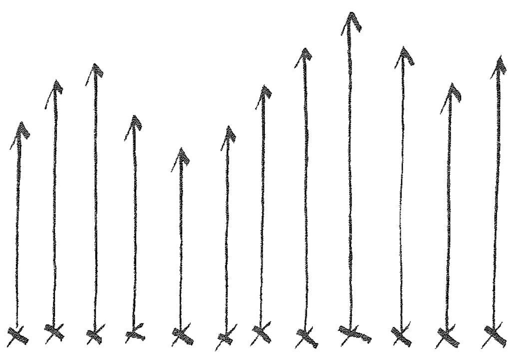


$l = vt$; le temps est un paramètre (extensif), la vitesse (intensive) est verticale, la longueur représentée par l'aire. Mis en perspective (couchés, renversés,..), ces diagrammes donnent l'horizon de la relativité restreinte, de la mécanique ondulatoire. Ils précèdent l'amplum de Leibniz :

$$A = \int I dt$$

(I comme intensité, le lagrangien, A comme action),

Figure 3



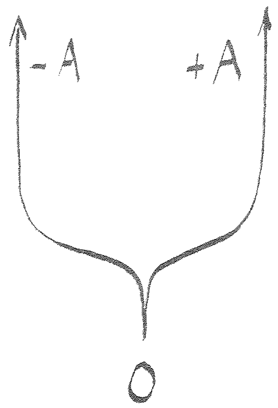
puis redoublent d'effort dans les intégrales d'amplitude de Feynman

$$Z = \int \mathcal{D}\, \gamma\, e^{i \int_\gamma I dt}$$

qui enveloppent tous les chemins possibles pour élire la quantité mesurée.

La quatrième figure sera celle du centre d'indifférence (polarité magnétique, point de ramification,..)

Figure 4



A la manière de Kant poursuivant le concept de grandeur négative, Argand propose une balance dont la flèche latérale pointe le nombre imaginaire comme une moyenne géométrique

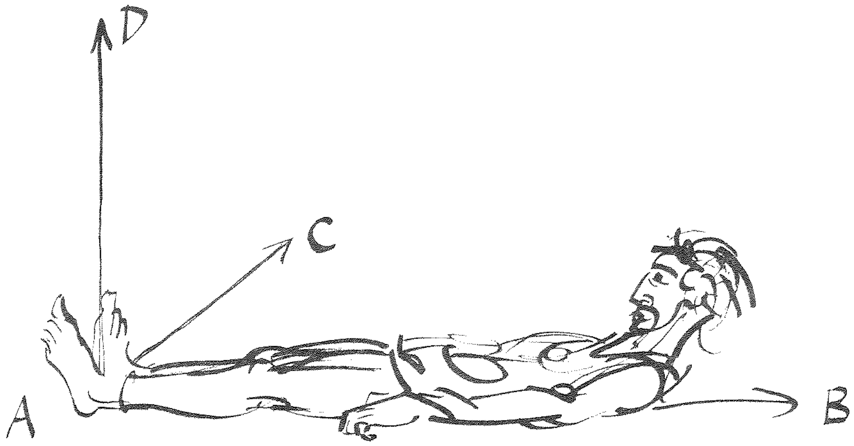
$$\frac{i}{+1} = \frac{-1}{i}$$

Le corps est pris dans l'indécision qui oblige l'émergence d'un nouvel être ou d'une nouvelle dimension. Cette force de l'ambigüité qui "taraude l'entendement jusqu'à l'éclatement" est au coeur de la philosophie de la nature allemande (Fichte, Schelling, Hegel). Le thème du livre tient dans la phrase de Schelling :

La Nature doit être l'Esprit visible, et l'Esprit la Nature invisible.

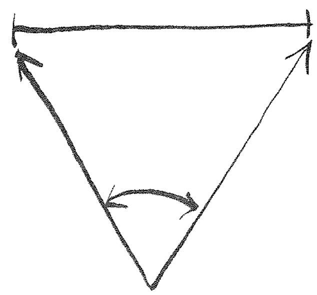
Arrive alors "l'obscure production des dimensions". La théorie de l'extension de Grassmann veut nous maintenir éveillés face à la production de l'espace, avec ses articulations, ses orientations. Dans une "mobilité généralisable". Lorsqu'on enseigne l'algèbre' linéaire ou qu'on utilise ses théorèmes pour résoudre un problème, on s'incline souvent devant son efficacité, mais on oublie ce qui produit cette fécondité. C'est seulement à travers les changements de points de vue qu'on perçoit à nouveau les gestes productifs : pensez aux sommes directes, aux produits tensoriels, par exemple dans les catégories de représentations (groupes quantiques, algèbres affines, reconstructions tannakiennes,..). Grassmann engendre l'espace par multiplication vectorielle, non commutative; on est loin d'une collection amorphe de points. Le dessin sera celui du bonhomme d'Ampère, car il garde les yeux ouverts sur les "rapports de situations" et la prochaine dimension.

Figure 5



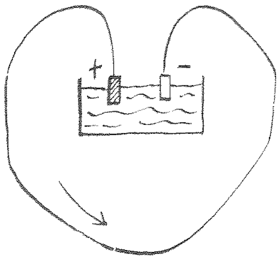
Enfin toute acquisition réclame un degré de plus, un dépassement, un détour. Par exemple il faut un "angle de vue" pour saisir la longueur, un compas pour comprendre en même temps les extrémités d'un intervalle.

Figure 6



C'est le point de vue de Schelling : magnétisme = longueur (étirer). De même électricité = largeur (écarter); ce qui conduit Gilles Châtelet à porter l'attention sur l'entour du deux des circuits de Volta.

Figure 7

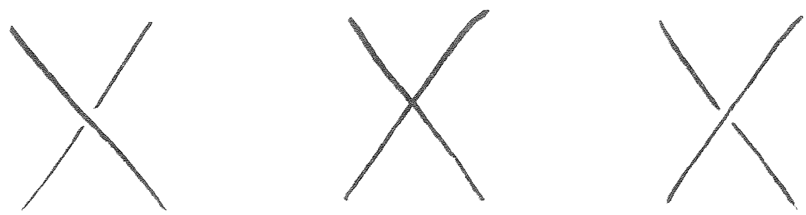


Les boucles engendrées sont bien plus inquiétantes que les balances. L'homme est invité à se placer successivement de chaque côté d'un plan pour comprendre son orientation. Ensuite il doit s'engager sur les spirales des solénoïdes d'Ampère, et puis se remettre à danser. Il est jeté dans le tourbillon, au milieu des lignes de force de Faraday, des engrenages et des entrelacs de Maxwell.

Figure 8

Que lui faut-il pour dominer l'espace? Jusqu'où s'élever pour pressentir "l'entour du noeud"?

Figure 9



Au contraire des images qui ont vite défilé, le livre de Gilles Châtelet est précis. Mathématicien de formation il décortique les textes clés des mathématiciens et physiciens de Leibniz à Maxwell. Métaphysicien de vocation, il pétrit ses concepts dans la tradition philosophique serrée de Kant, Hegel, Heidegger. Ce livre se situe dans une direction déjà bien illustrée par Bachelard, Simondon, Foucault, Badiou, Deleuze, Desanti, Villemin.

Ce n'est pas un livre d'histoire des sciences, ni un recueil d'informations scientifiques, encore moins une dissertation rassurante; c'est un travail de philosophie active, engagée dans la production scientifique actuelle. Or cette production ne peut pas être étrangère aux mouvements de la pensée.

Daniel Bennequin
Université Paris 7