REFLEXIONS SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES DANS LE SECONDAIRE

Alain Pommellet

Louis-le-Grand Paris

Plusieurs articles motivés par les problèmes de l'enseignement secondaire sont déjà parus dans la *Gazette* ([1] par exemple) ; mais aucun, semble-t-il, n'a jusqu'à présent porté sur les implications professionnelles des réformes qui se succèdent depuis longtemps dans les lycées et collèges. Nous proposons ici quelques remarques informelles sur les capacités actuelles des élèves titulaires d'un baccalauréat scientifique et leurs liens éventuels avec la nature des enseignements dispensés en amont. Précisons que les lignes qui suivent ne prétendent en rien reflèter l'opinion d'un groupe quelconque, fut-ce celui des professeurs de classe préparatoire; elles n'engagent de ce fait que celle de leur auteur. De plus, en l'absence d'études statistiques, les observations portant sur les capacités des élèves sortant de TC sont faites "sur le tas" à partir des performances relevées lors des nombreux tests auxquels les hypotaupins sont soumis.

Contexte

Cet article a pour toile de fond le débat général sur l'enseignement ; le point de vue qui prévaut actuellement dans la présentation et l'exposition des mathématiques dans les lycées et collèges ne peut être séparé de celui qu'ont adopté nombre de dirigeants lors de la mise en oeuvre des réformes globales qui se succèdent depuis 1974.

Résultats de l'enquête menée Auprès des enseignants de classe préparatoire.

Profitant des organes de diffusion de l'UPS (union des professeurs de spéciales) et de la structure fortement centralisée des classes préparatoires, j'avais lancé un appel auprès des collègues mathématiques supérieures, dans lequel il était demandé "de donner un avis sur les qualités et les défauts des élèves de math. sup venant de terminale, en évitant toute réaction épidermique". Malgré la modération souhaitée, le constat des nombreux répondants fut unanime : on peut le résumer en disant que les capacités d'une grande partie des élèves arrivant en classe préparatoire sont *grosso modo* celles qu'avaient les bacheliers B du début des années 80, amalgamées à la perception de la géomètrie d'un élève de troisième des années 70 (et encore : l'idée qu'il puisse y avoir une axiomatique est le plus souvent absente). L'échec est tel qu'il ne saurait être imputable – comme on tente ici et là de le faire croire – à la seule augmentation du nombre d'élèves accédant en terminale C : Le total des effectifs D+C d'il y a 8 ans était supérieur à l'effectif global des actuelles terminales C et de meilleur niveau scientifique moyen ; cette impression d'ensemble est objectivement confirmée par la baisse inquiètante des performances françaises lors des compétitions internationales [2].

Evoquons quelques points particuliers souvent cités dans les réponses :

— Absence d'entraînement à utiliser des définitions et des théorèmes exacts.

— Problèmes avec le langage : les mots n'ont plus de sens précis ; toute analogie apparente autorise l'élève à les interchanger (ce trait est frappant lorsque l'on examine comment sont rédigés les programmes.

— Très mauvaise maîtrise du calcul algébrique et trigonométrique (il est rituel de s'en plaindre mais ces temps-ci, les difficultés sont devenues dramatiques). La présence d'un calcul même simple au milieu d'un raisonnement en perturbe le déroulement.

— Incapacité à critiquer un raisonnement, plus encore leurs propres productions.

— Grandes difficultés à mémoriser un texte "au mot près", très mauvaise mémoire de façon générale.

La genèse de ces défauts est relativement claire lorsque l'on étudie attentivement le déroulement de la scolarité mathématique d'un lycéen.

Remarques sur les programmes De mathématiques de l'enseignement secondaire

J'ai ébauché une classification des observations faites sur les textes parus au bulletin officiel ; bien sûr, les différents paragraphes se recoupent assez largement. Il s'agit de plus d'un résumé : une exégèse complète demanderait un livre entier. Les programmes ne peuvent être ici reproduits pour des raisons matérielles. Ceux qui souhaitent se forger une opinion personnelle peuvent se les procurer, selon l'usage, au 13 rue du Four 75007 Paris.

Premier cycle des lycées et classes de seconde

Les points positifs en sont : un retour à des exercices d'application issus d'exemples réels, le souci de voir s'établir de véritables échanges entre élèves et professeurs ; l'évacuation des formalismes inutiles à ce stade de l'apprentissage. Hélas, ces idées, poussées à l'extrême, dénaturent profondément l'enseignement des mathématiques.

Un langage marqué par une mode

On relève notamment la forte fréquence d'apparition des termes et des locutions suivants : *outils, exploiter, mobiliser, manipuler, bâtir, mise en oeuvre, travaux, organisation, consolider, techniques opératoires, compétences exigibles* (toujours a minima) et tant d'autres, en particulier les nombreuses occurences du mot *activité*. Observons que ce vocabulaire est en grande partie emprunté aux sciences expérimentales (est-ce un hasard ?).

Les mots proscrits

N'apparaissent nulle part (ou presque) dans le texte : *logique, scientifique, raisonnement, juste, faux, rigueur, implication, réciproque, équivalence, savoir* (ne pas confondre avec *savoir faire*). L'emploi d'une langue volontairement réduite et détournée est déjà un indice de l'état d'esprit qui a régné lors de la conception des réformes.

Sur la description des connaissances à dispenser

Ce qui frappe avant tout, c'est l'extrême imprécision du descriptif. On est bien en peine de dire exactement quels sont les savoirs sur lesquels le professeur peut s'appuyer d'une année à l'autre ; ce que le texte confirme par ailleurs en précisant que le corps des connaissances obligatoires et exigibles est très réduit ! Il y a surabondance d'"exemples de", et pourtant très peu d'objets ou de méthodes peuvent être supposées connues des élèves à la fin d'une année scolaire. Pire : il est préconisé d'utiliser au cran $n+1$ des notions variées prétendûment connues qui, en fait, ne sont introduites nulle part au niveau n (si ce n'est – au mieux – sous forme de "sensibilisation").

Pour ce qui est des calculs, on se demande bien ce que les élèves sont supposés capables de calculer effectivement (sans appuyer sur les touches d'une machine). La présentation de la géométrie est avant tout expérimentale et descriptive (comme si le fait de tracer inlassablement des figures devait naturellement conduire à l'émergence du raisonnement) ; le seul théorème complet qui apparaisse jusqu'à la troisième incluse étant celui de Pythagore ! (Le théorème de Thalès n'est évoqué qu'avec des rapports entiers.) Pas d'axiomatique donc, même restreinte et simplifiée.

La cohérence : un problème essentiel

Le flou qui règne d'un bout à l'autre du texte donne une grande liberté d'interprétation et d'action au professeur. On peut considérer qu'il s'agit d'un bien ou d'une faute, nous discuterons de cela plus loin. Il semble en revanche incontestable qu'une telle absence de précision amène une grande variété dans les acquis des élèves en début d'année scolaire, l'intersection des connaissances étant très réduite. Ecartant les discours usuels sur l'"enrichissement qu'apporte la diversité des cultures", un enseignant honnête reconnaîtra l'énorme difficulté qu'il y a à conduire des classes aussi hétéroclites vers l'acquisition de solides connaissances communes.

Conséquences prévisibles

Les méthodes de calcul algébrique n'étant pas imposées, les élèves sont confrontés à des changements constants qui déroutent les plus faibles d'entre eux et coulent irrémédiablement ceux que leur origine sociale modeste empêchent de prendre des cours de soutien. Ce phénomène est déjà présent à l'école primaire : on enseigne ainsi de nombreuses présentations de la soustraction des nombres entiers (dont une fausse!); il ne fait que s'amplifier par la suite. Insistons : à mon avis, un élève en difficulté doit au moins pouvoir s'appuyer sur des méthodes bien définies et répétitives qu'il reproduira d'une année à l'autre, prenant ainsi progressivement confiance en lui. C'est exactement le contraire qui se produit désormais, ce qui conduit tout droit à la spirale déflationniste des programmes actuels.

Revenons à la géométrie : tout ordre logique étant banni de la présentation de cette science, les objets sont perçus comme propriétaires d'un corps de qualités coexistant entre elles sans liens apparents (par exemple, un carré à quatre angles droits, quatre cotés égaux, ses diagonales se coupent en leur milieu, à angle droit, mais il n'y a pas de relations entre ces propriétés). L'aspect déductif disparaît au profit d'un état d'esprit utilitaire basé sur des recettes; la déformation intellectuelle qui en résulte se poursuit tout au long de la scolarité : on ne raisonne plus, on tente “des coups” – au sens boursier du terme – en espèrant tirer le bon numéro.

Classes de première et de terminale

Nous nous fondons sur les programmes de première et de terminale. Ils sont assez proches des précédents par leur rédaction, et par leur conception de ce que doit être un cours de mathématiques, conçues plutôt comme une discipline de service des sciences appliquées. A nouveau, les points positifs sont, pour l'essentiel : le souci de voir illustrés par des problèmes effectifs et concrets les mathématiques enseignées; le souhait de voir se développer un dialogue entre l'élève et le professeur; la présence des idées géométriques. Il me semble clair que certains des rédacteurs ont souhaité amorcer l'étude de véritables objets mathématiques, celle des suites par exemple; la complexité native de ces concepts a ainsi conduit, dans le but de faciliter le travail d'apprentissage, à simplifier et réduire le cadre de l'étude en privilégiant les applications. Malheureusement, ces préoccupations, louables dans leur principe, ont été appliquées de telle sorte qu'elles en sont devenues nuisibles au développement d'une démarche véritablement scientifique.

De bonnes résolutions

La référence est l'ensemble du texte, dont le I surtout : exposé des motifs du programme officiel.

Les remarques faites dans la section consacrée à l'enseignement des collèges pourraient être partiellement reconduites à propos des programmes du de première et terminale, le record d'utilisation revenant ici au mot *situation*; *activité* figure toujours en bonne place, auprès de *mise en oeuvre* et *exploiter*; *technicité excessive* et *formalisme* sont féquemment utilisés pour désigner des choses visiblement très vilaines (poussé à l'extrême, le rejet de calculs trop techniques a conduit à de graves carences dans ce domaine).

S'ajoute à ce langage convenu de respectables souhaits qui n'ont eu hélas aucune prise sur la réalité; illustrés par les locutions :

pratique d'une démarche scientifique; capacité d'organisation et de communication; acquisition de méthodes; solidité sur les points essentiels; formation de **tous** *les élèves...*

On détecte là :

— d'abord une certaine foi en le pouvoir des mots : malencontreusement, les faits ne se plient pas à la simple expression d'une bonne volonté; et l'étude des capacités effectives des élèves à l'issue de la terminale C ne fait pas apparaître les qualités évoquées.

— La volonté manifeste de voir les *mêmes* connaissances partagées par par l'ensemble des élèves, ce qui revient à s'aligner sur le dernier de la dernière des terminales C (futures S) ...

Les mots rares ou proscrits

Les mêmes qu'avant : logique, raisonnement, juste, faux, rigueur, implication, équivalence; à ce niveau, on trouverait naturel d'amorcer une étude sérieuse des différents modes de raisonnement : direct, par contraposée, par l'absurde; l'usage de "et" de "ou"; la distinction entre conditions nécessaires, suffisantes; la méthode axiomatique; diverses généralités sur la résolution des problèmes. Mais il n'y a presque rien, comme si l'évocation d'un terme mathématique réel était en soi tout à fait inconvenante.

On observera que les directives concernant l'apprentissage du raisonnement (IV - 8, p. 37 , hors la récurrence) comportent six lignes dont deux sont consacrées à l'interdiction de toute étude sérieuse du sujet! Ce trait se retrouve constamment dans la suite : dès qu'une situation se présente, qui pourrait conduire à une généralisation utile; et donc motiver naturellement l'introduction de structures dont la connaissance sera indispensable lors des études supérieures, un commentaire restrictif bloque toute avancée dans ce sens.

La remarque ci-dessus concerne notamment : l'étude des limites, de suites, les opérations ensemblistes utilisées pour les probabilités, toute la géométrie vectorielle, les barycentres, le produit scalaire, les suites récurrentes, les configurations planes et spatiales.

Sur la description des connaissances à dispenser

A nouveau, tout est vague, flou, imprécis; les théorèmes sont rares (au sens le plus général du terme : affirmation comportant hypothèse et conclusion); le mode de travail suggéré s'apparente à du "bricolage à vue". S'ajoutent à celà des contraintes réductionnistes, déjà évoquées plus haut : *interdit* de définir une limite, une convergence, bref d'appeler un chat un chat (à nouveau, toutes les mathématiques réelles sont évacuées, au moment où il devient il possible de les introduire). Plusieurs cas ont déjà été relevés; on peut y ajouter les nombres complexes, l'intégration, les inégalités d'accroissement finis, presque toute la géométrie...

Trop des thèmes sont abordés sous forme d'"exemples de" sans qu'un objet mathématique soit précisemment désigné pour illustrer les idées abordées; il en est ainsi des polynômes, fractions rationnelles, systèmes d'équations linéaires, partitions d'un ensemble; de toutes les probabilités, des suites récurrentes, des symétries dans les études de fonctions, etc.... Rappelons aussi l'absence notable du mot *contre-exemple* (pas assez actif en situation sans doute).

On peut alors s'interroger avec quelque inquiétude sur ce qui doit être effectivement *prouvé* par le professeur; sur l'existence d'énoncés précis et utilisables et sur l'habitude qu'auront les élèves d'appliquer ces derniers. Il faut réaliser qu'un simple cours d'arithmétique de math. sup. contient plus de théorèmes rigoureux que l'ensemble des enseignements de première S et de terminale C, le tout pour une semaine de travail!

On déplorera enfin l'absence totale d'une initiation aux structures et à l'algèbre linéaire. L'introduction des calculatrices a camouflé quelques temps ce manque culturel et conceptuel; la banalisation de leur usage fait disparaître l'illusion et dévoile aux yeux de tous ce que sont devenus les cours de mathématiques du secondaire : une potion qui, vue de loin, a la couleur des maths, l'odeur des maths mais qui, en réalité ***n'est plus des mathématiques***.

Conséquences prévisibles

La mise en oeuvre des directives officielle confirme les craintes que l'on a d'une dénaturation de la pratique de notre science; le lecteur pourra utilement se reporter à l'article – déjà évoqué – de Michèle Artigue paru dans la gazette [1].

Les conséquences prévisibles sont donc *grosso modo* les mêmes qu'au niveau des collèges, confirmées et amplifiées; il n' a y a pas de quoi s'en étonner : l'unité de style montre à l'évidence que les programmes ont été rédigés dans le même état d'esprit (à si peu près). La lecture de ceux-ci achevée, les défauts constatés par les collègues et consignés en début d'article apparaissent naturels.

Opinion personnelle

Ces programmes sont mauvais; ils relèvent de l'application d'idées *a priori* : égalitaristes d'une part; les maths comme discipline de service pour les autres matières, de l'autre – et non d'une conception réaliste et fondée des mécanismes d'apprentissage (le savoir d'abord, le savoir-faire ensuite (!) etc...) qui permettrait aux élèves de sortir du lycée avec un corps de connaissances mathématiques utiles et formatrices. N'oublions pas que faire des mathématiques purement appliquées au niveau n amène l'impossibilité de franchir le niveau $n+1$; seules les toutes dernières années d'une formation peuvent être consacrées aux applications "pragmatiques".

Proposition en vue d'une amélioration

Une critique, fut-elle pertinente, n'est guère recevable si elle ne s'accompagne pas de suggestions positives, visant à pallier les difficultés rencontrées. En voici plusieurs, assez imprécises il est vrai, mais dont la mise en oeuvre même partielle donnerait rapidement des résultats appréciables. Bien entendu, rien n'est possible tant que les idéologies libérales ("une formation abstraite ne sert à rien, ce qui compte c'est un savoir-faire pragmatique directement adapté à l'industrie") ou pseudo-progressistes ("tout est culture", "les savoirs scolaires sont désuets et inutiles", "les jeunes compensent leurs lacunes scolaires par d'autres connaissances" etc.) ne sont pas mises à l'écart.

En premier lieu, il faut bien se persuader, quelle que soit la nostalgie que l'on en éprouve, de ce qu'un retour en arrière complet, c'est à dire à une série C différenciée dès la seconde, est impossible. Pour des raisons variées, l'opinion publique ne le supporterait pas. Une telle marche arrière me semblerait même nuisible : outre les réactions de rejet, une sélection trop précoce est toujours un gâchis. Il faut donc se placer dans le contexte actuel.

Un point de bon sens tout d'abord : le rétablissement d'un libellé très précis et explicite des connaissances exigibles, des applications, des types d'exercice dont la résolution peut être demandée. Outre le problème de la cohérence des enseignements décrit plus haut, il y a – il ne faut pas se voiler la face – celui de la compétence des enseignants chargés d'appliquer les directives officielles. On ne rend pas service à un enseignant dont les connaissances sont mal assurées, ni à sa classe, en lui laissant une trop grande liberté. Un guide sûr, clair, détaillé, rédigé par des mathématiciens (des vrais, mais pas forcément au sens de Dieudonné!) dont le souci d'efficacité aurait bridé les convictions politiques, serait au contraire une aide considérable. Le bas niveau de recrutement du CAPES et de l'Agrégation rend nécessaire cette évolution.

On peut ensuite suggérer une présentation modulaire des cours : les parties difficiles, formatrices pour les bons éléments, alternant avec des périodes calmes ou seraient enseignées des méthodes accessibles à (presque) tous. Encore une fois, il faut éviter de s'aveugler : les mathématiques sont difficiles, et si l'on veut former suffisamment de *bons* bacheliers scientifiques il est indispensable de réserver, chaque année, plusieurs périodes pour des cours qui ne seront compris que d'une minorité. Les notions non triviales ne peuvent être assimilées lors du premier contact. Certains ont tenté de pallier cette difficulté par une sensibilisation qui s'est révélée un échec : seule la confrontation avec les problèmes réels est formatrice, même si l'effet ne s'en fait sentir que l'année d'après.

Il est enfin indispensable de rétablir, au moins et première et terminale, l'enseignement des chapitres les plus utiles à l'enseignement supérieur : le langage ensembliste, l'algèbre linéaire; ou à la formation des esprits fins : géométrie axiomatique (sans excès), arithmétique; et de définir correctement les objets étudiés.

Conclusion

Je demeure persuadé de ce qu'aucune amélioration sensible de la réussite des étudiants ne peut être obtenue par une simple modification des méthodes d'enseignement du premier cycle. Il reste essentiellement deux possiblités pour mettre fin à la "boucherie" du premier cycle (dont les universitaires ne sont certainement pas responsables) :

— L'abaissement du niveau des diplômes. C'est la voie dans laquelle un précédent ministre – et son conseil spécial – souhaitaient engager les réformes (avec le camouflage usuel); le niveau atteint est déjà, il faut le dire, assez bas; faut-il franchir le pas et supprimer tout raisonnement rigoureux des premiers cycles? Certains le préconisent aux Etats-unis [3], il apparaît cependant que ce pays n'est pas un modèle de production de scientifiques autochtones de haut niveau... et l'incapacité des ingénieurs américains à manipuler des concepts logiques abstraits en inquiète plus d'un.

— Le relèvement de l'enseignement secondaire. Simple, assez peu coûteux, il demande avant tout de s'asseoir sur des idées reçues. En auront-nous le courage collectif?

Références

[1] Michèle Artigue "Les Programmes de Mathématiques des Terminales C, D, E" Gazette des Mathématiciens n° 55, Janvier 1993.

[2] Interview de Claude Deschamps dans Flashmaths, Janvier 1994.

[3] David M. Bressoud "Why do we teach Calculus? " The American Mathematical Monthly Vol. 99, Number 7, 1992.

[4] Baillot & Le Du "La pédagogie du vide" Puf.

[5] Maurice Maschino "Vos enfants ne m'intéressent plus".

[6] Philippe Nemo "Pourquoi ont-ils tué Jules Ferry" .

PS. En vue d'alimenter et de développer le débat, je recommande vivement la lecture des deux articles suivants :

"The Death of Proof", Cover Story, Scientific American, October 1993

et la réponse de :

Steven G. Kranz "The immortality of Proof", Notice of the American Mathematical Society, January 1994.