LIVRES

COMPTES RENDUS

K.A.M. theory and Semiclassical Approximation to Eigenfunctions

V.F. Lazutkin

Springer Verlag 1993

Commencez avec une table de billard dont vous aurez choisi le bord suffisamment lisse, ou plutôt avec le fibré tangent de celle-ci, ôtez les vecteurs tangents au bord de la table, identifiez un vecteur tangent à la table en un point du bord avec le vecteur réfléchi, mettez sur le tout le flot défini de la manière suivante : un vecteur tangent se propage à vitesse constante dans la direction qu'il définit et se réfléchit sur le bord suivant les lois de l'optique géométrique. Vous venez d'inventer le jeu de billard. Remplaçant la métrique euclidienne par une métrique quelconque et ajoutant un potentiel, vous obtiendrez les flots géodésiques généralisés, *sujet principal de ce livre. Ces flots hamiltoniens (passez à l'espace des phases, c'est-à-dire au cotangent dès que vous aurez compris la situation) généralisent les flots géodésiques des variétés riemanniennes (ni bord, ni potentiel), les systèmes mécaniques classiques (pas de bord), et les billards riemanniens (pas de potentiel).*

On connait les exemples classiques dans lesquels un tel flot est complètement intégrable : le flot géodésique d'une surface de révolution ou d'un ellipsoïde, le problème des deux corps (dans un repère tournant par rapport à un repère galiléen si l'on veut lever la dégénérescence qui vient de ce que chaque orbite d'énergie négative est périodique), le billard elliptique, ... La plus grande partie de l'espace des phases est alors feuilletée par des sous-variétés lagrangiennes invariantes qui, lorsqu'elles sont compactes, sont difféomorphes à des tores. De plus, il existe sur ces tores invariants des coordonnées dans lesquelles le flot devient linéaire (au revêtement universel), donc périodique ou quasi-périodique. Ce dernier cas est générique au sens de la mesure de Lebesgue.

Par une légère perturbation des exemples qui précèdent, on obtient les flots géodésiques sur une surface de révolution ou un ellipsoïde légèrement cabossés, le problème restreint des trois corps dans le cas lunaire, le billard presque elliptique. Pour ces nouveaux exemples, et plus généralement pour un flot hamiltonien suffisamment proche d'un flot complètement intégrable et vérifiant certaines hypothèses de non-dégénérescence, le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser (K.A.M.) montre qu'un ensemble de Cantor de tores lagrangiens invariants quasi-périodiques continue à exister. Cet ensemble de Cantor est d'autant plus gros au sens de la mesure que le flot considéré est plus proche d'un flot complètement intégrable. Dans les exemples, les solutions quasi-périodiques obtenues s'interprètent respectivement comme des géodésiques denses dans une région annulaire, des mouvements quasi-périodiques du corps de masse nulle *dans un repère tournant, des caustiques du billard.*

Considérons donc les solutions quasi-pérodiques "de type K.A.M." du flot "classique" de Hamiltonien $H(p,q) = 1/2||p||^2 + V(q)$*. Le but de ce livre est d'attacher à l'ensemble de ces solutions des* quasi-modes *de l'opérateur de "Laplace-Beltrami-Schrödinger"*

$$\mathcal{H}_\hbar = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V$$

agissant sur L^2*. La norme de* p *est prise dans une métrique sur les fibres du cotangent associée à la métrique sur la variété de configuration,* Δ *est le Laplacien pour cette métrique,* V *est un potentiel et agit dans* $\mathcal{H}_\hbar$ *comme opérateur de multiplication.*

Les quasi-modes sont des solutions approchées de l'équation aux valeurs propres de l'opérateur, d'autant meilleures que "la constante de Planck $\hbar$ *est plus petite". Ils fournissent des valeurs propres approchées de l'opérateur et des quasi-fonctions propres qui approchent des combinaisons linéaires de "vraies" fonctions propres (sous-espaces quasi-invariants dans* L^2*) correspondant à un paquet de "vraies" valeurs propres dans un intervalle de l'ordre de la constante de Planck. En déduire des fonctions propres approchées est une autre histoire.*

La méthode utilisée est la globalisation donnée par Maslov de la méthode B.K.W. (sorry, W.K.B. in english), pilier des résultats du type "approximation semi-classique". Elle consiste en la recherche de solutions asymptotiques de l'équation aux valeurs propres qui soient des fonctions oscillantes $ae^{(i/\hbar)S}$ *dont l'amplitude* a *se calcule récursivement sous la forme d'un développement en puissances de* $\hbar$*. L'idée de Maslov est bien décrite dans l'introduction du livre de Maslov et Fedoriuk (1981), et rappelée succintement dans l'introduction du présent livre : à l'ordre zéro, on trouve que la phase* S*, fonction sur l'espace de configuration, est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi du système classique : le graphe de la dérivée de* S *doit être contenu dans une hypersurface d'énergie constante* $H(\partial S/\partial q, q) = E$*. La globalisation d'une telle solution est simplement une "solution géométrique" de la dite équation, c'est-à-dire une sous-variété lagrangienne* L *contenue dans ce niveau d'énergie. A l'ordre un, la solution des équations de transport s'interprète naturellement comme une demi-densité sur* L *invariante par le flot du champ hamiltonien. Il s'agit d'un objet sans singularité, ces dernières n'apparaissant que dans l'opération de projection de* L *sur l'espace de configuration (intensité lumineuse infinie sur la caustique).*

A chaque sous-variété lagrangienne L *de l'espace des phases contenue dans une hypersurface d'énergie constante est attaché un opérateur* $\mathcal{M}_L$*, l'opérateur de Maslov de quantification des demi-densités sur* L*, qui associe à une demi-densité* a *sur la sous-variété* L *une demi-densité* $\mathcal{M}_L(a)$ *sur l'espace de configuration* Q*. En fait, il n'y a pas de demi-densité dans le texte et l'opérateur est présenté comme agissant sur les fonctions une fois fixée une forme volume invariante sur* L*. Cet opérateur généralise la notion de fonction oscillante aux cas où la phase (ou* *plutôt sa dérivée) est remplacée par la sous-variété lagrangienne L : en dehors de la "caustique", c'est-à-dire au voisinage d'un point où L se projette avec rang maximum sur Q, l'opérateur $\mathcal{M}_L$ est simplement défini par*

$$\mathcal{M}_L(a) = e^{(i/\hbar)S}(dS)^* a,$$

où S est une fonction génératrice *de L, ce qui signifie que L est le graphe de la dérivée de S. Une telle fonction n'est bien définie qu'à une constante additive près. En un point de la caustique, plusieurs démarches sont possibles : on peut représenter L par une phase génératrice dépendant d'un certain nombre de paramètres auxiliaires ou bien, ce qui est fait ici, tourner la tête et l'écrire comme graphe de la dérivée d'une fonction génératrice dépendant d'un certain nombre de variables de configuration q et d'un certain nombre de variables conjuguées p. Au niveau de l'analyse, le remplacement de certaines variables q par les variables conjuguées p se traduit par une transformation de Fourier partielle, qui intervient dans la définition de l'opérateur de Maslov au voisinage d'un point de la caustique. Dans tous les cas, la fonction génératrice S n'est définie qu'à une constante arbitraire près, et l'opérateur local de quantification contient donc une phase arbitraire.*

Le choix de phases locales compatibles est crucial pour le recollement de ces opérateurs locaux. Il est guidé par le fibré de Maslov *attaché à L, issu comme l'avait vu Arnold à la fin des années soixante, de la topologie de la grassmannienne lagrangienne. Les conditions de recollement obtenues s'interprètent comme des* conditions de quantification *du type Bohr-Sommerfeld.*

Les formules de commutation de l'opérateur de Maslov avec l'opérateur de Laplace-Beltrami-Schrodinger s'écrivent

$$\forall N, \quad \mathcal{H}_\hbar \circ \mathcal{M}_L(v) = \mathcal{M}_L\left(Ev + \sum_{s=1}^{N}(i\hbar)^s \alpha_s(v)\right) + O(\hbar^{N+1}).$$

La constante E est le niveau d'énergie contenant L, et les estimations sont uniformes par rapport à L variant dans l'ensemble des tores lagrangiens quasi-périodiques donnés par le théorème K.A.M. pourvu que v soit une fonction C^∞ au sens de Whitney sur cet ensemble. Ces formules permettent d'expliciter d'un seul coup les équations de transport que doivent vérifier les termes du développement asymptotique en puissances de $\hbar$ de l'amplitude des quasi-modes attachés à un tel ensemble invariant du système classique. On cherche en effet ces quasi-modes comme fonctions oscillantes globales, c'est-à-dire de la forme $\mathcal{M}_L(v)$. Autrement dit, on cherche à résoudre l'équation

$$\forall N, \quad \mathcal{H}_\hbar(\mathcal{M}_L(v)) = E\mathcal{M}_L(v) + O(\hbar^{N+1}).$$

Il "suffit" manifestement de résoudre les équations $\alpha_s(v) = 0$, $s = 1, 2, \ldots$.

Le livre, qui comporte sept chapitres et un appendice, est divisé en deux parties. La première (chapitres 1 à 4, 220 pages) est consacrée d'une part à une introduction à la géométrie symplectique et aux systèmes hamiltoniens, en particulier la description des systèmes complètement intégrables et de leurs feuilletages en tores lagrangiens invariants, d'autre part à l'énoncé et la démonstration complète (chapitre 4) du théorème de K.A.M. qui assure la persistance d'un ensemble de Cantor de tores lagrangiens invariants lorsqu'on perturbe suffisamment peu le Hamiltonien dans une topologie C^{r_0} *assez lisse. L'auteur a joint l'application qu'il a donnée de ce théorème à la démonstration de l'existence de caustiques au voisinage du bord d'un billard convexe suffisamment régulier ainsi qu'une description d'un certain nombre de résultats , dont les siens, sur la dynamique des "zones chaotiques", encore fort mal connue.*

La démonstration du théorème K.A.M. qui est présentée est assez forte pour impliquer l'existence d'un feuilletage lisse en tores qui contienne l'ensemble de Cantor des tores invariants obtenus. Un tel feuilletage n'est bien entendu pas unique mais permet de contrôler la mesure de l'ensemble des tores invariants, contrôle qui s'avère fondamental dans la deuxième partie pour évaluer le nombre de quasi-modes fournis par la méthode. Cette démonstration est par nature très technique et il peut être utile au lecteur novice de consulter le Séminaire Bourbaki de J.B. Bost sur K.A.M. pour la replacer dans le cadre plus abstrait d'un théorème de fonctions implicites dans certains espaces de Fréchet.

La deuxième partie (chapitres 5,6,7), plus courte (85 pages) mais très dense, est consacrée à la construction de l'opérateur global de Maslov attaché à l'ensemble des tores invariants donnés par le théorème K.A.M. Après avoir rappelé les notions d'analyse nécessaires – opérateurs non bornés, spectres, quasi-modes – il donne un exposé rigoureux de la construction, au cours duquel la théorie des classes de Maslov est faite complètement, en partie à partir du livre de Guillemin-Sternberg Geometric asymptotics *et d'un article de Turaev.*

Un appendice de Schnirelman donne une interprétation du lien classique-quantique dans le cas, opposé au précédent, d'un flot ergodique. Les quasi-modes ne sont plus, comme on pouvait s'en douter, localisés sur des objets géométriques attachés au flot, mais "asymptotiquement uniformément distribués", dans le sens où la norme L^2 *de leur restriction à un sous-ensemble tend vers la mesure relative du sous-ensemble lorsqu'on parcourt une suite bien choisie de valeurs propres. L'appendice étudie également les quasi-modes associés au complémentaire des sous-ensembles invariants donnés par K.A.M. dans le cas de systèmes à deux degrés de liberté (zones d'instabilité) et montre que le spectre est alors "asymptotiquement multiple".*

Pour finir, un petit mot sur l'histoire. Lazutkin a été le premier à démontrer, dans le cas particulier des difféomorphismes symplectiques en dimension deux, la possibilité de plonger dans un feuilletage lisse l'ensemble de Cantor de tores invariants donnée par le théorème K.A.M. Ce résultat a été généralisé aux difféomorphismes symplectiques en dimension quelconque par Svanidze, et aux *flots hamiltoniens par Pöschel dans sa thèse. De même, Lazutkin a été le premier a prouver l'existence d'un ensemble de mesure positive de quasimodes, résultat généralisé par Colin de Verdières. Ce livre est donc l'œuvre d'un des pionniers du sujet. Il n'est pas facile à lire mais vaut l'effort qu'il demande.*

N.B. Un grand nombre de coquilles subsistent dans le texte, c'est dommage.

P.S. Merci à Gaël Meigniez qui m'a aidé à rendre plus lisible ce compte-rendu.

Alain Chenciner
Université Paris 7

Algebraic Function Fields and Codes

H. Stichtenoth

Springer-Verlag, Universitext 1993 (260 pages)

H. Stichtenoth travaille dans le domaine de la géométrie algébrique et de ses applications aux codes correcteurs d'erreurs.

L'ouvrage dont on rend compte ici traite de ce sujet. Plus précisément l'auteur étudie les corps des fonctions algébriques d'une variable sur un corps K et les applications de cette théorie aux codes géométriques algébriques de Goppa. Bien évidemment, compte tenu des applications aux codes, le corps K n'est pas soumis à des conditions trop strictes; en particulier la théorie s'applique aux corps finis.

L'exposé est self content, très clair et très méticuleux. Les idées sont bien mises en évidence et on peut suivre leur développement grâce à un plan bien construit. Notons encore qu'on trouve dans cet ouvrage les résultats récents sur le sujet. Le choix d'un abord purement algébrique des corps de fonctions est particulièrement bien adapté. En effet il permet un exposé complet, et cependant très abordable des éléments nécessaires aux applications en vue. Si l'aspect géométrique n'est pas au premier plan, on peut toutefois s'y référer grâce à une annexe qui explique les liens entre corps de fonctions algébriques d'une variable et courbes algébriques. D'autre part dans les divers exemples donnés (en particulier au chapitre VI) on voit bien se profiler l'aspect courbes algébriques.

Les deux premiers chapitres plantent le décor : le chapitre 1 met en place les éléments algébriques de base, c'est-à-dire la notion de corps de fonctions algébriques d'une variable, les places, les valuations, le genre, le théorème de Riemann Roch, les différentielles de Weil, tandis que le chapitre 2 introduit les rudiments sur les codes et utilise les notions algébriques précédentes pour expliquer ce que sont les codes de Goppa; à titre d'exemples on retrouve des codes classiques.

Les chapitres 3, 4, 5, 6 sont dans le prolongement du chapitre 1, plus précisément : les chapitres 3 et 4 développent la théorie des corps de fonctions (c'est en fait le chapitre central où les outils qui permettent de *travailler sur les corps de fonctions, d'en évaluer le genre, sont présentés), le chapitre 5 s'intéresse au cas où le corps de base est un corps fini (on y trouve exposées la notion de fonction Zeta d'un corps de fonctions algébriques ainsi que la borne de Hasse-Weil, établie par la méthode de Stepanov et Bombieri, et ses améliorations) et enfin le chapitre 6 donne des exemples qui non seulement éclairent la théorie mais aussi possèdent un fort intérêt en eux mêmes (sont étudiés en particulier les cas des corps elliptiques et hyperelliptiques). Les chapitres 7 et 8 quant à eux prolongent le chapitre 2 donnant précisions et exemples sur les codes géométriques. On y trouvera en particulier un algorithme de décodage des codes de Goppa. Là encore on voit fonctionner sur des cas concrets l'outillage général des corps de fonctions.*

J'ai beaucoup apprécié la lecture de cet ouvrage qui me semble devoir devenir un livre de référence sur le sujet, à la fois par la clarté de l'exposé, par le point de vue adopté et par la richesse du contenu.

Robert Rolland
Marseille - Luminy
Labo. de Mathématiques Discrètes

200 % of nothing

A. K. Dewdney
édition Wiley and sons.

Les maths sont partout, et leur usage abusif plus encore, telle est la thèse de ce livre. Si vous connaissez quelqu'un qui ne sait pas encore que 5% d'inflation par an ne font pas 50% au bout de dix ans et ne font pas non plus 5% de perte de pouvoir d'achat annuel, qui joue au loto et qui pense qu'il a bien de la chance d'habiter dans une des 4% de rues bien éclairées, vu que 88% des crimes ont lieu dans des rues mal éclairées, alors conseillez-lui ce livre.

Il s'agit donc de débusquer les innombrables "tromperies par les maths", ou plutôt "tromperies par l'apparence de maths" de la vie courante. Ces tromperies peuvent être délibérées ou résulter de l'ignorance de leur auteur. Le livre commence par une classification de différents types de tromperies mathématiques comme les faux calculs de pourcentages, les échantillons statistiques biaisés, l'insuffisance des données, les erreurs sur les très grands ou les très petits nombres, la présentations tendancieuse de données (choix d'échelles, lissage de courbes, forme des diagrammes), erreurs logiques. Puis nous voyons, chapitre par chapitre dans chaque situation de la vie courante ces tromperies à l'œuvre. Les domaines considérés sont les jeux de hasard, les finances et la politique, la publicité, les médias, le risque médical, la consommation .... Ces chapitres sont issus principalement du courrier envoyé à l'auteur alors qu'il tenait la rubrique "récréations mathématiques" du Scientific American *par ce qu'il appelle des "math abuse detectives". Le livre se termine par deux chapitres où l'auteur réfléchit aux causes et propose des remèdes.*

Principale cause envisagée : le niveau mathématique de l'enseignement (aux USA bien sûr!), et aussi la mode *anti-math chez les jeunes et chez certains intellectuels et la disjonction entre math scolaires et vie de tous les jours. Les remèdes proposés : évidemment lire ce livre ! puis se persuader et persuader chacun que les maths sont partout, connaître quelques principes généraux (définition d'un pourcentage ou d'une probabilité par exemple) et savoir faire les hypothèses simplificatrices convenables permettant de faire une vérification rapide ("au dos de l'enveloppe").*

Notons que le chapitre 11 contient quelques réponses intéressantes à la question naïve "les maths qu'est-ce que c'est ? ". En guise de conclusion l'auteur tente de nous persuader que les maths sont vraiment partout et même plus : ce serait l'essence de toute chose. Sans le suivre jusque là, le lecteur qui referme ce livre est fortement incité à devenir lui aussi un "détective des tropmperies mathématiques".

François Digne
Université de Picardie