

LIVRES

LIVRES REÇUS

Géométrie projective

Jean-Claude Sidler

InterEditions

Un cours de niveau licence, Capes ou agrégation, sur la géométrie projective (birapport, dualité, homographies, faisceaux de coniques) agrémenté de nombreux exemples et exercices qui semble bien réaliser le souhait émis dans la préface : "Faire en sorte que les étudiants aiment cette discipline".

Intégrales simples (500 exercices corrigés)

G.Hirsch, J.Rouyer

Courbes en coordonnées paramétriques ou polaires (250 exercices corrigés)

G.Hirsch, G.Eguether

Masson

Deux abondants recueils d'exercices (avec solutions) avec une série de rappels de cours, destinés à l'enseignement de premier cycle (D.E.U.G., I.U.T., Classes préparatoires, écoles d'ingénieurs).

Intégration, analyse de Fourier, probabilités, analyse gaussienne.

P.Malliavin, H.Airault

Masson

Un cours d'analyse de niveau maîtrise centré sur la théorie de la mesure et en abordant les applications les plus importantes : mesure de Lebesgue et mesures de Radon, analyse spectrale

et analyse de Fourier, espaces hilbertiens " L^2 ", espaces de Sobolev, en soulignant les aspects probabilistes (espérance conditionnelle, martingales).

Programmation et édition scientifique, Calcul symbolique et formel pour réfléchir livres II et III

Jacqueline Zizi

Editions du Choix et Edition Archimède, 1993.

Après le livre I qui était une introduction aux systèmes de calcul formel Derive, Maple et Mathematica, l'auteur montre ici comment résoudre des problèmes de mathématiques à l'aide d'un système de calcul formel. Une partie importante est consacrée au traitement de texte Latex. Enfin une réflexion sur la façon d'enseigner les mathématiques à l'aide d'un ordinateur est proposée. Ce livre est principalement destiné aux enseignants des lycées, mais les enseignants du 1er cycle des universités peuvent y trouver matière à renouveler leur enseignement.

Algebra

Israel M. Gelfand, Alexander Shen

Birkhäuser 1993.

Ecrit conjointement par un mathématicien russe très célèbre (et travaillant maintenant aux Etats Unis) ce traité d'algèbre élémentaire expose ce que les étudiants sont censés savoir dans ce domaine en arrivant à l'Université

(ou en *Math. sup.*).

Squares

A.R. Rajwade

Cambridge University Press, 1993.

Le problème d'écrire un nombre entier comme somme de n carrés a été résolu par Fermat pour $n = 2$ et par Lagrange pour $n = 4$. Il peut s'étendre à d'autres anneaux, notamment les anneaux de polynômes ou de séries formelles. Ce livre fait le point sur l'état du problème dans les différentes structures où il se pose.

Cohen-Macaulay Rings

Winfried Bruns, Jürgen Herzog

Cambridge University Press, 1993.

La notion d'anneau de Cohen-Macaulay est au carrefour de deux importantes directions de recherche actuelles en algèbre commutative. Le développement principal reste la théorie homologique des anneaux commutatifs, mais il y a maintenant des applications surprenantes en combinatoire algébrique. Ce livre de haut niveau fait le point sur ces sujets.

COMPTES RENDUS

An introduction to harmonic analysis on semisimple Lie groups

V.S. Varadarajan

Cambridge studies in advanced mathematics 16. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

Ce livre, comme son titre l'indique, se veut une introduction à l'analyse harmonique sur les groupes de Lie semi-simples. L'auteur présente certains as-

pects de la théorie, en les illustrant par l'exemple de $SL(2, R)$; il rend compte essentiellement des travaux de Harish-Chandra.

L'objectif principal de l'analyse harmonique sur les groupes de Lie est de décomposer l'espace $L^2(G)$, d'un groupe de Lie G , en "somme" de représentations unitaires irréductibles de G (formule de Plancherel) ou, ce qui est équivalent, d'écrire la mesure de Dirac de support l'élément neutre comme une "somme" de caractères de représentations de G (formule d'inversion de Fourier). Cette théorie a des origines diverses, mais elle prend sa source essentiellement dans la théorie classique des séries de Fourier et la théorie des représentations des groupes finis; le mérite revient à Peter et Weyl, par leurs travaux sur les groupes compacts, d'unifier ces deux théories dans les années 20. Puis il a fallu attendre les travaux de Haar sur la mesure qui porte son nom dans les années 30 et les travaux de Von Neumann sur les algèbres d'opérateurs, pour qu'une théorie des représentations des groupes localement compacts non commutatifs soit développée; notamment, a été établie l'existence d'une formule de Plancherel pour une large classe de groupes dits de type I. On s'est alors posé le problème de décrire explicitement cette formule pour les groupes de Lie en termes de leur géométrie.

Dans cette théorie, les groupes semi-simples occupent une place privilégiée de par la finesse des résultats obtenus et la similitude des méthodes utilisées avec celles de la théorie des groupes p -adiques ou finis. Les premiers exemples traités en détail fu-

rent $SL(n, C)$ (Gelfand et Naimark, 1950) et $SL(2, R)$ (Harish-Chandra, 1952). Les développements qui ont suivi sont l'oeuvre, presque en solitaire, de Harish-Chandra; ils ont abouti à la publication en 1976 de sa formule de Plancherel. Le livre de Varadara-jan est un panorama du cheminement de cette théorie. Donnons maintenant quelques détails sur son contenu.

Le premier chapitre est une introduction à l'analyse harmonique non commutative, l'auteur y présente quelques motivations et quelques aspects.

Le deuxième chapitre présente brièvement la théorie des représentations des groupes compacts; les démonstrations sont simplement esquissées. Deux approches à la formule de Plancherel se dégagent alors, que j'appellerai l'approche invariante et l'approche non invariante : la première consiste à ramener, à l'aide de l'intégration sur les orbites, les questions d'analyse harmonique non commutative à des questions d'analyse harmonique commutative sur un tore compact maximal, et la seconde consiste à décomposer toute fonction en somme de coefficients de représentations. Les deux approches utilisent la décomposition spectrale de l'algèbre des opérateurs différentiels bi-invariants sur G , c'est-à-dire invariants par translation à droite et à gauche.

Les chapitres 3, 4 et 5 présentent quelques généralités sur les représentations des groupes localement compacts et leurs caractères, la construction de certaines représentations qui interviennent dans la formule de Plancherel et l'approche infinitésimale de Harish-Chandra pour l'étude des représentations des groupes semi-

simples.

Le chapitre 6 est consacré à la formule de Plancherel des groupes semi-simples complexes et de $SL(2, R)$. Ici c'est le point de vue invariant qui est développé. L'auteur donne une construction de la série discrète de $SL(2, R)$, mais ne dit malheureusement rien sur le cas général; ceci est d'autant plus regrettable que la série discrète des groupes semi-simples est l'une des plus belles parties de la théorie et que la construction proposée ne se généralise pas telle quelle.

Le chapitre 7 donne une esquisse de la démonstration du célèbre théorème de régularité de Harish-Chandra : toute distribution invariante (par automorphismes intérieurs) sur un groupe de Lie semi-simple qui est vecteur propre de l'algèbre des opérateurs différentiels bi-invariants est une fonction localement sommable et analytique sur l'ouvert (dense) des éléments réguliers; c'est le cas par exemple des caractères de représentations.

Le chapitre 8 est peut-être la partie la plus originale de ce livre. Il est consacré à la formule de Plancherel de $SL(2, R)$ par l'approche non invariante; il contient notamment la définition de l'espace de Schwartz et l'étude du développement asymptotique des coefficients. Il est à noter ici que Harish-Chandra lui-même semblait privilégier l'approche invariante jusqu'au milieu des années soixante, puis, vraisemblablement sous l'influence des idées de Langlands, il s'orienta vers l'approche non invariante en développant ce qu'il appelle la philosophie des formes cuspidales.

Présenter une théorie à travers un exemple n'est pas un exercice facile;

certaines constructions particulières à l'exemple ne sont pas éclairantes pour le cas général. Je pense que Varadarajan a réussi dans une large mesure à présenter les idées les plus importantes qui ont contribué au développement de l'analyse harmonique sur les groupes semi-simples. Le livre est agréable à lire. On peut cependant regretter le manque de références précises ou de guide pour la littérature surtout pour les chapitres 6, 7 et 8.

Le livre de Varadarajan n'est pas la première tentative d'introduire cette théorie par des exemples. En 1986, Knapp a publié un excellent livre [K] qui se veut aussi une introduction à la théorie des représentations à travers des exemples. On peut dire, de façon schématique, que le but de Knapp est de présenter la classification des représentations tempérées des groupes semi-simples, c'est-à-dire le support de la mesure de Plancherel, alors que le but de Varadarajan est la description de cette mesure. Il est donc naturel que l'on trouve une grosse partie commune aux deux livres, mais elle est traitée avec des optiques différentes. Je pense qu'ils sont plutôt complémentaires que concurrents. Je signale, pour terminer, la parution en deux volumes d'un livre de Wallach [W] qui présente, de façon détaillée, certains aspects de la théorie des représentations ainsi que la formule de Plancherel.

[K] B.A.W. Knapp, Representation theory of semisimple groups, an overview based on examples, Princeton university Press, Princeton, 1986.

[W] B.N.R. Wallach, Real reductive groups I et II, Academic Press,

Boston, 1988 et 1992.

Abderrazak BOUAZIZ
Université de Poitiers

CRC handbook of Lie group analysis of differential equations. Volume 1 : symmetries, exact solutions and conservation laws.

N.H. Ibragimov (Ed.),
CRC Press, 1994, 429 pages
Prix : £68

Distribué en France par Offilib.

Ce livre a été signalé à mon attention par un prospectus de son éditeur, pour l'instant peu connu chez nous. Son titre indique bien qu'il s'agit d'un manuel de référence, donnant une présentation unifiée des innombrables travaux sur le sujet depuis Sophus Lie. Comme il n'était guère facile jusqu'à présent de se frayer un chemin dans une jungle de publications aux styles très divers, on ne peut que se féliciter de ce projet ambitieux auquel collaborent W.F. Ames, R.L. Anderson, V.A. Dorodnitsyn, E.V. Ferapontov, R.K. Gazizov, N.H. Ibragimov et S.R. Svirshchevskii.

Le premier volume, seul paru à ce jour, se divise en trois parties de longueurs inégales : la première présente rapidement (73 pages) les idées essentielles de la théorie, la deuxième (270 pages) est consacrée à de très nombreux exemples d'application, en général issus de la physique mathématique; la dernière (55 pages) traite des méthodes numériques. Le reste du volume est occupé par une brève introduction, des index assez bien faits et, bien entendu, une très longue liste de références. Mes compétences limitées

m'ont seulement permis de lire avec soin la première partie et de regarder la deuxième.

Nul lecteur des traités modernes n'ignore que la théorie des groupes et algèbres de Lie est née de questions "assez marginales" sur les équations différentielles, proches des considérations sur les équations algébriques qui avaient suscité la théorie de Galois : il s'agissait par exemple de savoir quand une équation différentielle scalaire $f(x, y, y', \dots, y^{(m)}) = 0$ est "résoluble", par réductions successives de l'ordre. La réponse, dans le cas analytique complexe, est que c'est possible si l'algèbre de Lie de l'équation est résoluble — ladite algèbre de Lie est l'ensemble des champs de vecteurs du plan (x, y) dont le flot envoie graphes de solutions sur graphes de solutions. Si marginales que fussent ces questions, Lie n'a pas jugé indigne de son génie de leur consacrer beaucoup de temps, puisqu'il s'est attaqué avec succès au problème de classier les équations d'ordre m arbitraire — en classifiant, bien sûr, des algèbres de Lie de champs de vecteurs holomorphes sur \mathbb{C}^2 .

C'est par cette classification (pour $m \leq 2$, ce qui facilite les choses) qu'Anderson et Ibragimov commencent leur exposé. Le style reste "d'époque", c'est-à-dire qu'il faut réfléchir pour savoir si ce que l'on fait est local ou global, et que certains énoncés ne sont vrais que "génériquement, aux points génériques". Une telle critique pourra paraître dirimante aux enfants de Bourbaki, mais cette manière d'écrire les mathématiques présente l'avantage d'être simple, concise et accessible à un éventail assez large de lecteurs

(l'ouvrage ne s'adresse pas uniquement aux mathématiciens, qui auront peut-être intérêt à lire le traité d'Ibragimov, **Transformation groups applied to mathematical physics**, Reidel, 1983).

Au lieu de faire agir seulement les "transformations ponctuelles" (celles du plan (x, y)), on peut considérer un (pseudo-)groupe en principe plus gros, celui des **transformations de contact** de l'espace $Oxyy' \dots y^{(m)}$ des jets d'ordre m : ce sont les transformations qui préservent la "structure de contact" $dy^{(j)} = y^{(j+1)}dx$. Bien entendu, la notion se généralise au cas où $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^p$, ce qui permet de passer des équations différentielles aux systèmes d'équations aux dérivées partielles. Un des gros succès de Lie a été de classier en ces termes les équations du premier ordre ($p = m = 1$, n arbitraire) au voisinage des points réguliers du feuilletage caractéristique. Dans ce cas, le "groupe" des transformations de contact de $Oxyy'$ est en effet beaucoup plus gros que le sous-groupe obtenu en relevant les transformations de Oxy , assez gros pour "redresser" toutes les équations.

Lie avait l'intuition que ce miracle ne se produirait pas en général, ce que son élève Bäcklund a confirmé : pour $p > 1$ (resp. $m > 1$), toute transformation de contact d'ordre m s'obtient en relevant une transformation ponctuelle (resp. d'ordre 1); comme les équations aux dérivées partielles, elles, sont de plus en plus compliquées quand m et p augmentent, il n'y a plus assez de transformations de contact pour les classier.

A la suite de Lie, on peut donc se poser deux types de questions : quelles

sont les équations invariantes (ou équivalentes à des équations plus simples) sous l'action de transformations appartenant à ces "petits" groupes, et quels groupes "plus gros" faire agir? Une réponse tentante à la seconde question, popularisée par A.M. Vinogradov, consiste à passer à la limite $m = +\infty$; on a alors énormément de transformations de contact, mais il faut prendre ses précautions si l'on ne veut pas obtenir des objets fantômes agissant sur un espace fantôme.

A cette théorie encore dans l'œuf, Johnson et Ibragimov ont apporté une contribution intéressante sous la forme des "groupes de Lie-Bäcklund". L'idée est de considérer des champs de vecteurs sur l'espace Oxy à coefficients dans un espace de jets d'ordre fini, que l'on relève en des transformations de contact infinitésimales (formelles) de l'espace des jets d'ordre infini; les groupes formels à un paramètre qu'ils engendrent sont des séries formelles par rapport au paramètre dont chaque coefficient est défini sur un espace de jets d'ordre fini. Dans les bons cas, ces séries convergeront. . .

On peut enfin adjoindre à ces transformations encore locales les transformations non locales introduites par

divers auteurs et que je ne puis ici définir en détail. Etant donnée une équation, on peut donc chercher ses symétries ponctuelles (transformations de l'espace Oxy qui la préservent), ses symétries de contact, ses symétries de Lie-Bäcklund et ses symétries non locales. C'est à un inventaire de ce que l'on sait faire en la matière (avec références) qu'est consacrée la deuxième partie du livre; il y fallait beaucoup de courage, et il est évident que ce "catalogue" rendra service aux spécialistes comme aux utilisateurs.

Un mot encore : les auteurs reconnaissent, dans ce premier volume, avoir quelque peu manqué à leur devoir d'exhaustivité en parlant avant tout de ce qui les intéresse, comptant sur leurs lecteurs pour leur suggérer des références à inclure dans les volumes suivants. Je souhaite donc que mes quelques réserves n'empêchent pas ce livre de trouver des lecteurs en France : le sujet le mérite, et il n'est pas certain que la théorie atteigne avant quelques siècles l'état où cette approche "zoologique" paraîtra désuète.

Marc CHAPERON

Université Denis Diderot (Paris 7)