

LIVRES

LIVRES RECUS

Elliptic curves

A. W. Knap

Mathematical notes Princeton University Press, 1992.

La première moitié de ce livre traite de la théorie élémentaire des courbes elliptiques (équations de Weierstrass, théorème de Mordell-Weil sur \mathbb{Q} , réduction mod p). La deuxième partie nettement moins élémentaire aborde l'aspect formes modulaires et "programme de Langlands"; ce qui rend le livre à la fois d'actualité et périmé

Géométrie douce

J. M. Castera et H. Jolis

Edité par les auteurs à l'Atelier 6 1/2, rue des cinq diamants 75013 Paris.

Un joli livre décrivant les motifs géométriques de l'art arabo-andalou (notamment l'Alhambra). Hormis le plaisir esthétique, l'originalité vient de la recherche de règles permettant de construire les motifs (et d'en créer, vous pourrez essayer). Il ne s'agit pas à proprement parler d'un livre de mathématiques, mais le parfum y est. Disponible à l'adresse indiquée et dans

quelques librairies.

J. Gabay nous signale qu'il réédite quelques grands classiques de Gauthiers-Villars, notamment :

Borevitch, Shafarevitch : *Théorie des nombres (traduit du russe). Un classique qui reste un des meilleurs livres d'introduction à la théorie des nombres.*

Banach : *Théorie des opérations linéaires. Par un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle.*

Enriques : *Leçons de géométrie projective (traduit de l'italien). Par un des maîtres de l'"école italienne" de géométrie algébrique, un classique et élémentaire cours de géométrie projective.*

Kamke : *Théorie des ensembles (traduit de l'allemand). Un traité basique et classique de théorie des ensembles. L'auteur, spécialiste des équations aux dérivées partielles, est mieux connu en Allemagne où il a exercé une grande influence sur les mathématiques.*

COMPTES RENDUS

Nilpotence and Periodicity in Stable Homotopy Theory

RAVENEL

Princeton University Press.

Le but de ce livre est de donner un exposé de l'approche "chromatique" de la théorie de l'homotopie stable. Le livre semble s'adresser à deux auditoires distincts : d'abord, au mathématicien qui est totalement innocent sur les idées homotopiques et ensuite au spécialiste qui veut voir les preuves de certains résultats annoncés il y a quelques années par l'auteur, M. J. Hopkins, et J.H. Smith.

Construire un tel livre, à la fois utile et

attrayant pour les deux est une tâche difficile et l'auteur y est seulement parvenu en partie. Sa réussite est de plus compromise par un grand nombre d'inexactitudes et de coquilles. Tous les numéros de pages de l'index doivent être diminués de 2 par exemple. Néanmoins ce livre offre les premières preuves publiées de nombreux résultats importants et, en cela, constitue une contribution importante.

Le livre commence par l'énoncé des théorèmes principaux de E.Devinatz, Hopkins et J.H.Smith (Annals of Math. 128, 1988, 207-242 et à paraître). Pour une

autre introduction, on pourra consulter l'excellent article de Hopkins lui-même (in *Homotopy theory*, London Math. Soc. Lecture Note Series 117). Il y a deux résultats fondamentaux, qui réponds affirmativement à des conjectures formulées par Ravenel à la fin des années 70 : le théorème de nilpotence et le théorème de périodicité. Pour illustrer l'étrangeté des énoncés auxquels l'auteur est amené par son souci de débiter élémentairement, citons son énoncé du théorème de nilpotence : il a expliqué qu'un endomorphisme ("self-map") d'un CW-complexe fini X est une application f d'une suspension $\Sigma^d X$ de X vers X et qu'elle est nilpotente si une composée de la forme

$$\Sigma^{nd} X \xrightarrow{\Sigma^{(n-1)d} f} \Sigma^{(n-1)d} X \longrightarrow \dots \longrightarrow \Sigma^d X \xrightarrow{f} X$$

est homotopiquement nulle; mais il n'a pas introduit le "bordisme complexe", MU . Son énoncé est alors :

"Il y a une théorie de l'homologie MU_* telle qu'un endomorphisme d'un CW-complexe soit stablement nilpotente si et seulement si un itéré de $\overline{MU}_*(f)$ est trivial."

Il est étrange qu'il n'ait pas défini "stablement nilpotent"; en fait il aurait pu dire "nilpotent" sans changer le sens de l'affirmation. De plus nous observons que le théorème tel qu'il est énoncé affirme l'existence d'une théorie d'homologie "MU" avec une propriété frappante. Mais il est très facile de construire un tel spectre : choisissons un représentant de chaque classe d'équivalence homotopique de complexes finis; comme cela donne un ensemble, nous pouvons former le bouquet de ceux-ci et considérer la théorie de l'homologie E représentée par l'objet obtenu. Alors E remplace "MU" dans le théorème précédent. Le point est que le quantificateur est erroné; on a une théorie donnée à l'avance, le bordisme complexe, avec des propriétés bien connues. On a ainsi un test effectif pour savoir si un endomorphisme est nilpotent ou non. On peut remplacer la théorie MU , qui a un anneau de coefficients compliqué et est donc difficile à calculer, par la famille des K -théories de

Morava, dont les anneaux de coefficients sont des corps gradués et sont donc assez accessibles au calcul. Rappelons que pour chaque nombre premier p et chaque $n \geq 0$ on dispose d'une K -théorie de Morava $K(n)$ avec anneau de coefficients donné par $K(n)_* = \mathbb{F}_p[v_n^{\pm 1}]$ pour $n > 0$ (avec $|v_n| = 2(p^n - 1)$) et $K(0)_* = \mathbb{Q}$. Pour citer Hopkins, c'est une sorte de Nullstellensatz de Hilbert.

Les chapitres suivants contiennent des informations sans démonstration sur les groupes d'homotopie, le bordisme complexe et, abruptement, les propriétés cohomologiques des "groupes de stabilisateurs de Morava" (i.e., les groupes d'automorphismes stricts des groupes formels de dimension un, sur un corps algébriquement clos). De nouveau, le souci d'une approche élémentaire empêche l'auteur de donner le type de discussion qu'on espérait et l'amène à des phrases comme : "For reasons too difficult to explain here ...". Il y a une erreur dans l'argument donné pour le théorème des sous-catégories épaisses ("algebraic Thick Subcategory Theorem") (3.4.2) et on peut objecter à l'assertion que la construction par Steve Mitchell d'un complexe fini X dépendant de n tel que $K(n)_* X \neq 0$ mais $K(n-1)_* X = 0$ est "maintenant ... un corollaire du théorème de périodicité" puisqu'une version de ce résultat est utilisé dans la preuve du théorème de périodicité.

Le théorème des sous-catégories épaisses de Hopkins et Smith est un fait remarquable et extrêmement utile sur la catégorie de l'homotopie stable.

Rappelons que la catégorie de l'homotopie stable S est une catégorie additive triangulée, dont les objets sont appelés spectres. Dans ce contexte les espaces et les théories cohomologiques (généralisées) ont une relation symétrique : un espace X détermine un spectre $\Sigma^\infty X$ et une théorie cohomologique $E^*(-)$ détermine un spectre E ; et de plus

$$\bar{E}^n(X) = \{\Sigma^\infty X, E\}^n$$

(où $\{, \}^*$ désigne le groupe abélien gradué de morphismes dans S). Si X et Y sont

des complexes finis, alors :

$$\{\Sigma^\infty X, \Sigma^\infty Y\} = \varinjlim [\Sigma^n X, \Sigma^n Y],$$

mais en général la définition des morphismes est plus sophistiquée.

Fixons un nombre premier p et restreignons nous à la catégorie \mathcal{C} des spectres p -locaux finis, c'est-à-dire des spectres connexes X tels que $H_*(X, \mathbb{Z})$ soit un $\mathbb{Z}_{(p)}$ -module de type fini. Une sous-catégorie de \mathcal{C} est épaisse ("thick") si elle est fermée pour la formation de rétractes et telle que si deux des trois spectres d'une suite cofibrée (parfois appelée "triangle distingué") sont dans la sous-catégorie alors le troisième également. Clairement la sous-catégorie \mathcal{C}_n des spectres X tels que $K(n-1)_*X = 0$ est épaisse, tout comme la catégorie vide (sans objet) et la catégorie \mathcal{C}_∞ contenant seulement les spectres contractiles. Des travaux datant des années 70 montrent que ces catégories épaisses forment une filtration :

$$0 \subseteq \mathcal{C}_\infty \subseteq \dots \subseteq \mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}.$$

Le théorème des sous-catégories épaisses affirme qu'il n'y a pas d'autre sous-catégorie épaisse de \mathcal{C} . Pour citer encore une fois Hopkins, c'est un calcul du "spectre (au sens maintenant de l'algèbre commutative) de la catégorie \mathcal{C} ."

Ce théorème est utilisé de la façon suivante : pour voir que tout spectre de \mathcal{C}_n satisfait une propriété, il suffit de montrer que cette propriété est "générique" (i.e. est héréditaire par rétractes et cofibrations) et d'exhiber un seul exemple de spectre dans \mathcal{C}_n vérifiant la propriété étudiée. C'est la méthode utilisée pour prouver le théorème de périodicité, le "Smashing Theorem" et le théorème de convergence chromatique, pour citer les principaux résultats de ce livre.

Le théorème de périodicité de Hopkins et Smith traite des propriétés des " v_n -applications". Soit X un spectre p -local fini. Un v_n -endomorphisme de X est un morphisme de spectres $\Sigma^d X \rightarrow X$, pour un d , qui induit un isomorphisme dans $K(n)$ et une application nilpotente dans $K(m)$ pour $m \neq n$. Le théorème de périodicité a deux parties. (i) Si $X \in \mathcal{C}_n$ alors X possède un

v_n -endomorphisme. (ii) Si $\alpha : \Sigma^d X \rightarrow X$ et $\beta : \Sigma^e Y \rightarrow Y$ sont des v_n -endomorphismes et si $f : X \rightarrow Y$ est une application quelconque, alors il existe des entiers a et b tels que $ad = be$ et le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{ad} X & \xrightarrow{\alpha^a} & X \\ \downarrow \Sigma^{ad} f & & \downarrow f \\ \Sigma^{be} Y & \xrightarrow{\beta^b} & Y \end{array}$$

Les objets de \mathcal{C}_n sont ainsi munis d'un opérateur naturel bien défini à une puissance près.

Le chapitre 5 expose la déduction du théorème des sous-catégories épaisses à partir du théorème de nilpotence (bien qu'il y ait une erreur sérieuse dans l'argument donné pour (5.1.5)). Le chapitre suivant explique comment fabriquer un exemple de X appartenant à \mathcal{C}_n avec un v_n -endomorphisme. Cet argument est dû essentiellement à Jeff Smith mais l'auteur introduit ici plusieurs belles simplifications ainsi que la première preuve publiée.

Le chapitre 7 développe (de nouveau sans démonstration) assez d'information sur les localisations à la Bousfield pour énoncer le "Smashing Theorem" et le théorème de convergence chromatique. Les preuves de ces derniers sont publiées ici pour la première fois.

Soit $X \rightarrow L_E X$ la E_* -équivalence universelle à droite (pour celles partant de X); elle existe pour n'importe quelle théorie homologique E d'après le travail de A.K.Bousfield. D'une importance toute particulière est le cas de $E = K(0) \vee \dots \vee K(n)$, et l'on écrit $L_n X$ pour $L_E X$. Typiquement le foncteur L_E n'a pas un bon comportement; par exemple si E est l'homologie mod p (ou entière) L_E ne commute pas avec les limites directes homotopiques. Un foncteur localisation L est dit "smashing" s'il commute avec les limites directes homotopiques ou, de manière équivalente, si l'application naturelle

$$(LS^0) \wedge X \rightarrow LX$$

est une équivalence pour tout spectre X . Le "Smashing Theorem" affirme que L_n est "smashing" pour tout n . La preuve

de ce théorème, qui est due à Hopkins et Ravenel, utilise, hormis le théorème des sous-catégories épaisses, des résultats profonds sur la cohomologie des groupes de stabilisateurs de Morava.

Ces foncteurs localisation s'insèrent dans une tour sous X , la "tour chromatique" :

$$\cdots \rightarrow L_n X \rightarrow L_{n-1} X \rightarrow \cdots \rightarrow L_0 X.$$

La version du théorème de convergence chromatique (due aussi à Hopkins et Ravenel) prouvée ici affirme que si X est un spectre p -local fini alors la limite inverse homotopique de cette tour est X lui-même; on peut le reconstruire à partir de ses localisations chromatiques.

Le dernier chapitre contient une preuve abrégée du théorème de nilpotence. Il y a trois appendices (qui constituent plus du tiers des pages du livre) sur la théorie élémentaire de l'homotopie, BP et des outils de théorie des représentations pour l'argument de Smith présenté au chapitre 6.

Haynes MILLER
M.I.T., Cambridge USA

Model Theory, Encyclopedia of Mathematics and its applications, Vol. 42

W. HODGES

Cambridge University Press.

La théorie des modèles est une branche des mathématiques relativement récente - ses premiers théorèmes généraux ont trois quarts de siècle - qui a commencé par étudier les structures algébriques en accordant une place privilégiée au langage. Ainsi, qu'un corps commutatif soit totalement ordonné si et seulement si -1 n'y est pas somme de carrés peut-être considéré comme un résultat, assez élémentaire, de théorie des modèles et qu'un corps commutatif totalement ordonné qui vérifie le théorème de la valeur intermédiaire pour les fonctions polynômes vérifie toutes les propriétés du premier ordre du corps des réels est un résultat, moins élémentaire et historiquement important, de la théorie des modèles. Actuellement la théorie des modèles a d'une part envahi des domaines tels que la combinatoire, l'arithmétique,

l'analyse, la géométrie et a d'autre part connu un développement autonome considérable. Le livre de Hodges permettra au novice d'aborder un domaine en expansion rapide et au spécialiste de combler mainte lacune.

L'ouvrage commence par une intéressante préface qui indique : "there is no way that one can sensibly cover all the material in the book so that the later bits follow from the earlier ones". La couleur est clairement annoncée. Une rédaction précise, de nombreux renvois, le fait que le lecteur soit constamment informé de ce qui est démontré et de ce qui ne l'est pas sont venus à bout des préventions du rapporteur et l'incitent à ne pas traiter le sujet de dissertation suivant : "étant entendu que les théories scientifiques ne progressent pas de façon linéaire, faut-il les exposer de façon non linéaire ?".

A vrai dire une autre phrase de la préface était plus inquiétante : "to give this book a shape and to make it different from books which other people might write, I chose to concentrate on construction rather than classification". Ce souci délibéré d'originalité n'a point produit un monstre (et donne un plan qui n'est pas très différent de celui de l'ouvrage classique de Keisler, "Model Theory for Infinitary Logic").

Hodges a écrit le seul ouvrage que l'on puisse recommander aux mathématiciens les plus divers souhaitant étudier en profondeur la théorie des modèles et n'ayant aucune connaissance de logique au départ. L'ouvrage a près de 800 pages, une bibliographie très soignée, un index nettement insuffisant ("présentation" et les résultats sur l'élimination des quantificateurs de la section 2.7 sont omis), des notes historiques savantes (parfois trop détaillées, mais les trois lignes de Shelah citées à la page 339 intéresseront les historiens et témoignent d'un style lapidaire et clair qui dément la page 322), un aspect physique engageant et un prix non prohibitif (environ 525 Francs en Grande-Bretagne).

L'ouvrage comporte douze chapitres et un appendice. Même si le développement non linéaire et l'hétérogénéité du discours qui

mêle, sans doute pour d'excellentes raisons pédagogiques, résultats profonds et exercices d'intérêt secondaire (théorème 10.3.8, théorème A.1.4) écartent toute comparaison avec Bourbaki, le premier lecteur venu remarquera qu'il faut attendre la page 265 pour voir apparaître le théorème de compacité. On songe à une critique célèbre et amusée d'Artin sur la théorie de Galois vue par Bourbaki. Dans le cas présent il n'est pas nécessaire d'avoir assimilé les 264 premières pages pour aborder le chapitre 6 qui est bâti autour de ce théorème. L'ouvrage est évidemment beaucoup plus un livre de référence qu'un traité systématique que l'ampleur du sujet rend à peu près impossible ou qu'un manuel d'enseignement d'usage courant.

Le choix des sujets traités est en général excellent; l'auteur a sagement écarté toute tentation encyclopédique et insiste sur le fait que presque chaque chapitre introduit une méthode modèle-théorique de construction. Si cela est indiscutable pour le chapitre 3 (qui introduit la "Skolemisation"), pour le chapitre 6 évoqué ci-dessus, pour le chapitre 7 centré sur les modèles dénombrables, l'omission des types et les structures universelles homogènes de Fraïssé, pour le chapitre 8 qui étudie les modèles existentiellement clos et pour le chapitre 11 consacré à la méthode d'Ehrenfeucht-Mostowski, cela est moins clair pour d'autres chapitres, mais il n'y a pas lieu d'ouvrir un débat idéologique : après tout, Schubert (resp. Ives) a baptisé sonates (resp. symphonies) des suites de morceaux qui obéissent rarement aux lois du genre et qui sont plus belles (resp. plus originales) que la plupart des sonates (resp. symphonies) bien composées. L'ouvrage donne un reflet assez fidèle, modulo quelques omissions inévitables, de l'essentiel de la théorie des modèles connue à ce jour, avec nombre de raffinements techniques dûs à l'auteur. Dans certains cas il ne peut être exhaustif, car certaines démonstrations sont trop longues ou trop secondaires pour être données intégralement ou, difficulté plus fondamentale, la théorie (c'est le cas de la stabilité) est déjà très élaborée et fait l'objet de diversses monogra-

phies; dans d'autre (aspects géométriques), il ne peut être achevé car la théorie est en plein essor; enfin on peut se demander s'il était nécessaire de consacrer tout un chapitre aux théories de Horn (et si c'est là qu'il fallait glisser, assez subrepticement me semble-t-il, les ultraproducts et le théorème de Keisler-Shelah), mais la tendresse de l'auteur pour les "word-constructions" qui en font partie est compréhensible, et ce chapitre plaira aux catégoriciens et sera utile aux informaticiens qui, quand il s'agit de théories de Horn, ont eu, à diverses reprises, le sentiment d'avoir inventé la poudre.

Il y a peu d'erreurs, et elles sont presque toujours typographiques et peu nuisibles. Il faut modifier l'exercice 6 de la page 418 (en remplaçant produit par puissance) pour qu'il devienne correct; le premier \equiv de la ligne 3 de la page 691 doit être remplacé par \cong . Chaque chapitre a en exergue une citation (il semble s'agir d'une mode récente qui fournira un sujet de thèse à un sociologue) et il y a des digressions que le rapporteur a trouvées parfois éclairantes (la condition nécessaire pour qu'un mathématicien soit normal donnée au haut de la page 532 à laquelle l'auteur semble, à juste titre, ne pas croire), souvent inégalement utiles (les méfaits des bandits du Colorado à la page xi, l'Alhambra à la page 132, la relation entre Ives et Shelah à la page 322, etc.).

Ah, si l'auteur avait pu faire plus court! Tel qu'il est, l'ouvrage est manifestement plus réfléchi, étonnamment lisible, toujours instructif, parfois amusant et témoigne d'une grande maîtrise et d'une ouverture certaine à d'autres approches. Il deviendra rapidement indispensable à qui s'intéresse à la matière et permettra au lecteur qui l'aura assimilé de se lancer dans la recherche. Le lecteur scrupuleux devra souvent lui adjoindre d'autres textes, le lecteur pressé le lira en diagonale, le lecteur débutant et soucieux de le rester lui préférera d'autres livres, mais s'il faut se contenter en 1994 d'un seul ouvrage sur ce sujet, c'est de celui-là.

G. SABBAGH
Université Paris VII

From Number Theory to Physics

SPRINGER

Itzykson, Luck, Moussa, Waldschmidt.

Le livre "From Number Theory to Physics" consiste en 14 cours sur des thèmes de théorie des nombres et de physique théorique. Les textes sont basés sur des conférences données au Centre de Physique, Les Houches en mars 1989. Les auteurs (et le sujet de leurs contributions respectives) sont Cartier (fonctions zêta), Bost (surfaces de Riemann, jacobiniennes et variétés abéliennes), Cohen (courbes elliptiques), Zagier (formes modulaires), Gergondey (courbes elliptiques "décorées"), Stark (théorie de Galois des corps de nombres et fonctions zêta), Reyssat (théorie des revêtements et surfaces de Riemann), Beukers (théorie de Galois différentielle), Christol (nombres p -adiques et ultramétricité), Sénéchal (géométrie des réseaux), Katz (quasi-cristallographie), Bellissard (gap labelling pour les opérateurs de Schrödinger), Cvitanovic (applications du cercle dans lui-même, rotations irrationnelles) et Yoccoz (problèmes des petits dénominateurs). Les éditeurs sont Waldschmidt, Moussa, Luck et Itzykson. Tous les textes sont extrêmement bien rédigés et agréables à lire. Deux d'entre eux constituent des synthèses exceptionnelles de leurs sujets : celui de Bost en théorie des nombres et celui de Bellissard en physique. Toutefois le livre présente une difficulté : clairement conçu pour être pédagogique, il informe le lecteur sur ce qu'il devrait savoir plus qu'il ne l'enseigne. Il y a beaucoup de preuves, comme par exemple dans le texte de Stark, mais il y a aussi de nombreuses parties pour lesquelles on ne donne que des explications et des références. En comparant les contributions variées, on s'aperçoit qu'il y a des répétitions entre les introductions soigneusement orientées, suivies par un cours complet mais rapide sur les questions plus profondes spécifiques à chaque cours. De plus le niveau de sophistication varie grandement d'un chapitre à l'autre. Il est vrai que, comme annoncé dans la préface des éditeurs, chaque auteur donne un texte court et indépendant ("selfcontained") ne nécessi-

tant que peu de connaissances préalables et également original et complet sur les résultats récents ; mais ils constituent plus souvent un exposé riche et utile qu'un cours structuré. Pour le lecteur connaissant bien les sujets traités, "From Number Theory to Physics" fournit d'excellentes synthèses sur des sujets fondamentaux de théorie des nombres et de ses applications à la physique théorique, qui reflètent les orientations de recherche des auteurs respectifs. Pour l'étudiant ou le non-spécialiste le livre fournit un guide excellent et inspiré qui peut servir de tremplin pour une étude plus systématique. Pour tous les lecteurs ce livre stimulera et développera la compréhension des sujets couverts. Pour commenter individuellement les contributions :

* Le texte de Cartier est adapté au débutant et c'est l'un des plus solides pédagogiquement. De plus il contient de bons exercices, il pose les fondations de son sujet mieux que presque tous les autres.

* Le chapitre de Bost est beaucoup plus difficile bien qu'il contienne aussi des notions bien connues. Il se distingue des autres contributions mathématiques par la profondeur des sujets traités, même si les preuves ne sont pas données en détail (le texte, déjà long, deviendrait démesuré). Il fournit également une excellente liste de références. Il y a quelques couacs dans les notations mais ceci ne devrait empêcher personne de profiter de cet article remarquable.

* Le texte de Cohen ne suppose aucune connaissance (au moins sur les courbes elliptiques) et est limpide. Il amène le lecteur jusqu'à des questions aussi difficiles et importantes que la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer. Le manuscrit souligne un des attraits profonds de la théorie des nombres : des problèmes faciles à énoncer peuvent être durs à résoudre.

* Le texte de Zagier fournit une introduction originale et éclairante aux formes modulaires pour $PSL(2, \mathbb{Z})$ et ses sous-groupes de congruence. Il y a un effort pour éviter les répétitions avec les autres cours.

* Gergondey traite les espaces de modules

de courbes elliptiques munies de structures additionnelles reliées aux problèmes de compactification, désingularisation et non-unimodularité; par exemple une courbe elliptique avec le choix d'une 1-forme holomorphe et d'une base orientée de l'homologie.

* Stark a écrit un cours original et complet sur les fondements de la théorie de Galois, des nombres algébriques et des fonctions zêta. Même la définition d'un corps est donnée. Le texte est une merveille pédagogique et fournit une excellente matière pour un premier cours sur ces sujets.

* Le chapitre de Reyssat peut être vu comme un complément à celui de Stark ou un prélude à celui de Beukers; il a réellement tenu compte des autres auteurs, tout comme Zagier. La présentation est élémentaire, claire et originale, elle souligne les relations entre la théorie de Galois pour les corps de fonctions d'une variable et pour les corps de nombres, mettant l'accent sur l'aspect géométrique supplémentaire dans le cas des corps de fonctions.

* Beukers n'a pu être présent au colloque des Houches et son texte ne correspond donc pas à une présentation orale. Il traite des applications de la théorie de Galois aux équations différentielles linéaires. Le pionnier du développement moderne de ce sujet est Kolchin mais son travail est difficile à lire et le texte de Beukers améliore cette situation en fournissant une introduction experte et bien écrite à la théorie et quelques applications.

* Particulièrement bienvenu dans le texte de Christol est le paragraphe sur le sujet délicat de l'intégration sur les groupes ultramétriques. Les intégrales de bases sont des cas spéciaux de la définition pour un groupe profini. Après avoir introduit l'intégration à valeur dans la clôture algébrique de la complétion p -adique des nombres rationnels, l'auteur introduit brillamment les fonctions gamma et zêta p -adiques. Recommandé même pour les spécialistes.

* Le matériel du chapitre de Sénéchal est plus directement à l'interface de la théorie des nombres et de la physique que les cours précédents. Il s'agit des

propriétés de base des réseaux dans un espace vectoriel réel, avec l'accent sur leurs propriétés métriques (les sous-groupes finis de $GL(n, \mathbb{Z})$ apparaissant comme groupes de symétrie), les relations avec les pavages et la cristallographie. C'est un beau texte présentant un sujet difficile.

* Le texte de Katz entreprend d'expliquer les problèmes surgissant dans l'étude des quasi-cristaux. Ce sujet est motivé par la découverte des quasi-cristaux icosaédraux en 1984 et est directement lié à la physique.

* Le texte de Bellissard est superbe. Il décrit l'expression précise des *gap labelling* pour des bases de spectres compliqués en calculant les K -groupes des algèbres d'observables apparaissant comme des objets naturels associés au mouvement de l'électron. L'auteur s'appuie sur le point de vue dont il est un des contributeurs majeurs, à savoir que la topologie et la géométrie non commutatives développées par Alain Connes forment le contexte mathématique approprié pour remodeler certains aspects de la mécanique quantique. Plusieurs applications sont décrites comme la propagation d'électrons sur un réseau dans un fort champ magnétique.

* Cvitarovic décrit comment les applications du cercle dans lui-même fournissent des exemples de systèmes dynamiques classiques qui sont assez complexes pour exhiber beaucoup des caractéristiques du "chaos". Parmi les outils mathématiques, on trouve les développements en fractions continues et la suite de Farey.

* Enfin le chapitre de Yoccoz est aussi consacré aux systèmes dynamiques, cette fois aux problèmes des petits dénominateurs c'est-à-dire à l'apparition de petits dénominateurs dans les calculs de stabilité d'une orbite périodique d'un système dynamique hamiltonien sous de petites perturbations. Yoccoz passe en revue les progrès dans l'étude de ces orbites périodiques depuis les travaux de Poincaré et Denjoy.

En conclusion ce livre amène efficacement le lecteur au contact avec la vaste culture des contributeurs et fournit un guide éclairant sur les sujets qu'il devrait approfondir

dans une bonne bibliothèque, la liste de références pour chaque chapitre à la main.

P. COHEN
CNRS - Collège de France

ASTÉRIQUE

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique.
Revue éditée par la Société Mathématique de France.

ASTÉRIQUE 213** . — HARVEY (F. R.), LAWSON (H. B.), *A theory of characteristic currents associated with a singular connection.*

268 pages, prix public (TTC) : 220 FF, prix membres SMF : 154 FF

This monograph presents a general construction of characteristic currents for singular connections on a vector bundle. It develops, in particular, a Chern-Weil theory for smooth bundle maps $\alpha : E \rightarrow F$ which, for smooth connections on E and F , establishes formulas of the type

$$\phi = \text{Res}_\phi \Sigma_\alpha + dT$$

Here ϕ is a standard characteristic form, Res_ϕ is associated smooth "residue form computed canonically in terms of curvature Σ_α is a rectifiable current depending only on the singular structure of α , and T is canonical, functorial transgression form with coefficients in L_{loc}^1 . The theory encompasses such classical topics as : Poincaré-Lelong Theory, Bott-Chern Theory, Chern-Weil Theory, and formulas of Hopf. Applications include : A new proof of the Riemann-Roch Theorem for vector bundles over algebraic curves; A C^∞ -generalization of the Poincaré-Lelong Formula ; Universal for the Thom class as an equivariant characteristic form (i.e., canonical formulas for a de Rham representative of the Thom class of a bundle with connection); A Differentiable Riemann-Roch-Grothendieck Theorem at the level of forms and currents. A variety of formulas relating geometry and characteristic classes are deduced as direct consequences of the theory.

ABONNEMENT 1993

Prix public Europe : 1215 FF Hors Europe : 1515 FF

Prix Membres Europe : 730 FF Hors Europe : 1030 FF

DISTRIBUTION

Membres de la S.M.F. : *Maison de la S.M.F., Case 916, Luminy, 13288 Marseille Cedex 09*

France et Etranger (excepté les Etats-Unis, le Canada et le Mexique) :

Maison de la S.M.F., Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 09

ou *Offilib, 48 rue Gay-Lussac, 75240 Paris Cedex 05*

Etats-Unis, Canada, Mexique :

American Mathematical Society, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940, U.S.A.

COURRIER DES LECTEURS

LETTRE OUVERTE SUR LE DOSSIER RUSSIE

AUJOURD'HUI, 3 septembre 1993, je prends connaissance de la Gazette des Mathématiciens d'avril 1993 dont la première partie du DOSSIER/DEBATS est consacrée à un Dossier/Russie. Il est suivi, dans sa seconde partie, d'une "Lettre Ouverte à Igor Chafarevitch", écrite par Laurent Schwartz.

Ce grand mathématicien, qui a consacré tant d'efforts pour la Défense des Droits de l'Homme et spécialement des scientifiques persécutés, est particulièrement qualifié pour dénoncer avec "consternation" et "indignation" une activité qui ne peut qu'attiser la haine "porteuse de tant de crimes" commis par antisémitisme. Action d'autant plus inacceptable qu'elle émane d'un savant dont le prestige augmente la responsabilité.

Cette lettre est à sa place dans la revue de la Société Mathématique de France et témoigne pour ses membres.

Mais pourquoi est-elle suivie de cette liste de plus de 200 noms de co-signataires? chacun tient-il à proclamer qu'il est indigné? Qu'il n'est pas antisémite? Cela en France de nos jours, n'exige pas un grand courage! Je crains que cela marque surtout le désir de ne pas avoir l'air moins résolu que les américains dont la réaction nous précède d'une année. Pour de très nombreux signataires dont l'âge et les circonstances de leur vie n'ont pas donné l'occasion d'agir, n'aurait-il pas été mieux de faire, en silence, une méditation sur le passé proche et sur ce que l'avenir peut exiger de nous?

A une époque dramatique où chacun pouvait se sentir menacé, à côté des criminels et des victimes, combien d'honnêtes gens sont restés sans réaction, par obéissance, aveuglement volon-

taire, inertie chez nous au temps de Vichy, devant les exclusions de collègues ce qui les désignaient pour les camps d'extermination, et, un peu plus tard, pour l'accueil des rares rescapés et de leur famille? Chacun de nous, individuellement, aurait-il pris de courageuses initiatives si les circonstances le demandaient?

C'était il y a cinquante ans. Mais en Union-Soviétique, il y a trente ans, bien que Staline ait disparu, il fallait de l'héroïsme pour protester contre la répression organisée par le pouvoir. Nous nous inclinons devant ceux qui ont eu ce courage, par exemple les "99 Mathématiciens de Novossibirsk" qui ont signé une lettre pour la défense de leur collègue Essenine - Volpine. (Chafarevitch fut l'un d'eux). Le samizdat nous révéla aussi les noms de nombreux professeurs qui, à Moscou, Kiev et autres lieux, ont signé des lettres de protestation. Certes, ils n'ont pas tous été envoyés au goulag? Ils ont "seulement" été exclus de leurs tâches d'enseignants, comme mon amie Galina, professeur de mathématique à l'institut Pédagogique Lénine, de Moscou, qui a pu survivre avec son fils en devenant vendeuse d'appareils de Physique.

Ceci concernait les années 1960-1970.

Or, quelle est la première ligne (p.20) du rapport signé d'un professeur russe sur les Problèmes de la Recherche Scientifique dans son pays? Citons le début : "A partir des années 1960, on a pu observer une "diminution des crédits alloués par le gouvernement soviétique à la science, l'éducation et la culture."

Sans commentaires. Effaçons ces trois lignes, lisons à partir de "Après le mois d'août 1991..." et prenons connaissance des difficultés actuelles de "l'Académie Russe des Sciences, les Universités d'Etat et les écoles secondaires d'élite", sujet du rapport. Notre problème actuel est : que peut et doit être l'aide apportée par la Communauté Scientifique Française à son homologue de l'ex-URSS? C'est ce

qu'étudie le dossier en question.

Aujourd'hui, 3 septembre 1993, le Prix Nobel Georges Charpak nous déclare (texte du Figaro) : "J'occulte en général les mauvais souvenirs. J'ai choisi le présent et l'avenir (...). Dachau n'appartient plus à la vie et pourtant l'expérience demeure (...). La France pro-

gresse en dépit de la résurgence de ses démons (...)."

Qu'il en soit ainsi en France, dans le Monde, y compris en Russie!

*Lucienne FELIX
Ex-Exclue*

— UNE LETTRE DE BRUNO POIZAT —

CHERS AMIS,

J'ai été flatté de voir ma prose paraître à la page 12 de la dernière gazette; j'en ai aussi été surpris. Ces lignes étaient extraites d'une lettre privée — pas d'une lettre ouverte — que j'ai écrite à Kantor pour lui dire que j'étais violemment opposé à son initiative; je lui ai aussi dit, sans doute imprudemment, qu'étant le destinataire de cette lettre il pouvait en faire ce qu'il voulait. Le résultat est que l'expression de ma pensée y trouve une vigueur proche de la brutalité. J'espère que vous voudrez bien corriger cette impression en publiant cette lettre, plus argumentée, mais hélas plus longue.

Pourquoi je suis opposé aux bourses de 50 dollars à l'usage des mathématiciens ex-soviétiques.

1. La modicité des sommes proposées indique clairement qu'il s'agit d'une action de type caritatif et non pas d'une collaboration scientifique; s'il faut faire la charité aux ex-soviétiques, il vaut mieux la diriger vers des catégories sociales réellement défavorisées (comme les retraités, les militaires, et surtout les militaires à la retraite!), et non pas vers les mathématiciens, qui sont des privilégiés, premièrement en tant qu'intellectuels, et deuxièmement parce que nul ne songe à supprimer l'enseignement des mathématiques dans les universités (contrairement à celui des humanités, et je ne parle pas seulement de l'histoire du Parti Communiste!). Un des privilèges, non des moindres, est d'avoir des contacts à

l'extérieur du pays.

2. Il est exact qu'au taux de change actuel cinquante dollars mensuels représentent un salaire, ce qui met le mathématicien ex-soviétique cinq ou six fois plus bas que le mathématicien, disons, du Bangla Desh. Mais chacun sait que le montant du salaire n'est pas le chiffre le plus significatif pour évaluer les ressources d'un employé d'un gouvernement anciennement communiste; naturellement, la comparaison du niveau de vie d'un mathématicien doit être faite avec celui d'un citoyen ordinaire, pas avec un nouveau riche, un businessman ou un mafioso, qui ne constituent qu'une minorité non significative.

3. Profiter de la conjoncture monétaire pour assurer à quelques-uns un niveau de vie supérieur à 50 dollars par mois est un bricolage qui s'apparente au trafic de devises, et au travail au noir. Nous savons combien coûte à nos compatriotes la survie d'un mathématicien: l'Université de Lyon verse chaque mois sur mon compte 17.000 F, mais mon salaire réel est de 30.000 F (Je reconnais que c'est trop pour le service que je rends à la société; ce que je reçois de l'Université du Kazakhstan à Karaganda — 1/4 d'un salaire de professeur quand je n'y réside pas — est beaucoup plus modeste); de ce revenu je dois reverser une partie substantielle en impôts locaux et globaux. Quelle proportion de ces 50 dollars ira aux états ex-soviétiques, ou bien à leur système de santé? Je vous laisse deviner ce qu'il en sera si tout se passe selon les vœux des bénéficiaires!

4. L'attribution de ces bourses ne se

fait pas uniformément pour tous les professionnels des mathématiques travaillant dans des institutions ex-soviétiques; elle se fait à partir d'un dossier scientifique; en clair, cela signifie qu'elles sont réservées aux mathématiciens reconnus à l'étranger, qui constituent certainement la classe sociale en exURSS qui a le moins besoin d'assistance, car nombre d'entre eux ont eu l'occasion ces derniers temps d'aller relever les compteurs partout où ils étaient connus. De plus, cette sélection veut éviter le canal de l'establishment académique ex-soviétique; je déplore comme tout le monde la médiocrité et l'absence de sens civique des cadres de la société ex-soviétique, et j'admire leur surprenante aptitude à survivre aux changements, mais je pense que ce n'est pas à nous de décider de leur remplacement. Pour moi, cette initiative procède de la main-mise de puissances étrangères sur le potentiel scientifique d'un pays; j'ai même envie de dire "d'une puissance étrangère" — pardonnez mon anti-américanisme primaire — ce qui est d'ailleurs particulièrement inquiétant si cette puissance, qui prétend imposer sa culture au reste du monde, est incapable de former les scientifiques dont elle a besoin.

5. Cette action ne peut pas avoir l'effet souhaité : la survie des mathématiques soviétiques ne dépend que des ex-soviétiques eux-mêmes; ou bien ils estiment que c'est important, ou bien non, et nous n'y pouvons rien. Une intervention extérieure de ce type ne peut que faire apparaître l'activité scientifique comme quelque chose qui ne les concerne pas; et puis, pensez à la chaude ambiance qui va s'installer dans les départements, entre les heureux boursiers et les autres! La situation en exURSS n'est pas une fatalité : elle est ce que les citoyens de ce pays en font, et une grande part de leur avenir tient au comportement de l'intelligentsia. Ce dont ils manquent, ce n'est pas tellement de dollars que de respect d'eux-mêmes, et de confiance en leurs dirigeants (ce terme devant être pris au sens large). Je ne pense

pas que les mathématiciens sortent grandis, dans l'esprit de leur concitoyens, de cette affaire de bourses.

6. J'ai une expérience déjà longue de coopération avec des collègues soviétiques; tout ce que nous avons fait l'a été sur la base d'un partenariat, de manière équilibrée; je n'ignore pas les difficultés de l'heure, ni la gêne qu'elle peuvent introduire dans nos rapports avec nos collègues. Par exemple, je sais qu'il faut à nos invités une certaine force d'âme pour se comporter décemment vis-à-vis du gros paquet que représente pour eux leurs indemnités de séjour, au lieu de le considérer comme un trésor de guerre à ne pas écorner. S'il faut claquer du fric pour la coopération avec l'ex-URSS, ayons le courage de l'investir, de façon plus classique, dans des activités proprement scientifiques, contribuant au maintien d'une pensée créative et originale; je suggère par exemple le soutien à des publications scientifiques dans des langues autres que l'anglais.

7. L'obsession de la charité (à bon marché) est une maladie de nantis. Cette fois, il y aura moins de dégâts qu'en Somalie, et il est probable qu'aucun assisté ne se fera descendre; mais je crois qu'elle est toujours dangereuse : ce n'est qu'une façon d'ignorer les hommes différents de nous, ou de récompenser chichement ceux qui acceptent de se soumettre à nos normes. Allons dans les états de l'ex-URSS, apprenons leurs langues, travaillons avec leurs mathématiciens; ce sont des pays passionnants, voyons ce que nous pouvons en tirer. En un mot, traitons nos collègues ex-soviétiques comme des êtres humains — comme les mathématiciens bangladais, les mathématiciens palestiniens, ou même les mathématiciens américains — mais, pour l'amour du Ciel, cessons de les considérer comme les objets de notre charité. Bien cordialement,

Bruno POIZAT
Professeur honoraire, Karaganda
Professeur, Lyon 1

 UNE LETTRE DE JEAN PIERRE BOURGUIGNON

J'ai été très gêné par le contenu de l'article intitulé "*La symplectification de la science*" paru dans le numéro 54 de la Gazette de novembre 1992. Il aborde en effet un sujet très important, à savoir les rapports que les Mathématiques entretiennent avec d'autres sciences, mais je trouve qu'il le fait d'une façon inadaptée à rendre les nuances que ce sujet requiert.

Le mode de présentation choisi est *péremptoire*. On dit quelquefois que c'est le mode le plus efficace de démonstration. En l'occurrence j'en doute, car dans cet article le slogan remplace très (trop!) souvent l'énoncé informatif. Ainsi comment accepter un raccourci comme "*La physique, c'est la géométrie*" alors que, plus avant dans l'article, il est reconnu (comme il se doit) qu'une grande partie de la Physique (la Théorie des Champs pour ne citer qu'un exemple) est toujours en attente d'un modèle mathématique qui permette de lui donner un statut théorique cohérent. Pire, ce manque de rigueur conduit à des lapsus (que les lecteurs de la Gazette, gens cultivés, ont probablement corrigés d'eux-mêmes) comme cette affirmation erronée selon laquelle "*la forme symplectique rassemble les $2n$ directions indépendantes de l'espace des phases en paires*", ou encore celle selon laquelle "*les géométries symplectiques de la sphère et de la selle sont distinctes de celle du plan*" alors que cette distinction est faite en utilisant des disques géodésiques pour une géométrie *riemannienne*.

Discuter du rôle que les Mathématiques peuvent jouer dans d'autres sciences nécessite qu'on définisse précisément les termes de l'étude que l'on veut mener et surtout qu'on ne prenne pas trop de libertés avec l'Histoire, car cette aventure a déjà mobilisé beaucoup d'énergies. Ceci est d'autant plus vrai que les mathématiciens terminent tout juste leur convalescence du long accès de splendide isolement (doublé quelquefois d'une crise aigüe d'arrogance) qu'ils ont connu pendant une partie de ce siècle. Ils en ont bien entendu profité pour continuer à travailler et à développer leur discipline de façon remarquable... mais en oubliant quelquefois que d'autres en faisaient autant pour leur propre compte et avec leur problématique propre.

Je crains donc que, dans ces conditions, l'article aboutisse à l'effet inverse de celui que je pense pouvoir prêter aux auteurs (que je connais bien), à savoir *attirer l'attention sur une théorie* qui a pu longtemps apparaître comme pauvre (voire achevée) mais *qui connaît actuellement des développements passionnants*, et qui est effectivement un bon exemple historique de l'aide que des structures abstraites peuvent apporter dans la formulation de problèmes variés et dans leur résolution.

Pour ne pas seulement céder à une réaction d'humeur, je voudrais contribuer au débat sur les deux points suivants :

- proposer une autre lecture historique en m'appuyant sur un certain nombre de documents qui montrent que le cheminement des mathématiciens et des physiciens vers la géométrie symplectique a été beaucoup plus complexe que celui présenté, et que les mathématiciens eux-mêmes n'ont pas toujours été convaincus du bien-fondé de l'étude de la géométrie symplectique;
- engager une discussion sur la notion de *modèle* car c'est un des points de passage obligé de tout débat sur le thème de l'article.

En parcourant l'Histoire

Ainsi qu'il est dit dans l'article, c'est Lagrange qui, dans son *Mémoire sur les éléments des orbites des planètes* paru en 1808, remarque que les équations du mouvement perturbé peuvent prendre une forme particulièrement simple si on introduit une forme antisymétrique sur les fonctions définies sur l'espace des mouvements. La théorie ne prendra toute sa généralité qu'avec Sir William R. Hamilton vers le milieu du siècle en particulier en la libérant de son aspect perturbatif.

La fusion de l'électricité et du magnétisme proposée par James C. Maxwell en un *électromagnétisme* fournit une première situation physique hors de la Mécanique où une structure antisymétrique se révèle pertinente. La possibilité d'une interprétation symplectique sera manifeste après l'introduction par A.H. Lorentz, puis par H. Poincaré et A. Einstein, du cadre de pensée de la Relativité Restreinte au tournant du siècle : on peut alors modéliser le champ électromagnétique par une 2-forme extérieure sur l'espace-temps de dimension 4, une des équations de champ disant justement que cette 2-forme est fermée.

Il est à ce propos étonnant de noter que Herbert Grassmann a développé le *calcul extérieur* (*Ausdehnungslehre*) au moment précis où Maxwell faisait sa découverte et ce avec des motivations purement algébriques.

Ce développement de la géométrie symplectique ne devait pas être complètement convaincant puisqu'on trouve sous la plume de Félix Klein dans [1] le jugement suivant sur les développements de la géométrie symplectique : "*Trotz der unzweifelhaften Schönheit dieses Gebietes möchte ich jedoch vor einem einseitigen Studium warnen... In der Tat kann der Physiker wenig, der Ingenieur gar nichts von diesen Theorien für seine Aufgaben brauchen. Sie sind sozusagen ein Schema mit leeren Fächern, in welche die bunte Welt der Erscheinungen erst eingeordnet werden muß, um sie sinnvoll*

erscheinen zu lassen"¹. Dans l'édition de ces leçons faite en 1926 par R. Courant et O. Neugebauer, ceux-ci insèrent la note de bas de page suivante : "*Wir haben diese, durch die Entwicklung der letzten Jahren widerlegten Bemerkungen stehen lassen, da sie zu der gerade von Klein oft genannten Erscheinung einen Betrag liefern, wie scheinbar rein mathematische Theorien auch für die Nachbarwissenschaften unvermutet von größter Bedeutung werden*"². Les événements récents auxquels ils font allusion sont bien sûr l'apparition de la Mécanique Quantique dont la formulation suppose que l'on parte du point de vue hamiltonien (donc à la base symplectique), et non du point de vue des forces (point de vue newtonien) ou lagrangien (point de vue variationnel).

¹ "Malgré l'indubitable beauté de cette branche, je voudrais cependant mettre en garde contre une lecture à sens unique... En réalité, de ces théories, le physicien ne peut tirer pour ses travaux que très peu, et l'ingénieur presque rien. Elles constituent en quelque sorte un schéma avec des cases vides qui prennent un sens seulement après que le monde bigarré des phénomènes (de la Nature) y ait été disposé".

² "Nous avons laissé figurer ces remarques, qui sont contredites par les développements de ces dernières années, car elles donnent confirmation d'un phénomène souvent évoqué par Klein lui-même, à savoir que des théories mathématiques apparemment tout à fait pures peuvent se révéler d'une pertinence extrême pour les sciences voisines".

Le texte de l'article affirme que *la géométrie de la relativité générale et des théories de jauge connue sous le nom de géométrie riemannienne est une généralisation courbe de l'ancienne et familière géométrie euclidienne*. En fait la géométrie riemannienne a été développée pour elle-même vers le milieu du XIXème siècle par B. Riemann d'abord, mais ensuite par E.B. Christoffel et G. Ricci-Curbastro vers la fin du siècle. C'est au contraire après avoir discuté de ces théories mathématiques avec son ami M. Grossmann qu'A. Einstein les a choisies dès 1913 comme cadre mathématique pour développer sa Relativité Générale. Les théories de jauge ne viennent que plus tard, en 1917-1918, sous la plume d'Hermann Weyl qui s'intéresse à une unification de l'électromagnétisme et de la gravitation : dans son livre "*Raum, Zeit, Materie*", il se préoccupe sous le nom d'*Eichinvarianz* de l'invariance des équations sous des changements locaux de référentiels. Il reviendra sur cette formulation de multiples fois. On peut noter à cette occasion que les écrits d'Hermann Weyl sur les rapports entre Mathématiques et autres sciences (Physique notamment) restent d'une étonnante actualité... et sont un peu trop ignorés en France.

Le vrai développement des théories de jauge auquel il est fait référence dans l'article n'a eu lieu que beaucoup plus tard, et là encore il s'est passé essentiellement hors des mathématiciens. Une période critique a été le début des années 70 avec l'organisation de séminaires communs sous la houlette de C.N. Yang et J. Simons à la State University of New York à Stony Brook. La convergence était claire aussi pour certains physiciens mathématiciens comme A. Trautmann. Il s'agissait surtout de constater, comme le fait formellement un article de T.T. Wu et C.N. Yang (cf. [2]), que les deux communautés avaient développé, chacune de leur côté, des concepts tout à fait parallèles. Les géomètres avaient en effet parachevé dès le milieu de ce siècle le déplacement de leurs centres d'intérêt vers les questions *globales*. Les physiciens théoriciens avaient, eux aussi, éprouvé le besoin d'introduire des invariants globaux comme le *nombre topologique de charge*. De là sont sortis des problèmes très intéressants qui ont conduit, grâce à des avancées spectaculaires de l'Analyse non-linéaire, à la révolution que l'on connaît de la Topologie Différentielle par exemple.

La géométrie symplectique a, elle aussi, connu ce passage des problèmes locaux aux problèmes globaux, d'où l'apparition de problèmes beaucoup plus difficiles, donc intéressants, dont certains se trouvaient en effet être la formulation mathématique de questions qui intéressaient les physiciens, par exemple dans le cadre de la quantification géométrique.

La leçon principale qu'il me semble utile de tirer de cette tranche d'Histoire est *l'existence fréquente de cheminements parallèles entre des communautés dont les préoccupations ne sont pas a priori identiques*, et dont le mode de production des connaissances est souvent différent. La fréquence de ces *rencontres* pousse assez inévitablement à s'interroger. Il peut être à ce propos intéressant de citer le physicien C.N. Yang : "*That nonabelian Gauge Theories are conceptually identical to ideas in a beautiful theory... developed by mathematicians without reference to the physical world was a great marvel to me... This is both thrilling and puzzling, since you, mathematicians, dreamed up these concepts out of nowhere*". Pour S.S. Chern, la réponse est simple : "*Fundamental concepts are rare*".

Quelques réflexions sur la notion de modèle

Pour situer le problème que pose l'identification d'une situation mathématique avec une situation physique (comme le laisse sous-entendre l'article), un point de départ possible est fourni pour l'Histoire de la Géométrie Euclidienne, et la crise

qu'a provoquée l'apparition de géométries non-euclidiennes. Cette crise avait une composante philosophique liée à la prééminence de la philosophie kantienne au début du XIX^{ème} siècle, et au rôle que la géométrie euclidienne jouait parmi les impératifs absolus de Kant. On peut éventuellement s'expliquer ainsi le fait que C.F. Gauß se soit refusé à prendre publiquement position sur les nouvelles géométries, ainsi qu'il l'explique dans des lettres à des collègues mathématiciens.

Mais le problème posé par cette absence de distance entre le contenu mathématique d'une théorie et sa pertinence pour décrire le monde qui nous entoure me semble bien résumé dans la confrontation suivante entre Bertrand et Poincaré. Dans une note aux *Compte-Rendus* de 1869 (annonçant une nouvelle démonstration du postulat d'Euclide), Bertrand écrit : *"aucun géomètre depuis Euclide n'a conçu de doute sérieux sur la valeur de la somme des angles d'un triangle. Un postulat est nécessaire pour prouver qu'elle est égale à deux angles droits, mais l'évidence de ce postulat permet aux esprits de bonne foi de l'accepter comme un axiome, et les dialecticiens curieux de disputer non de s'instruire peuvent seuls en contester l'évidence. Jamais, nous devons l'avouer, nous apparut bien nécessaire de les réduire au silence"*; on peut lire un peu plus tard sous la plume de Poincaré : *"les axiomes de la Géométrie ne sont que des définitions déguisées; une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre, elle peut seulement être plus commode"*.

Cet effort de réflexion sur la notion de modèle a occupé les épistémologues depuis longtemps. On trouve des éléments très intéressants de réflexion sur ce point dans l'œuvre de Helmholtz comme le rappelait opportunément Catherine Chevalley dans ses excellentes notes de lecture sur la réédition des ?? d'Helmholtz. Il est intéressant de rappeler ici que ce dernier a publié en 1869 un essai *"Über die Tatsachen, welche der Geometrie zur Grunde liegen"*³, en contrepoint à l'essai de Riemann publié seulement une année plus tôt *"Über die Hypothesen, welche der Geometrie zur Grunde liegen"*⁴, et qui était le sujet imposé par le jury lors de son habilitation en 1854.

Le point fondamental est de *laisser au modèle son autonomie par rapport à la réalité qu'il est censé décrire*. Cela permet au mathématicien de le développer à sa guise, en lui appliquant ses normes habituelles de rigueur,... et notamment sans le modifier en cours de raisonnement. C'est la seule façon qui permet d'en mesurer les limites, ce qu'on obtient en confrontant les résultats qu'il fournit avec l'expérience : c'est l'étape de validation. Un écart constaté alors permet de poser dans un cadre clair la question de sa pertinence en des termes dont le mathématicien peut tenir compte.

Références

- [1] F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Grundlehren math. Wiss. Grenzgebiete **XXIV**, Springer, Berlin, 1926.
- [2] T.T. Wu, C.N. Yang, *Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields*, Phys. Rev. **D 12** (1975), 3845-3857.

Jean Pierre BOURGUIGNON

³ "Sur les faits qui servent de fondements à la géométrie".

⁴ "Sur les hypothèses qui servent de fondements à la géométrie".