SÉMINAIRES ET CONGRÈS 12

FORMES MODULAIRES ET TRANSCENDANCE

COLLOQUE JEUNES

édité par

Stéphane Fischler

Éric Gaudron

Samy Khémira

Société Mathématique de France 2005

S. Fischler
Équipe d'arithmétique et de géométrie algébrique, Université Paris-Sud,
Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France.
E-mail : `Stephane.Fischler@math.u-psud.fr`

É. Gaudron
Université Grenoble I, Institut Fourier, UMR 5582 (CNRS), BP 74,
38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France.
E-mail : `Eric.Gaudron@ujf-grenoble.fr`

S. Khémira
Institut de mathématiques de Jussieu, UMR 7586 (CNRS),
Projet de Théorie des nombres, case 247, 175 rue de Chevaleret, 75013 Paris, France.
E-mail : `khemira@math.jussieu.fr`

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 11F03, 11F06, 11F11, 11F25, 11F30, 11F37, 11F41, 11F60, 11F67, 11G, 11G35, 11G50, 11J85, 11J91, 14G40.

***Mots clefs.* —** Forme modulaire, période de forme parabolique, période de forme non parabolique, produit scalaire de Petersson, crochet de Rankin-Cohen, fonction L, isomorphisme d'Eichler-Shimura, structure rationnelle, structure différentielle, forme quasimodulaire, forme modulaire presque holomorphe, valeur spéciale, système multiplicatif, indépendance algébrique, séries d'Eisenstein, lemme de multiplicité, lemme de zéros, théorie de l'élimination, géométrie diophantienne, théorème de Bézout, transcendance, géométrie d'Arakelov, hauteur de Faltings, méthode des pentes, forme modulaire de Hilbert, plusieurs variables complexes, opérateurs différentiels.

FORMES MODULAIRES ET TRANSCENDANCE
COLLOQUE JEUNES

édité par Stéphane Fischler, Éric Gaudron, Samy Khémira

Résumé. **—** Ce livre présente un état des lieux précis des (rares) preuves de transcendance ou d'indépendance algébrique de nombres provenant de la théorie des formes modulaires. Il dresse en outre un tableau de techniques plus générales (théorie des périodes, crochets de Rankin-Cohen, méthode des pentes, formes modulaires de Hilbert...), offrant ainsi de nouvelles perspectives.

Le recueil rassemble les actes du colloque JEUNES qui s'est tenu au C.I.R.M. du 26 au 30 mai 2003. Il est composé de quatre textes rédigés sous forme de mini-cours, incluant de nombreux rappels. Bien que les développements les plus récents soient aussi traités, la majeure partie du volume reste accessible au non-spécialiste.

Abstract **(Modular forms and Transcendence). —** The present volume arises from a conference on the links between modular forms and transcendence held at the C.I.R.M. (Marseille) from May 26th to May 30th 2003.

It includes an overview of the few existing proofs of transcendence or algebraic independence of numbers coming from modular forms theory as well as more general techniques offering new perspectives (periods, Rankin-Cohen brackets, slope method, Hilbert modular forms...). The book is divided into four independent chapters; although the most recent developments are studied, it remains mostly accessible to non-specialists.

© Séminaires et Congrès 12, SMF 2005

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Formes modulaires et périodes
François Martin & Emmanuel Royer 1

L'objet de ce cours est de présenter la théorie des formes modulaires et certains de ses développements récents. Dans un premier chapitre, on développe la théorie des formes modulaires sur les sous-groupes de congruence $\Gamma_0(N)$. Dans un deuxième chapitre, on présente la notion de périodes de formes modulaires sur le groupe modulaire. On en déduit des résultats concernant les structures rationnelles des espaces de formes modulaires. Dans une troisième partie, on étudie les structures différentielles sur les espaces de formes modulaires. C'est l'occasion de développer les notions de forme quasimodulaire et forme modulaire presque holomorphe introduites par Zagier. Enfin, en annexe, on étudie la théorie des formes modulaires avec systèmes multiplicatifs.

Indépendance algébrique de valeurs de séries d'Eisenstein (théorème de Nesterenko)
Vincent Bosser 119

Ce texte est consacré au théorème de Nesterenko sur l'indépendance algébrique de valeurs de séries d'Eisenstein. Après en avoir rappelé l'énoncé et les principaux corollaires, on en présente la preuve, en mettant plus particulièrement l'accent sur le lemme de multiplicité utilisé. La preuve de ce lemme repose sur des résultats d'algèbre commutative (théorie de l'élimination) et de géométrie diophantienne qui sont expliqués en détail. Le texte se termine par un bref aperçu de différentes variantes de la preuve du théorème de Nesterenko, et notamment des méthodes permettant d'obtenir des versions quantitatives du théorème.

Théorème stéphanois et méthode des pentes
Philippe Graftieaux 179

Ce travail porte sur la conjecture de Mahler-Manin, démontrée en 1996 par Barré *et al.*, et dont l'énoncé est le suivant : la fonction analytique dont le développement de Laurent est donné par le développement de Fourier à l'infini de la fonction modulaire prend des valeurs transcendantes en tout nombre algébrique. On donne de ce résultat une preuve plus intrinsèque que la preuve originale, en utilisant d'une part le formalisme de la méthode des pentes de Bost, qui consiste à utiliser la géométrie d'Arakelov dans une preuve de nature transcendante, et d'autre part la modularité grâce à l'emploi de la hauteur de Faltings.

Ce texte constitue une introduction à la théorie des formes modulaires de Hilbert, avec une attention particulière portée aux propriétés différentielles. En guise d'application, nous déterminons la structure de l'anneau des formes modulaires de Hilbert associées au corps $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

ABSTRACTS

Formes modulaires et périodes
François Martin & Emmanuel Royer 1

The aim of this course is the presentation of the theory of modular forms and some of its recent developments. In the first chapter, we develop the theory of modular forms on the congruence subgroups $\Gamma_0(N)$. In the second chapter, we present the notion of periods of modular forms on the modular group. We deduce some results concerning the rational structures on the spaces of modular forms. In a third chapter, we study the differential structures on spaces of modular forms. We introduce, in that occasion, the notions of quasimodular forms and quasi holomorphic modular forms developped by Zagier. In an appendix, we study the modular forms with multiplicative systems.

Indépendance algébrique de valeurs de séries d'Eisenstein (théorème de Nesterenko)
Vincent Bosser 119

This text is devoted to Nesterenko's theorem on the algebraic independence of values of Eisenstein series. After recalling its statement and its main corollaries, we present its proof, stressing particularly the multiplicity estimate used. The proof of this estimate rests on results from commutative algebra (elimination theory) and diophantine geometry which are explained in detail. The text ends with a brief overview of different variants of the proof of Nesterenko's theorem, and especially of the methods providing quantitative versions of the theorem.

Théorème stéphanois et méthode des pentes
Philippe Graftieaux 179

In this work, we are interested in the Mahler-Manin conjecture, proved in 1996 by Barré *et al.* This theorem asserts that the analytic function whose Laurent series is given by the Fourier series of the modular function takes transcendental values on algebraic numbers. We give for this statement a proof that is more intrinsic that the original one, using the slope theory of Bost, consisting of using Arakelov geometry in transcendence proofs, as well as modularity, using Faltings' height.

This text is an introduction to the theory of Hilbert modular forms, with special regard to their differential properties. As an application, we determine the ring structure of Hilbert modular forms associated to the field $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

PRÉFACE

Durant la semaine du 26 au 30 mai 2003 s'est tenu au C.I.R.M. un colloque sur les liens qui unissent les formes modulaires et la transcendance. Dispensés sous forme de mini-cours intensifs, les exposés étaient accessibles aux non-spécialistes. Seul un exposé de synthèse réalisé par Fischler le dernier jour du colloque n'a pas été repris dans ce volume. Il concernait l'analyse de la démonstration modulaire de Beukers du résultat d'Apéry sur l'irrationalité de $\zeta(3)$.

L'idée d'organiser ces conférences reposait sur le constat que les résultats de transcendance (et *a fortiori* d'indépendance algébrique) sur les valeurs de fonctions modulaires sont très peu nombreux et leurs preuves paraissent isolées. Curieusement, alors que le demi-plan de Poincaré est le cadre naturel pour étudier les propriétés des fonctions modulaires, il n'existe à l'heure actuelle aucune preuve directe d'un résultat de transcendance sur ces objets ayant pour cadre ce demi-plan. De plus, sans l'œil du spécialiste, il est parfois difficile de cerner le rôle exact des propriétés de modularité des fonctions mises en jeu. Ainsi, par exemple, au premier abord, la démonstration du théorème d'indépendance algébrique de Nesterenko sur q, $E_2(q)$, $E_4(q)$, $E_6(q)$ ne semble utiliser de modulaire que le système différentiel entre E_2, E_4 et E_6 (qui résulte des calculs de dimensions d'espaces de formes modulaires de poids fixé). En fait, l'aspect véritablement « modulaire » de la démonstration (par opposition à l'aspect « elliptique ») se lit sur le type de variable utilisé (ici $q = e^{2i\pi\tau}$), *i.e.* le fait que l'on tient compte du développement à la pointe infinie $\tau = i\infty$ des séries d'Eisenstein considérées (en particulier du fait que les coefficients de ces développements sont des nombres *entiers*). En ce sens, la seule démonstration connue à l'heure actuelle du théorème de Schneider (τ, $j(\tau)$ algébriques $\Rightarrow$ τ quadratique) est de nature « elliptique ». L'objet du *second problème de Schneider* consiste précisément à donner une preuve « modulaire » de ce théorème. En dépit de son aspect « gratuit », ce problème joue un rôle moteur car sa solution permettrait de mieux comprendre le lien elliptique-modulaire et elle ouvrirait la voie à une généralisation en dimension supérieure. D'ailleurs, c'est en voulant résoudre ce problème que l'équipe stéphanoise Barré, Diaz, Gramain, Philibert a résolu la *conjecture de Mahler-Manin*, portant sur q et $J(q)$.

Ces observations nous ont convaincus qu'un *état des lieux précis* sur ce thème s'imposait. Ainsi cette rencontre visait-elle plusieurs objectifs.

D'une part il nous fallait étudier de manière plus approfondie certaines propriétés des formes modulaires, potentiellement utiles pour les démonstrations de transcendance, comme leurs structures entières et différentielles. Nombre de ces propriétés restent méconnues et le texte de FRANÇOIS MARTIN et EMMANUEL ROYER offre une synthèse globale des différents aspects de la théorie des formes modulaires (et quasimodulaires), tout en évoquant quelques-unes des plus récentes avancées de ce domaine (théorie des périodes). Le texte de VINCENT BOSSER permet de saisir comment le système différentiel entre les formes modulaires et quasi-modulaires E_2, E_4, E_6, évoqué ci-dessus, peut conduire à des résultats d'indépendance algébrique. L'auteur analyse la preuve (et ses variantes) du théorème de Nesterenko et il met l'accent sur le lemme de multiplicité qui est au cœur de ce travail, en utilisant pour cela le formalisme très général de la théorie de l'élimination développée par Philippon *et al.*

D'autre part, l'aspect géométrique des formes modulaires n'a jamais été pris en compte jusqu'à présent dans ce contexte. Or la *méthode des pentes* de Bost fournit un cadre naturel pour toute preuve d'un énoncé de transcendance (ou d'approximation diophantienne) sur des objets de nature géométrique. Le théorème stéphanois (autrefois « conjecture de Mahler-Manin ») sur la transcendance de $J(q)$ et sa preuve ont été étudiés sous cet angle et à travers ce prisme par PHILIPPE GRAFTIEAUX. Là encore, mentionnons que le souci « éducatif » de ce colloque a conduit l'auteur à faire de nombreux rappels sur la méthode des pentes ainsi que sur l'espace des modules des courbes elliptiques. Un des intérêts de ce point de vue géométrique est qu'il semble *a priori* propice aux tentatives de généralisation en dimension supérieure (surface de Hilbert par exemple). À l'heure actuelle, ce genre de résultats n'est pas connu, car, par exemple, de sérieux obstacles sur les singularités des compactifications de surfaces modulaires entrent en jeu. Une avancée dans cette direction permettrait sans aucun doute de mieux percevoir le sens profond des preuves des stéphanois et de Nesterenko. Le texte de FEDERICO PELLARIN présente la théorie des formes modulaires de Hilbert, en s'intéressant en particulier aux structures différentielles de l'anneau gradué constitué de ces formes de Hilbert. Ce travail original met en lumière l'importance des crochets de Rankin-Cohen pour analyser l'anneau différentiel des formes modulaires de Hilbert.

Enfin, l'intitulé « Colloque $\mathfrak{JEUNES}$ » signifie qu'il s'adressait en priorité aux étudiants en DEA et en Thèse, aux jeunes Docteurs, Maîtres de conférences et Chargés de recherche. Il ne s'agissait pas de faire preuve d'ostracisme à l'égard de nos confrères (et consœurs !) plus chevronnés mais nous voulions éviter ainsi tout académisme en créant une atmosphère de groupe de travail, où chacun se serait senti entièrement libre de demander des éclaircissements aux orateurs et d'exprimer ses idées. Nous souhaitions que les auditeurs, même novices dans le domaine, puissent poser des questions « naïves » sans crainte. Nous espérons avoir de la sorte favorisé les échanges dans la convivialité. De l'avis des participants, il semble que cet objectif se soit pleinement réalisé.

Remerciements

De nombreuses personnes et institutions ont favorisé la tenue de ce colloque. C'est pourquoi nous tenons à remercier vivement :

- Le C.I.R.M. et son comité scientifique,
- Le Jumelage franco-russe du C.N.R.S.,
- Le Département de Mathématiques et Applications de l'École Normale Supérieure,
- L'École Doctorale de Paris-Centre,
- L'Équipe de Théorie des Nombres de Paris 6,
- L'Institut de Mathématiques de Chevaleret,
- L'Institut Universitaire de France,
- Les organisateurs du colloque « Problèmes diophantiens » (C.I.R.M., mai 2002)

pour le soutien financier que ces institutions nous ont apporté. Nous remercions en outre D. Bertrand, M. Brion, É. Fouvry, Y. Maday, P. Michel, J. Oesterlé, C. Peskine, P. Philippon et M. Rosso, pour le temps qu'ils nous ont consacré. En dépit de son caractère « atypique », il est à souligner que ce projet a reçu d'emblée un écho favorable auprès de ces organismes.

Nous remercions également S. David à double titre, à la fois pour avoir accepté notre invitation comme « conseiller scientifique » et les responsabilités qui en découlent et pour sa participation très active au processus de parution du présent volume. Nous sommes reconnaissants à M. Waldschmidt de ses conseils avisés et aux différents rapporteurs de leurs contributions.

Nous tenons aussi à exprimer notre gratitude à tout le personnel administratif, sans lequel nous n'aurions jamais réussi à tout organiser.

Enfin, et surtout, nous remercions infiniment les orateurs d'avoir accueilli ce projet avec enthousiasme et d'avoir consacré beaucoup de temps et d'énergie à préparer leurs exposés et les textes qui les accompagnent et qui font l'objet de ces actes.

S. Fischler, É. Gaudron & S. Khémira