SÉMINAIRES ET CONGRÈS 8

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS GÉOMÉTRIQUES

COURS DU C.I.M.P.A.
ÉCOLE D'ÉTÉ DE SÉVILLE (1996)

édité par

Philippe Maisonobe

Luis Narváez Macarro

Société Mathématique de France 2004

Ph. Maisonobe
UMR 6621 du CNRS, Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice,
Parc Valrose, 06108 Nice cedex 2, France.
E-mail : `phm@math.unice.fr`

L. Narváez Macarro
Departamento de Algebra, Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla,
E-41012 Spain.
E-mail : `narvaez@algebra.us.es`

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 12, 13N10, 13P10, 14B, 16S32, 32C38, 32S40, 32S60, 35A27, 35N10.

***Mots clefs.* —** $\mathscr{D}$-module, bases de Gröbner, complexe de de Rham, connexions méromorphes régulières, cycle caractéristique, cycles évanescents, dualité, dualité de Grothendieck-Verdier, filtration, V-filtration, foncteur image inverse, indice, irrégularité, faisceau d'irrégularité, modules holonomes, modules spécialisables, monodromie, opérateur différentiel d'ordre infini, pentes, positivité, régularité, critère fondamental de la régularité, réseau canonique, théorème de comparaison, théorème de division.

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS GÉOMÉTRIQUES

COURS DU C.I.M.P.A.
ÉCOLE D'ÉTÉ DE SÉVILLE (1996)

édité par Philippe Maisonobe, Luis Narváez Macarro

***Résumé.* —** La théorie des systèmes différentiels géométriques est l'étude des Modules cohérents sur l'Anneau des opérateurs différentiels sur une variété analytique ou algébrique. Elle intervient dans de nombreuses branches des mathématiques : géométrie algébrique, arithmétique, groupes et algèbres de Lie, topologie algébrique des singularités... Ce livre est le résultat de la rédaction de plusieurs cours donnés lors d'une école du C.I.M.P.A. en septembre 1996. Il veut offrir au lecteur, par la prise en compte des éléments les plus récents de la théorie, une synthèse des nombreux articles de recherche sur ce sujet. Ainsi, la plupart des cours ont été écrits pour être lus par des étudiants commençant la recherche mathématique.

***Abstract* (Elements of the theory of geometric differential systems)**

The theory of geometric differential systems consists in the study of coherent Modules on the Ring of differential operators on a complex analytic or algebraic manifold. It is used in various branches of mathematics: algebraic geometry, arithmetics, Lie groups and Lie algebras, algebraic topology of singularities... This book contains the texts of lectures given at a C.I.M.P.A. summer school in september 1996. It offers a complete survey of the theory, taking into account the most recent advances. Most of the lectures are aimed at young researchers.

TABLE DES MATIÈRES

Résumés des articles ix

Abstracts xiii

Préface xvii

PH. MAISONOBE & T. TORRELLI — *Image inverse en théorie des $\mathscr{D}$-Modules* 1
- Introduction 2
- I. Définition et généralités 4
- II. Images inverses non caractéristiques 11
- III. Équations fonctionnelles d'un $\mathscr{D}$-Module holonome 22
- IV. Cohomologie locale algébrique 30
- V. Images inverses et solutions d'un $\mathscr{D}$-Module 45
- Références 57

L. NARVÁEZ MACARRO — *The Local Duality Theorem in $\mathscr{D}$-module Theory* .. 59
- Introduction 60
- Notation 61
- 1. Duality for Analytic Constructible Sheaves 61
- 2. The Local Duality Morphism in $\mathcal{D}$-module Theory 64
- 3. Proof of the Local Duality Theorem 67
- Appendix 79
- References 86

F.J. CASTRO-JIMÉNEZ & M. GRANGER — *Explicit Calculations in Rings of Differential Operators* 89
- Introduction 90
- 1. Division theorems in polynomial rings and in power series rings 92
- 2. Division theorems in the rings of differential operators 105
- 3. Generalized division theorems. The calculation of slopes 112
- References 125
- A complementary list of recent publications 126

L. Narváez Macarro & A. Rojas León — *Continuous division of linear differential operators and faithful flatness of $\mathscr{D}_X^\infty$ over $\mathscr{D}_X$* 129
Introduction 129
1. Topological structure on rings of linear differential operators with analytic coefficients 130
2. The continuity theorem 133
3. Continuous scissions 144
4. Faithful flatness of $\mathcal{D}_X^\infty$ over $\mathcal{D}_X$ 146
References 147

J. Briançon — *Extensions de Deligne pour les croisements normaux* 149
Introduction 149
1. Rappels sur les connexions holomorphes 149
2. Connexions méromorphes 153
3. Connexions méromorphes à pôle logarithmique le long d'un diviseur à croisements normaux 157
4. Énoncé de la correspondance de Riemann-Hilbert 162
Références 163

Z. Mebkhout — *Le théorème de positivité, le théorème de comparaison et le théorème d'existence de Riemann* 165
1. Introduction 170
Références bibliographiques citées dans l'introduction 183
2. Fondement de la Théorie des $\mathscr{D}_X$-modules 185
3. Le Théorème de Positivité de l'Irrégularité 202
4. Le Critère Fondamental de la Régularité 223
5. Le Théorème global de Comparaison pour la Cohomologie de de Rham 239
6. Stabilité de la catégorie des complexes holonomes réguliers par Image inverse, Produits tensoriels interne et externe 243
7. Stabilité de la Catégorie des complexes holonomes réguliers par Dualité 251
8. Résumé 257
9. La catégorie des complexes holonomes réguliers : cas algébrique 259
10. Le Théorème d'Existence de type de Riemann 263
11. Le Théorème d'Existence de type de Frobenius pour les coefficients holonomes d'ordre infini 288
Références 305
Liste des notations 306
Index 308

Ph. Maisonobe & Z. Mebkhout — *Le théorème de comparaison pour les cycles évanescents* 311
1. Introduction 312
2. Constructibilité du complexe des cycles évanescents 314
3. Le complexe des solutions multiformes d'un complexe holonome 320

4. La théorie de la V-filtration ... 328
5. Le théorème de comparaison pour les cycles évanescents d'un $\mathscr{D}_X$-module holonome régulier ... 371
6. Exemple d'une fonction monomiale (avec la collaboration de T. Torrelli) ... 375
Références ... 388

B. Malgrange — *On irregular holonomic $\mathscr{D}$-modules* ... 391
I. Meromorphic connections ... 391
II. Filtration of holonomic modules ... 403
References ... 409

Y. Laurent — *Geometric Irregularity and $\mathscr{D}$-modules* ... 411
Introduction ... 411
1. Ordinary differential equations ... 412
2. Microcharacteristic Varieties ... 416
3. Sheaves of solutions ... 421
4. Geometric irregularity ... 424
5. Application to $\mathscr{D}_X$-modules ... 428
References ... 429

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Image inverse en théorie des $\mathscr{D}$-Modules
PHILIPPE MAISONOBE & TRISTAN TORRELLI 1

Dans ce cours, nous exposons les résultats de base sur le foncteur image inverse en théorie des $\mathscr{D}$-modules. Après quelques généralités, nous donnons les premiers résultats dans le cas d'un morphisme non caractéristique. Puis nous montrons l'existence d'équations fonctionnelles de Bernstein associées à une section d'un $\mathscr{D}$-module holonome. Nous en déduisons que les foncteurs image inverse et cohomologie locale préservent l'holonomie. Nous montrons ensuite que ces foncteurs commutent. Enfin, nous étudions le morphisme canonique entre l'image inverse des solutions et les solutions de l'image inverse. Ces résultats sont à la base de la notion d'irrégularité d'un $\mathscr{D}$-module holonome.

The Local Duality Theorem in $\mathscr{D}$-module Theory
LUIS NARVÁEZ MACARRO 59

Ce cours est consacré au théorème de du alité locale pour les $\mathscr{D}$-modules, qui affirme que la dualité topologique de Grothendieck-Verdier échange le complexe de de Rham et le complexe des solutions des modules holonomes sur une variété analytique complexe. On donne la preuve originale de Mebkhout en faisant le rapport avec la preuve de Kashiwara-Kawai. Ceci nous permet de préciser la commutativité de certains diagrammes dans cette dernière.

Explicit Calculations in Rings of Differential Operators
FRANCISCO J. CASTRO-JIMÉNEZ & MICHEL GRANGER 89

Dans ce cours on développe la notion de base standard, en vue d'étudier les algèbres d'opérateurs différentiels linéaires et les modules de type fini sur ces algèbres. On considère le cas des coefficients polynomiaux, des coefficients holomorphes ainsi que le cas des algèbres d'opérateurs à coefficients formels.
Notre but est de montrer comment les bases standards permettent de calculer certains invariants classiques des germes de modules (à gauche) cohérents sur

le faisceaux $\mathscr{D}$ des opérateurs différentiels linéaires sur $\mathbb{C}^n$. Les principaux invariants que nous examinons sont : la variété caractéristique, sa dimension et sa multiplicité en un point du fibré cotangent.
Dans le dernier chapitre nous étudions des invariants plus fins des $\mathscr{D}$-modules qui sont reliés aux questions d'irrégularité : les pentes d'un $\mathscr{D}$-module, le long d'une hypersurface lisse.

Continuous division of linear differential operators and faithful flatness of $\mathscr{D}_X^\infty$ over $\mathscr{D}_X$
LUIS NARVÁEZ MACARRO & ANTONIO ROJAS LEÓN 129

Dans ce cours on démontre la fidèle platitude du faisceau d'opérateurs différentiels linéaires d'ordre infini sur le faisceau d'opérateurs différentiels linéaires d'ordre fini d'une variéte analytique complexe lisse. La preuve que nous donnons est celle de Mebkhout-Narváez, qui utilise la continuité de la division d'opérateurs différentiels d'ordre fini par rapport à une topologie naturelle. Nous réproduisons la preuve de Hauser-Narváez du théorème de continuité, qui est plus simple que la preuve originale.

Extensions de Deligne pour les croisements normaux
JOËL BRIANÇON 149

Étant donné une connexion holomorphe intégrable sur le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux, nous en construisons, suivant P. Deligne, un prolongement méromorphe régulier.

Le théorème de positivité, le théorème de comparaison et le théorème d'existence de Riemann
ZOGHMAN MEBKHOUT 165

Dans ce cours on définit le complexe d'irrégularité d'un complexe holonome le long d'un espace analytique complexe. On montre que c'est un faisceau pour un module holonome et une hypersurface. On montre le critère fondamental de la régularité qui permettra d'établir la nullité du faisceau d'irrégularité. On montre que toutes les propriétés fonctorielles de la régularité sont des conséquences du critère fondamental. On montre le théorème d'existence du type de Riemann en construisant explicitement des réseaux canoniques à l'aide du théorème d'extension des faisceaux analytiques cohérents. On montre enfin le théorème d'existence du type de Frobenius concernant les complexes holonomes d'ordre infini.

Le théorème de comparaison pour les cycles évanescents
PHILIPPE MAISONOBE & ZOGHMAN MEBKHOUT 311

Le but de cet article est de démontrer le théorème de comparaison pour les cycles évanescents. Nous montrons la constructibilité du complexe des cycles évanescents. Nous montrons que les solutions multiformes d'un complexe holonome sont de détermination finie. Nous montrons que les solutions multiformes d'un complexe holonome régulier sont à croissance modérée. Nous montrons que le gradué associé à la V-filtration d'un module spécialisable commute à la dualité. Nous utilisons tous les résultats précédents pour montrer le théorème de comparaison et nous illustrons les résultats généraux à l'aide de l'exemple d'une fonction monomiale.

On irregular holonomic $\mathscr{D}$-modules
Bernard Malgrange 391

On démontre l'existence d'un réseau canonique pour les connexions méromorphes ; on en déduit deux résultats :
D'une part, le fait qu'une telle connexion, définie hors d'un ensemble de codimension 3, se prolonge partout.
D'autre part, l'existence d'une bonne filtration globale pour les $\mathscr{D}$-modules holonomes.

Geometric Irregularity and $\mathscr{D}$-modules
Yves Laurent 411

En une variable, J.-P. Ramis a associé à un opérateur différentiel analytique un polygone de Newton sur lequel on peut lire l'irrégularité de cet opérateur ainsi que ses indices dans divers espaces fonctionnels. On montre ici que ce résultat se généralise en dimension quelconque, en définissant un polygone de Newton et des cycles microcaractéristiques positifs. En particulier, on obtient une définition purement algébrique du cycle caractéristique de l'irrégularité d'un $\mathscr{D}$-module holonome.

ABSTRACTS

Image inverse en théorie des $\mathscr{D}$-Modules
PHILIPPE MAISONOBE & TRISTAN TORRELLI 1

This course deals with basic properties of the inverse image functor in $\mathscr{D}$-modules theory. After some generalities, we give the first results in the case of a non-characteristic morphism. Then we prove the existence of Bernstein functional equations associated with a section of an holonomic $\mathscr{D}$-module. We deduce that the inverse image functor and the local cohomology functor preserve holonomicity. Moreover, we prove that these two functors commute. Finally, we study the canonical morphism between the inverse image of the solutions and the solutions of the inverse image. These results are at the origin of the definition of the irregularity of a holonomic $\mathscr{D}$-module.

The Local Duality Theorem in $\mathscr{D}$-module Theory
LUIS NARVÁEZ MACARRO 59

These notes are devoted to the Local Duality Theorem for $\mathscr{D}$-modules, which asserts that the topological Grothendieck-Verdier duality exchanges the de Rham complex and the solution complex of holonomic modules over a complex analytic manifold. We give Mebkhout's original proof and the relationship with Kashiwara-Kawai's proof. In that way we are able to precise the commutativity of some diagrams appearing in the last one.

Explicit Calculations in Rings of Differential Operators
FRANCISCO J. CASTRO-JIMÉNEZ & MICHEL GRANGER 89

We use the notion of a standard basis to study algebras of linear differential operators and finite type modules over these algebras. We consider the polynomial and the holomorphic cases as well as the formal case.
Our aim is to demonstrate how to calculate classical invariants of germs of coherent (left) modules over the sheaf $\mathscr{D}$ of linear differential operators over $\mathbb{C}^n$. The main invariants we deal with are : the characteristic variety, its dimension

and the multiplicity of this variety at a point of the cotangent space.
In the final chapter we shall study more refined invariants of $\mathscr{D}$-modules linked to the question of irregularity : The slopes of a $\mathscr{D}$-module along a smooth hypersurface of the base space.

Continuous division of linear differential operators and faithful flatness of $\mathscr{D}_X^\infty$ over $\mathscr{D}_X$
Luis Narváez Macarro & Antonio Rojas León 129

In these notes we prove the faithful flatness of the sheaf of infinite order linear differential operators over the sheaf of finite order linear differential operators on a complex analytic manifold. We give the Mebkhout-Narváez's proof based on the continuity of the division of finite order differential operators with respect to a natural topology. We reproduce the proof of the continuity theorem given by Hauser-Narváez, which is simpler than the original proof.

Extensions de Deligne pour les croisements normaux
Joël Briançon 149

Given an integrable holomorphic connection on the complement of a divisor with normal crossings, we construct, following P. Deligne, a regular meromorphic extension.

Le théorème de positivité, le théorème de comparaison et le théorème d'existence de Riemann
Zoghman Mebkhout 165

In this lecture we define the irregularity complex of an holonomic complex along a complex analytic space and we prove that it is a sheaf for an holonomic module and an hypersurface. We prove the fondamental regularity criterium giving the vanishing of the irregularity sheaf. We prove that all the fonctorial properties of the regularity are consequences of the fondamental criterium. We prove the existence theorem of Riemann type by building explicit lattices using the extension theorem for analytic coherent sheaves. We finally prove the existence theorem of Frobenius type for holonomic complexes of infinite order.

Le théorème de comparaison pour les cycles évanescents
Philippe Maisonobe & Zoghman Mebkhout 311

The goal of this article is to prove the comparaison theorem for the vanishing cycles. We prove the constructibility of the vanishing cycle complex. We prove that the multivalued solutions of an holonomic complex are of finite determination. We prove that the multivalued solutions of a regular holonomic complex are tame. We prove that the graded module with respect to the V-filtration of a specializable module commute with duality. We use all the previous results to prove the comparaison theorem and we illustrate the general results in the case of a monomial function.

On irregular holonomic $\mathscr{D}$-modules
BERNARD MALGRANGE 391

One proves the existence of a canonical lattice for the meromorphic connections; as a consequence, one obtains the two following results :
First, the fact that such a connection, defined outside a set of codimension 3, can be extended everywhere.
Then, the existence of a global good filtration for the holonomic $\mathscr{D}$-modules.

Geometric Irregularity and $\mathscr{D}$-modules
YVES LAURENT 411

In the one dimensional case, J.-P. Ramis associated a Newton polygon to an analytic differential operator. On this polygon may be read the irregularity of the operator as well as its indices in various functional spaces. This result is here generalized in the higher dimensional case. We define a Newton polygon and positive microcharacteristic cycles. We get so a purely algebraic definition of the characteristic cycle of the irregularity of a holonomic $\mathscr{D}$-module.

PRÉFACE

La théorie des systèmes différentiels géométriques est l'étude des Modules cohérents sur l'Anneau des opérateurs différentiels sur une variété analytique ou algébrique. Elle intervient dans de nombreuses branches des mathématiques : géométrie algébrique, arithmétique, groupes et algèbres de Lie, topologie algébrique des singularités... Du 2 au 13 septembre 1996, nous avions organisé une école du Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées à Séville. Ce livre, résultat de la rédaction de plusieurs cours donnés à cette occasion, veut offrir au lecteur, par la prise en compte des éléments les plus récents de la théorie, une synthèse des nombreux articles de recherche sur ce sujet. Ainsi, la plupart des cours ont été écrits pour être lus par des étudiants commençant la recherche mathématique. Les prérequis sont quelques connaissances de base en géométrie algébrique et en théorie des $\mathscr{D}$-Modules ; en ce qui concerne les $\mathscr{D}$-Modules, ces connaissances sont essentiellement contenues dans les cours d'une école du C.I.M.P.A. qui s'était tenue à Nice en août et septembre 1990 (*Éléments de la théorie des systèmes différentiels*, Ph. Maisonobe et C. Sabbah (éd.), Les cours du CIMPA, Travaux en cours, vol. 45 et 46, Hermann, Paris, 1993).

Le livre débute par un texte de Ph. Maisonobe et T. Torrelli sur l'image inverse des $\mathscr{D}$-Modules par une application. C'est l'une des opérations de base de la théorie des $\mathscr{D}$-Modules. Ce texte expose les résultats suivants :

a) Existence d'équations fonctionnelles pour les sections d'un module holonome. Les conséquences en sont nombreuses : les modules holonomes sont spécialisables, l'image inverse et la cohomologie locale de modules holonomes restent holonomes.

b) Commutation de l'image inverse et de la cohomologie locale.

c) Isomorphisme, dans le cas non caractéristique, entre image inverse des solutions d'un $\mathscr{D}$-Module et solutions de l'image inverse de ce $\mathscr{D}$-Module.

Il résulte de cela que le complexe des solutions d'un $\mathscr{D}$-Module holonome satisfait aux conditions de support.

L. Narváez-Macarro donne une preuve du théorème de dualité locale pour les $\mathscr{D}$-Modules, qui affirme que la dualité topologique de Grothendieck-Verdier échange le complexe de de Rham et le complexe des solutions des modules holonomes sur une variété analytique complexe. Ce théorème exprime clairement le parallélisme entre la dualité topologique (discrète) et la dualité continue (cohérente), et cela est utilisé de manière essentielle dans le cours de Z. Mebkhout : par exemple, le théorème de dualité locale, joint avec les conditions de support montrées dans le cours de Ph. Maisonobe et T. Torrelli, permet d'obtenir la perversité des solutions des modules holonomes.

Dans ce texte, L. Narváez-Macarro dégage avec beaucoup de soins la commutativité de certains diagrammes qui relient la preuve originale de Mebkhout avec l'approche proposée par Kashiwara-Kawai, et qui, en dernière analyse, est liée à la compatibilité entre les dualités locale et globale en géométrie analytique.

F. Castro et M. Granger donnent une présentation très complète des techniques de division sur l'anneau des opérateurs différentiels. Outre les conséquences évidentes au niveau des calculs effectifs et les aspects calculatoires de grande actualité, les techniques de division s'appliquent aussi dans des questions de nature théorique, comme par exemple celles qui sont traitées dans le cours de L. Narváez-Macarro et A. Rojas-León ou dans certains points du cours de Ph. Maisonobe et T. Torrelli.

Dans ce texte, les auteurs montrent aussi comment appliquer la division à l'étude de l'irrégularité, notamment au calcul des pentes d'un $\mathscr{D}$-Module holonome.

L. Narváez Macarro et A. Rojas León exposent une preuve détaillée de la continuité de la division des opérateurs différentiels. Ce résultat fournit une démonstration conceptuelle et simple de la (fidèle) platitude de l'anneau des opérateurs différentiels d'ordre infini sur l'anneau des opérateurs différentiels. Il s'agit là d'un résultat classique, essentiel dans l'étude de la correspondance de Riemann-Hilbert pour les modules holonomes d'ordre infini (voir le cours de Z. Mebkhout), mais dont les preuves précédentes sont relativement inaccessibles aux utilisateurs de la théorie.

J. Briançon traite ensuite des connexions méromorphes. Il établit l'existence du prolongement canonique d'un fibré vectoriel muni d'une connexion intégrable sur le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux.

Z. Mebkhout commence par définir le complexe d'irrégularité d'un $\mathscr{D}$-Module le long d'un fermé analytique et montre que, pour un Module holonome, ce complexe est pervers lorsque le fermé analytique est une hypersurface. À l'aide de ce résultat, il donne une preuve du théorème global de comparaison de A. Grothendieck. Il définit ensuite la catégorie des $\mathscr{D}$-Modules holonomes réguliers. Il démontre alors un critère de régularité qui lui permet d'établir les principales propriétés de cette catégorie : stabilité par image inverse, produit tensoriel interne et externe, dualité. En utilisant des résultats sur le prolongement des faisceaux analytiques cohérents, Z. Mebkhout termine par une preuve des correspondances entre Modules holonomes réguliers, faisceaux constructibles et Modules holonomes sur l'anneau des opérateurs d'ordre infini.

Ph. Maisonobe et Z. Mebkhout peuvent ensuite donner une démonstration du théorème de comparaison pour les cycles évanescents. Si $\mathscr{F}$ est le faisceau des solutions d'un Module holonome régulier et f une fonction holomorphe, il s'agit de construire explicitement le $\mathscr{D}$-Module holonome régulier correspondant au faisceau des cycles évanescents de $\mathscr{F}$ relativement à l'application f. Ils étudient pour cela les solutions multiformes d'un $\mathscr{D}$-Module holonome régulier et définissent la V-filtration dont ils détaillent les propriétés. Ils étudient avec soins le comportement de la V-filtration par la dualité. Avec T. Torrelli, ils traitent enfin l'exemple d'une fonction monomiale.

B. Malgrange établit que toute connexion méromorphe le long d'une hypersurface d'une variété analytique complexe admet un réseau canonique. Puis il montre que tout $\mathscr{D}$-Module holonome sur une variété analytique admet une bonne filtration globale canonique.

Y. Laurent rappelle comment, en une variable, on associe à un opérateur différentiel analytique un polygone de Newton sur lequel on peut lire l'irrégularité de l'opérateur ainsi que ses indices dans divers espaces fonctionnels. Il présente ensuite la généralisation de ces résultats en dimension quelconque, montrant en particulier que le cycle caractéristique de l'irrégularité d'un $\mathscr{D}$-Module holonome se calcule algébriquement.

Ph. Maisonobe et L. Narváez-Macarro