

PEUT-ON TOUT DE MÊME PARLER D'UN 'TRIANGLE DE PASCAL' ?

Laurent KYRIACOPOULOS (*)

RÉSUMÉ. — Lorsque vers 1654 Pascal considère le triangle arithmétique, il ne se contente pas de dresser l'inventaire d'applications déjà anciennes, ni d'étendre son usage aux jeux de hasard. Son recueil de traités est aussi le lieu où se confrontent deux manières successives de résoudre les mêmes problèmes : soit par *lecture du triangle*, soit par des *calculs* dont le triangle est exclu.

Or, du point de vue de la preuve, le recueil donne à voir ces solutions sans triangle comme un second mouvement, une conclusion. Car elles sont toujours démontrées *à partir du triangle* : de ses lectures et de ses propriétés.

C'est que Pascal n'a pas vraiment délaissé l'objet portant parfois son nom. Des premières aux secondes résolutions, le triangle n'a pas disparu, il s'est seulement déplacé. D'abord moyen de résolution, il est devenu outil de preuve, élément d'une démarche singulière pour démontrer des égalités (on parlera ici d'une *procédure de démonstration*). Or, pour sa nouvelle fonction, il change de nature. Pourrait-on à cet égard parler enfin, avec justesse, d'un 'triangle de Pascal' ?

ABSTRACT. — CAN ONE NEVERTHELESS SPEAK OF 'PASCAL'S TRIANGLE' ? Around 1654, when Pascal considered the arithmetical triangle, he neither contented himself with taking stock of well-tried applications nor with extending their use to games of chance. In his collection of treatises two successive ways of solving the same set of problems are being confronted : either *reading the triangle* or *calculations* which do not take the triangle into account.

Yet, as regards proofs, the solutions without the triangle are presented as a second movement, a conclusion. These solutions however are provided *on the basis of the triangle*, i.e. by its readings or its properties.

Indeed, Pascal never really neglected the object which later bore his name. Between the first and the second resolutions, the triangle has not disappeared ; it had only been displaced. From a means of resolution it had become a way to demonstrate, an element within a particular procedure to establish equalities (we shall call this a *procedure of*

(*) Texte reçu le 25 mars 2000, révisé le 25 janvier 2001.

L. KYRIACOPOULOS, 114 rue Victor Hugo, 84210 Pernes-les-Fontaines (France). Courrier électronique : laurent.kyriacopoulos@laposte.net.

Mots clés : Pascal, triangle arithmétique, démonstration, problème des partis, nombres figurés, combinaisons.

Classification AMS : 01A45.

demonstration). Yet, this new purpose changes the very nature of the triangle. In this respect, can one eventually and rightly speak of Pascal's triangle?

Les travaux de Pascal sur le triangle arithmétique sont regroupés en un recueil de traités, dont nous connaissons deux versions successives, aux dates d'impression incertaines. La première version, qui nous est parvenue en un exemplaire imprimé, fut entièrement rédigée en latin. Son impression a pu se situer au plus tard dans la première partie de l'année 1654, voire en 1653, mais ne fut suivie d'aucune publication. La seconde version fut probablement composée en 1654. Le libraire Guillaume Desprez la publia en 1665, après la mort de Pascal¹.

De la première version à la seconde, le contenu change en un seul point : aux trois usages du triangle exposés dans le recueil initial, s'ajoute une application remarquable : *les problèmes de partis* — au sens de partages — *entre deux joueurs à un jeu de hasard*. Mais en même temps Pascal réécrit en français une partie du recueil, conservant le reste tel quel en latin (cette seconde version mêle donc le français et le latin ; nous la nommerons cependant *version en français* par commodité). Et un remaniement complet s'opère alors dans l'agencement des traités entre eux. On décrira en fin d'introduction comment la présentation du recueil a changé et on reviendra à plusieurs reprises sur les variations significatives de l'une à l'autre version.

L'emploi classique du triangle peut s'énoncer de façon simple : il s'agit de lire, d'utiliser les entiers qu'il contient. Une partie du recueil de Pascal consiste précisément à expliciter ou à établir l'usage du triangle pour chacune des quatre applications considérées : les nombres figurés ; les combinaisons ; les problèmes de partis ; les coefficients du développement des puissances d'un binôme. On rappellera dans un premier temps comment Pascal identifie le triangle et ces usages. Mais il sera surtout question, dans notre première partie, de dégager un mouvement moins apparent qui parcourt le recueil : *comment traiter les mêmes applications sans avoir recours au triangle arithmétique*. Bien que cet objet mathématique soit déjà présent chez de nombreux prédécesseurs arabes [Djebbar 1997,

¹ La présentation des deux versions repose sur les notices de J. Mesnard [Pascal 1964, II, p. 1166–1175] et M. Le Guern [Pascal 1998, I, p. 1051–1058]. Les deux éditions publient les deux versions. Lors des citations, on renverra à l'édition de 1998 (les traductions du latin sont de M. Le Guern).

p. 18; Rashed 1998, p. 55 et *sq.*], chinois [Lam Lay Yong 1980, p. 407–424], européens², l'ouvrage de Pascal continue d'être salué comme une vaste synthèse de ses applications [Koyré 1973, p. 368], [Serres 1995, p. 231–232]. Et pourtant, la disposition des traités, c'est-à-dire les liens et les renvois de l'un à l'autre, la résolution des problèmes énoncés, ou encore les passages de transition, nous conduiront à conclure que les démarches sans triangle y jouent un rôle de premier plan.

En contrepoint, la seconde partie de l'article tentera de montrer que le triangle est toujours resté au cœur des travaux de Pascal. Car lorsque celui-ci le délaisse comme moyen de résolution, il en renouvelle en même temps l'usage : le triangle fait désormais partie d'un procédé singulier pour démontrer des égalités. Une manière différente de penser l'objet prend forme chez Pascal. Le triangle ne produit plus des entiers en dernière instance; d'abord objet de résolution, il est devenu un *outil de preuve*. Aussi s'agira-t-il d'explicitier ce nouvel emploi du triangle.

LES DEUX VERSIONS DU RECUEIL

Le tableau 1 rend compte de certaines variations entre les deux recueils successifs (pour plus de clarté, à la différence des impressions originales, j'ai désigné les traités, de *(a.)* à *(f.)* et de *(1.)* à *(7.)*). Pour la seconde version, Pascal écrivit en français un nouveau traité d'ouverture sur le triangle (*(a.)* puis *(1.)*); les traités *(c.)*, *(e.)* et *(f.)* furent au contraire conservés tels quels en latin (*(4.)*, *(6.)* et *(7.)*). Quant au traité *(b.)*, il se scinda en deux pour le second recueil : le premier des quatre usages en français *(2.)* en traduisit la première partie, tandis que le *traité des ordres numériques* *(3.)* reprit la suite sans grand changement, voire à l'identique. Le même partage, que symbolisent les flèches, eut lieu sur le traité *Combinations* *(d.)* : le début devint l'*Usage II* en français, la seconde partie restant inchangée en latin *(5.)* d'une impression à l'autre. Seule l'application aux partis, apparue avec l'*Usage III*, fut un réel ajout. Certes l'*Usage IV* fut lui aussi spécialement rédigé pour la version en français, mais cette dernière application du triangle était déjà présente dans le recueil en latin par le biais du traité *(e.)*, où la méthode exposée nécessite le développement de puissances de binômes.

² Cf. entre autres [Tartaglia 1560], [Cardan 1570], [Stifel 1544]. À propos de Hérigone et Maurolico, cf. [Pascal, *Œuvres* 1998, I, p. 1053–1056].

RECUEIL EN LATIN	RECUEIL EN FRANÇAIS
<p>a. <i>Triangulus arithmeticus</i> Il énonce et démontre 18 propriétés (19 dans le 1.) sur les cellules, les lignes, les colonnes, les bases,...</p> <p><i>Problema</i></p>	<p>1. <i>Traité du triangle arithmétique</i> <i>Problème</i></p>
<p>b. <i>Numeri figurati seu ordines numerici</i> <i>Problema 1, Problema 2, Problema 3, Problema 4</i></p>	<p>2. <i>Divers usages du triangle arithmétique dont le générateur est l'unité</i> Chaque usage explicite ou justifie l'emploi du triangle pour l'application considérée</p> <p>→ Usage I pour les ordres numériques</p> <p>→ Usage II pour les combinaisons <i>Problème 1</i> (correspond au Lemma 5 du traité <i>d</i>).</p> <p>Usage III pour déterminer les partis... <i>Problème 1, Problème 2, Problème 3, Problème 4</i></p> <p>Usage IV pour trouver les puissances des binômes [...]</p>
<p>c. <i>De numerorum continuorum productis. Numericarum potestatum generalis</i> Extraction de la racine n-ième d'un nombre entier</p>	<p>→ 3. <i>Traité des ordres numériques</i> <i>Problema 1, Problema 2, Problema 3, Problema 4</i></p>
<p>d. <i>Combinaciones</i> <i>Lemma 5 (Problematicae enuntiatum), Lemma 6, Problema 1, Problema 2</i></p>	<p>→ 4. <i>De numerorum continuorum... Numericarum potestatum...</i></p> <p>→ 5. <i>Combinaciones</i> <i>Lemma 6, Problema 1, Problema 2</i></p>
<p>e. <i>Potestatum numericarum summa</i> Méthode pour calculer la somme des premiers termes d'une suite arithmétique d'entiers élevés à la même puissance</p>	<p>6. <i>Potestatum numericarum summa</i></p>
<p>f. <i>De numeris multiplicibus...</i> Étude des caractères de divisibilité des nombres</p>	<p>7. <i>De numeris multiplicibus...</i> Étude des caractères de divisibilité des nombres</p>

Tableau 1. Les deux versions du recueil

Ainsi, outre la présence nouvelle de l'application aux jeux de hasard, un vrai changement de présentation a eu lieu. La constitution du groupe des *Usages* en est la marque. Une séparation nette est désormais établie entre ce groupe et la suite du recueil. C'est ce que manifeste le partage opéré au sein des deux traités latins (*b.*) et (*d.*). On verra précisément en quoi *cette séparation révèle une direction dans le travail de Pascal autour du triangle arithmétique.*

Le tableau précise aussi le propos général de certains traités. Enfin, comme il sera beaucoup question dans l'article d'une série de « problèmes » (c'est le mot de Pascal) énoncés dans le recueil, nous avons indiqué leur répartition au sein de chaque version. Ils sont tous communs aux deux

versions, hormis les quatre problèmes de l'Usage III propres bien entendu à la seconde rédaction. Certes les traités sont surtout constitués de propriétés, conséquences, lemmes, remarques, etc., et ces « problèmes » ne représentent pas une grande part du recueil. Mais ils ont la *caractéristique de toujours se situer en fin de traités* (sauf les lemmes 5 et 6 du (d.)), comme des points culminants.

Vocabulaire du Traité du triangle arithmétique (1.)

La désignation des lignes et des colonnes a changé par rapport au *Triangulus arithmeticus* (a.). J'indique les termes employés dans celui-ci entre crochets. Pascal nomme *cellules* les cases du triangle, *rangs parallèles* ses lignes, *rangs perpendiculaires* ses colonnes, *bases* ses diagonales, *dividente* son axe de symétrie. Pour désigner le numéro d'un rang ou d'une base, il parle d'*exposant*.

	1	2	3	4	5	6	7
1			φ				&
2			φ		A	&	
3			φ		&		
4	@	@	@ φ	@ &			
5		B	φ &				
6		&					
7	&						

Figure 1. Le triangle arithmétique de Pascal

- @ : cellules du rang parallèle d'exposant 4 [cellules de rang d'exposant 4]
- φ : cellules du rang perpendiculaire d'exposant 3 [cellules de racine 3]
- & : cellules de la 7^e base

Les cellules que j'ai notées A et B sont dites cellules *réciproques* : A est de rang parallèle (d'exposant) 2 et de rang perpendiculaire 5, B est de rang parallèle 5 et de rang perpendiculaire 2.

Rappelons enfin une propriété donnée par Pascal au début du traité (1.).

Soit une cellule quelconque. Si je note *x* l'exposant de son rang parallèle, *y* l'exposant de son rang perpendiculaire, *z* l'exposant de sa base, on a :

$$x + y = z + 1.$$

Ainsi, pour la cellule K (voir figure 2) : $5 + 3 = 7 + 1$.

Le triangle arithmétique des deux versions

Le triangle qui suit reproduit celui des deux impressions du recueil : les lettres des sept premières *bases* y figurent. J'ai simplement ajouté les lettres minuscules de a à q dans les cellules des neuvième et huitième bases, cellules qui interviendront dans la suite.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	G ¹	σ ¹	π ¹	λ ¹	μ ¹	δ ¹	ζ ¹	q ¹	i ¹	1
2	φ ¹	ψ ²	θ ³	R ⁴	S ⁵	N ⁶	p ⁷	h ⁸	9	
3	A ¹	B ³	C ⁶	ω ¹⁰	ξ ¹⁵	o ²¹	g ²⁸	36		
4	D ¹	E ⁴	F ¹⁰	ρ ²⁰	n ³⁵	f ⁵⁶	84			
5	H ¹	M ⁵	K ¹⁵	m ³⁵	e ⁷⁰	126				
6	P ¹	Q ⁶	l ²¹	d ⁵⁶	126					
7	V ¹	k ⁷	c ²⁸	84						
8	j ¹	b ⁸	36							
9	a ¹	9								
10	1									

dividente

Figure 2

I. DEUX MODES DE RÉOLUTION

Cette première partie consiste à mettre en évidence la coexistence permanente, dans le recueil, de *deux grandes manières de résoudre* les problèmes qui y sont énoncés, que l'on appellera *modes de résolution*. On prendra surtout en compte la version en français, plus complète par l'apparition d'une application nouvelle et de ses quatre problèmes. On rappellera d'abord comment Pascal expose l'emploi du triangle pour chaque application, et plus exactement de quelle façon il faut *lire les cellules du triangle*; on explicitera ensuite *trois identités* qu'on trouve chez Pascal (deux sont dans le recueil, la troisième dans une lettre envoyée à Fermat). Pascal n'a pas particulièrement mis en valeur ces identités. Si on les extrait de ces écrits, c'est parce qu'elles forment, comme nous le verrons, la jonction entre les deux modes de résolution.

A. Les quatre applications.

C'est le rôle des quatre *Usages* (2.) d'expliciter les différentes lectures du triangle et de les justifier (on ne détaillera pas ce second point).

1. Les nombres figurés – triangulaires, pyramidaux, . . . (Usage I)

Le tableau 2 reproduit celui de l'*Usage*. Les nombres figurés se lisent suivant les lignes du triangle, et Pascal les range à l'aide du terme d'*ordres numériques*. Il appelle par exemple *nombres du troisième ordre* les nombres triangulaires, de la troisième ligne (le fait de numéroter les différents types de nombres figurés simplifie le traitement des problèmes relatifs à cette application); il appelle *racine* ce qui est plus couramment désigné comme le côté d'un nombre figuré³. Ainsi 126 est dit *nombre d'ordre 5 et de racine 6* (Fermat l'aurait pour sa part nommé nombre triangulo-triangulaire de côté 6 [Fermat *Œuvres* 1922, t. III, p. 273, Observation 46 sur Diophante]).

2. Les combinaisons (Usage II)

Pour connaître $C(k, n)$ ⁴, le nombre de combinaisons de k éléments

³ *Racine* (*radix* en latin) est aussi le mot utilisé dans le traité (a.) pour désigner les colonnes du triangle (*cf.* le vocabulaire dans notre introduction).

⁴ J'emploierai cette notation particulière lorsqu'il sera question de combinaisons au sens de dénombrements, afin de la distinguer de notre écriture C_n^k plus générale, et qui par surcroît sous-entend pour nous les trois factorielles $n!$, $k!$ et $(n - k)!$ qui ne se présentent jamais chez Pascal.

qu'est né l'*Usage III*. Les trois méthodes seront explicitées sur l'exemple suivant (que nous choisissons pour son caractère générique et parce que c'est l'exemple dans le contexte duquel Pascal traite le *Problème 1* de l'*Usage III*).

Exemple : les joueurs ont convenu d'une partie en 9 points puis finalement se séparent au moment où A en a 7 et B en a 5.

Le joueur A ne peut emporter la totalité de la mise, mais seulement une fraction de celle-ci, supérieure à $\frac{1}{2}$. Autrement dit, le problème est donc de connaître, en cas de partie inachevée, la *fraction* de la mise qui revient à chacun des deux joueurs⁶. « Cette juste distribution s'appelle le parti. » Pascal et Fermat conçoivent à cet égard les problèmes de partis selon un même *a priori* : ce sont les points manquant à chacun des deux joueurs qui déterminent le juste partage [Coumet 1965]. Ainsi, que l'interruption ait lieu lorsque A mène 7 à 5 dans une partie en 9 points ou bien 2 à 0 dans une partie en 4 points, *le parti sera le même*, puisque dans les deux cas il manque à A et B, pour la victoire, 2 et 4 points respectivement.

Le premier des deux procédés de la correspondance est propre à Pascal. Il nous est parvenu par sa *lettre à Fermat datée du 29 juillet 1654*, et il est aussi présenté en détail au début de l'*Usage III*. En voici le principe : la somme qui revient à l'un des joueurs égale la moyenne de deux sommes : celles qui lui reviendraient dans les deux situations possibles après un point supplémentaire. Soit de nouveau une partie en 9 points, l'interruption du jeu ayant lieu cette fois-ci lorsque A mène 8 à 7. Les deux issues possibles au point suivant sont : ou bien 9 à 7, et A emporterait alors la mise totale ; ou bien 8 à 8, et A en emporterait la moitié. Il lui revient donc la moyenne du tout et de la moitié, soit les $\frac{3}{4}$ de la somme en jeu.

Or, dans la lettre comme dans l'*Usage*, Pascal choisit toujours de tels cas, où les deux sommes considérées s'obtiennent aisément. Mais lorsque les deux joueurs sont éloignés de la victoire, ces sommes ne peuvent plus se déduire d'emblée : il faut à partir d'elles réitérer le même raisonnement. . . ; et ainsi de suite, en procédant *pas à pas*, jusqu'à aboutir à une situation de gain total ou de score nul pour l'un des joueurs. J'appellerai donc *procédé pas à pas* cette manière de faire les partis. Je le schématise ci-dessous sur mon exemple, en notant X la somme totale en jeu et S la somme qui

⁶ La réponse n'est immédiate qu'en cas d'interruption sur un score nul : chaque joueur récupère alors sa mise, soit la moitié de la totalité.

revient au joueur A. À chaque issue possible, j'indique entre parenthèses la somme correspondante qui revient à A. Il s'agit donc de calculer quelle fraction de X représente S , chaque somme étant la moyenne des deux sommes du pas suivant (voir la figure 3).

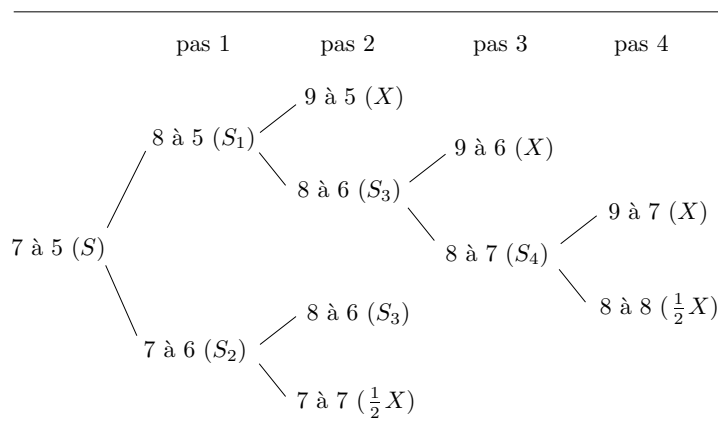


Figure 3

On a $S = \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$. Mais $S_1 = \frac{1}{2}(X + S_3)$ et $S_2 = \frac{1}{2}(S_3 + \frac{1}{2}X)$. Mais $S_3 = \frac{1}{2}(X + S_4)$ et $S_4 = \frac{1}{2}(X + \frac{1}{2}X)$. On en déduit que $S_4 = \frac{3}{4}X$, d'où $S_3 = \frac{7}{8}X$, d'où $S_1 = \frac{15}{16}X$ et $S_2 = \frac{11}{16}X$, d'où enfin $S = \frac{13}{16}X$.

Par conséquent, il revient au joueur A les $\frac{13}{16}$ de la mise totale. Or, plus les joueurs sont éloignés de la victoire, plus le nombre de pas et le nombre de sommes à connaître augmentent, et plus la démarche devient complexe (d'où aussi le choix de notre exemple, qui montre clairement la complexité du procédé). C'est sans doute en cela que Pascal semble ne pas se satisfaire de son *procédé pas à pas*, comme le donne à penser sa *lettre du 27 octobre 1654*, qui clôt la correspondance sur les partis et la confrontation des deux procédés : « j'admire votre méthode pour les partis, d'autant mieux que je l'entends fort bien ; elle est entièrement vôtre, et n'a rien de commun avec la mienne, et arrive au même but *facilement* » [Pascal, *Œuvres* 1998, p. 166 ; je souligne].

Ce second procédé auquel Pascal fait précisément allusion est explicité dans sa *lettre du 24 août 1654* [*Œuvres* 1998, p. 155–162]. C'est à Fermat qu'il faut néanmoins l'attribuer. Pascal écrit en effet :

a a a a	a a a a	b b b b	b b b b
a a a a	b b b b	a a a a	b b b b
a a b b	a a b b	a a b b	a a b b
a b a b	a b a b	a b a b	a b a b

Tableau 3 (lettre du 24 août)

« Voici comment vous procédez quand il y a deux joueurs :

Si deux joueurs, jouant en plusieurs parties, se trouvent en cet état qu'il manque deux parties au premier et trois au second, pour trouver le parti, il faut (dites-vous) voir en combien de parties le jeu sera décidé absolument.

Il est aisé de supputer que ce sera en quatre parties, d'où vous concluez qu'il faut voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs et voir combien il y a de combinaisons pour faire gagner le premier et combien pour le second et partager l'argent suivant cette proportion. »

Pour représenter l'ensemble des issues possibles de quatre parties, Pascal dresse le tableau 3 dans lequel il marque d'un a (resp. d'un b) une partie gagnée par le premier joueur (resp. le second)⁷.

Il faut ici s'arrêter sur la logique de Pascal pour disposer les a et les b et représenter l'ensemble des 16 combinaisons possibles : partager la première ligne en deux groupes de 8 a et 8 b, puis des groupes de 4 a et 4 b pour la deuxième, etc. Or Pascal y voit apparaître quatre blocs de quatre combinaisons, comme le montrent les séparations dans son tableau. « Et maintenant il faut voir combien ces dés peuvent avoir d'assiettes différentes. Cela est aisé à supputer : il peuvent en avoir seize, qui est le second degré de quatre, c'est-à-dire le carré » [*Œuvres* 1998, p. 156]. Il ne dénombre pas en somme les issues possibles de la manière habituelle en 2^4 , qui est aussi la sienne en général⁸, mais en 4^2 (nous retrouverons cette question des puissances de 2 et des puissances de 4 dans notre seconde partie).

Afin de mettre en évidence le rapport des partis avec le triangle arithmétique, via les combinaisons, disposons les a et les b selon une autre

⁷ Nous ne savons pas en revanche si Fermat lui-même avait recours à des tableaux pour ses dénombrements.

⁸ Cf., dans cette partie, la première identité (B, § 1).

a	a	a	a	b	a	a	a	b	b	b	a	b	b	b	b
a	a	a	b	a	a	b	b	a	a	b	b	a	b	b	b
a	a	b	a	a	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	b
a	b	a	a	a	b	b	a	b	a	a	b	b	b	a	b

Tableau 4

logique qui fait mieux apparaître les cas favorables au joueur A et selon laquelle le tableau devient le tableau 4.

Puisqu'il manque *deux parties* à A, ce sont les 11 premières colonnes, où figurent *au moins deux a*, qui lui sont favorables. Il emporte par conséquent les $\frac{11}{16}$ de la mise totale.

Et si l'on revient à notre exemple : il manque 2 parties à A et 4 à B pour que l'un des deux joueurs atteigne 9, il reste donc à jouer 5 parties au plus⁹ (« le jeu sera décidé absolument »). Il s'agit par suite d'expliciter les 2^5 issues possibles de 5 parties (le tableau 5 reprend la disposition du précédent).

a	a	a	a	a	b	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b
a	a	a	a	b	a	a	a	a	b	b	b	a	a	a	b
a	a	a	b	a	a	a	b	b	a	a	b	a	a	b	a
a	a	b	a	a	a	b	a	b	a	b	a	a	b	a	a
a	b	a	a	a	a	b	b	a	b	a	a	b	a	a	a

a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	a	b	b	b	b	b
a	b	b	b	a	a	a	b	b	b	b	a	b	b	b	b
b	a	b	b	a	b	b	a	a	b	b	b	a	b	b	b
b	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	b	a	b	b
b	b	b	a	b	b	a	b	a	a	b	b	b	b	a	b

Tableau 5

On peut se demander comment Pascal lui-même aurait réparti l'ensemble des combinaisons dans ce cas et en aurait énoncé le cardinal, d'autant

⁹ Il suffit donc d'ôter 1 à la somme $2 + 4$ des parties manquantes.

plus que 32 n'est pas une puissance de 4. Selon la logique donnée pour le tableau 3, le tableau de Pascal se serait peut-être présenté comme suit (tableau 6).

a a a a	a a a a	a a a a	a a a a
a a a a	a a a a	b b b b	b b b b
a a a a	b b b b	a a a a	b b b b
a a b b	a a b b	a a b b	a a b b
a b a b	a b a b	a b a b	a b a b

b b b b	b b b b	b b b b	b b b b
a a a a	a a a a	b b b b	b b b b
a a a a	b b b b	a a a a	b b b b
a a b b	a a b b	a a b b	a a b b
a b a b	a b a b	a b a b	a b a b

Tableau 6. Pascal aurait ainsi pu lire le tableau en deux groupes de quatre blocs de quatre et écrire le nombre de combinaisons : $2 \cdot 4^2$, au lieu de 2^5 .

Parmi ces 32 combinaisons, celles favorables au joueur A (à qui il manque deux parties) sont dans les 26 premières colonnes du tableau 5 (qui contiennent au moins deux a). En somme, ce *procédé par combinaisons*, comme le *procédé pas à pas*, attribue à ce joueur les $\frac{26}{32}$, soit les $\frac{13}{16}$ de l'argent mis en jeu. Et surtout, quel que soit le principe de disposition du tableau, 26 apparaît comme la somme de quatre termes : 1, 5, 10 et 10. Ces termes déterminent le nombre de cas favorables au joueur A, c'est-à-dire défavorables au joueur B. Ils s'écriraient respectivement, selon cette dernière remarque : $C(0, 5)$, $C(1, 5)$, $C(2, 5)$ et $C(3, 5)$ ¹⁰. Et donc, s'il y a quatre termes, c'est parce qu'il manque quatre parties au joueur B.

Bien que rien ne le certifie, il est dès lors très possible que Pascal ait ensuite transposé la méthode de Fermat à son triangle. Comment

¹⁰ Selon la notation introduite plus haut dans le paragraphe 2.

en effet obtenir la *fraction relative au joueur A* à partir du triangle? L'*Usage III* s'achève sur l'énonciation de quatre problèmes, tous résolus au moyen du triangle, et c'est dans le *Problème 1* que Pascal traite le cas général du problème des partis entre deux joueurs. S'il manque aux deux joueurs ensemble *6 parties*, comme dans notre exemple, les entiers à considérer, on vient de le voir, sont des $C(k, 5)$; ils se liront donc dans les cellules de la *sixième* base. Par conséquent il faut, de façon générale, prendre « dans le triangle la base dans laquelle il y a autant de cellules qu'il manque de parties aux deux ensemble [...]. Par exemple, qu'il y ait deux joueurs, au premier desquels il manque deux parties, et à l'autre 4 : il faut trouver le parti. Soient ajoutés ces deux nombres 2 et 4, et soit leur somme 6; soit prise la sixième base du triangle arithmétique $P\delta$, dans laquelle il y a par conséquent six cellules $P, M, F, \omega, S, \delta$ ». Le *dénominateur* de la fraction cherchée égale le nombre d'issues possibles parmi 5 parties; ce sera aussi *la somme de toutes les cellules de la base*. Quant au *numérateur* $C(0, 5) + C(1, 5) + C(2, 5) + C(3, 5)$, ce sera la somme d'autant de cellules (à commencer par la première, P ou δ) qu'il manque de parties à l'autre joueur. « Quelque somme qu'ils jouent, il en appartient au premier une portion exprimée par cette fraction $(F + \omega + S + \delta) / (P + M + F + \omega + S + \delta)$ dont le numérateur est la somme des 4 cellules de l'autre et le dénominateur la somme de toutes les cellules. » La solution générale du problème des partis est donc une fraction dont le dénominateur est toujours la somme de toutes les cellules d'une base et le numérateur une somme *partielle* de celles-ci. « Et, s'il manque 6 parties à l'un, et 2 à l'autre, le parti s'en trouvera dans la huitième base, dans laquelle les six premières cellules contiennent ce qui appartient à celui à qui il manque deux parties, et les deux autres ce qui appartient à celui à qui il en manque six; et ainsi à l'infini » [Pascal *Œuvres* 1998, p. 313].

Ces lignes de l'*Usage III* concluent la résolution proprement dite du problème général des partis par le triangle. Pascal en donne ensuite la démonstration. Il y a là un fait remarquable : si en elle-même la *solution* du problème doit sans doute beaucoup au *procédé par combinaisons* de Fermat, comme on vient de le voir, c'est en revanche à son propre *procédé pas à pas* que Pascal fait appel pour la *démontrer*, au moyen précisément d'un raisonnement par récurrence. C'est de cette manière que la résolution par le triangle met en rapport les deux procédés de la correspondance. On

retrouvera plus loin, et de façon plus générale, l'importance de bien faire la distinction entre une *résolution* et une *justification*.

4. Les coefficients des puissances des binômes (Usage IV)

Les coefficients du développement de $(a + b)^n$, avec n entier positif, se lisent dans les cellules de la $(n + 1)$ -ième base. Pour développer $(A + 1)^4$, « il faut prendre dans le triangle arithmétique la base cinquième, savoir celle dont l'exposant 5 est plus grand de l'unité que 4, exposant de l'ordre proposé. Les cellules de cette cinquième base sont 1, 4, 6, 4, 1 [...]. Et ainsi on aura $1A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A + 1$, qui sera la puissance carré-carrée du binôme $A + 1$. »

B. Trois identités.

L'examen des problèmes énoncés dans le recueil français aura pour but de mettre en évidence deux modes de résolution complémentaires. Il me semble important au préalable d'extraire des textes considérés — à savoir les deux recueils et les lettres à Fermat —, *trois identités*, grâce auxquelles Pascal pouvait opérer le renversement de l'un des deux modes en son complémentaire.

1. Première identité.

Le *Traité du triangle arithmétique* se compose de dix-neuf propriétés sur les cellules du triangle : Pascal les nomme *conséquences*, on verra pourquoi. La première identité (notée (1)) est la conséquence huitième du traité : *la somme de toutes les cellules d'une même base est une puissance de 2*.

Notons S_n la somme des n cellules de la n -ième base. On a

$$(1) \quad S_n = 2^{n-1}.$$

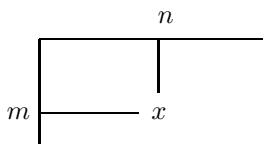
2. Seconde identité.

Elle résout l'unique problème qui clôt, au terme des dix-neuf conséquences, le *Traité du triangle arithmétique*. Elle identifie une cellule quelconque du triangle à un *quotient de deux produits* dépendant seulement de ses numéros de ligne et de colonne. Pascal écrit :

« Je finis donc par le problème suivant, qui fait l'accomplissement de ce traité.

Problème : Étant donnés les exposants des rangs perpendiculaire et parallèle d'une cellule, trouver le nombre de la cellule » [*Œuvres* 1998, p. 294].

Puis il énonce très précisément son principe de résolution : « *sans se servir de Triangle arithmétique.* » Voici résumée sa méthode générale où l'on notera x le nombre contenu dans la cellule de ligne m et de colonne n .



Choisissons $m = 5$ et $n = 3$ (il s'agit donc de la cellule K de la figure 2). Il faut prendre alors le produit de tous les naturels strictement inférieurs à m : $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, puis le produit d'autant de naturels à partir de n : $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$.

La solution est le quotient des deux produits¹¹. Ce sera notre seconde identité :

$$(2) \quad x = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \quad (\text{la cellule K est bien égale à 15}).$$

Et de façon générale (ce que Pascal ne faisait jamais) :

$$(2') \quad x = \frac{n(n+1)(n+2) \cdots (n+m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1)}.$$

3. Troisième identité.

Dans l'*Usage III pour les partis...* et dans sa *lettre à Fermat du 29 juillet*, Pascal s'est aussi intéressé à un cas particulier de parti entre deux joueurs, la *valeur de la première partie*. Ceux-ci ayant fixé en combien de parties (c'est-à-dire en combien de points) se fera le jeu, ils décident finalement de se séparer alors qu'une seule partie a été jouée; il s'agit de savoir ce qui revient au vainqueur de cette première partie, soit : de calculer quelle *fraction de sa propre mise* le perdant doit céder. C'est cette fraction que Pascal appelle la *valeur de la première partie sur l'argent du perdant*. Le calcul de cette valeur constitue le *Problème 3* de l'*Usage III*.

Sa solution est une fraction qui a pour numérateur une cellule de base impaire de la *dividente* ($G, \psi, C, \rho, e, \dots$) et pour dénominateur la *somme de toutes les cellules de la même base*. Si les joueurs ont convenu d'une

¹¹ Par la suite, on appellera de façon générale *quotient de deux produits* tout quotient de cette forme. Il faut à ce propos bien distinguer un tel quotient de la notation actuelle aux trois factorielles. Ce qu'on appelle ici *quotient de deux produits* ne comporte en effet qu'une seule factorielle, au dénominateur.

partie en 5 points par exemple et qu'ils l'interrompent après le premier, il en manque donc 4 à l'un et 5 à l'autre, 9 au total, jusqu'à la victoire. Il faut alors se placer dans la neuvième base du triangle. Le numérateur est la cellule de la dividente (notée e), et le dénominateur est la somme des 9 cellules.

Ainsi, la valeur de la première partie de 5 (par le triangle) est

$$\frac{e}{a+b+c+d+e+f+g+h+i}, \quad \text{soit} \quad \frac{70}{256}.$$

La démonstration s'appuie sur la résolution générale que Pascal vient de donner dans le *Problème 1*¹² pour un parti quelconque. Pascal montre notamment que la fraction s'écrit aussi $\frac{e/2}{e/2+f+g+h+i}$, soit $\frac{35}{128}$, l'équivalence des deux écritures étant évidente d'après l'égalité des cellules réciproques a et i , b et h , c et g , d et f .

Or, dans la *lettre du 29 juillet*, Pascal donne à Fermat un calcul très rapide de cette même fraction, sans faire appel au triangle : dans le cas d'une partie de 5 encore, elle a pour numérateur le produit des 4 premiers nombres impairs et pour dénominateur le produit des 4 premiers pairs¹³.

Ainsi, la valeur de la première partie de 5 (sans recours au triangle) est $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$, soit $\frac{105}{384} = \frac{35}{128}$. Ce sont ces deux manières différentes d'énoncer la même fraction qui constituent ce que nous appellerons la troisième identité (notée (3)). C'est, dans le cas d'une partie de 5 :

$$(3) \quad \frac{e}{a+b+c+d+e+f+g+h+i} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}.$$

Et de façon générale, pour résoudre le problème par le triangle dans une partie de n , il faut se placer dans la base d'exposant $2n - 1$. Si je note S_{2n-1} la somme des cellules de la $(2n - 1)$ -ème base et D_{2n-1} la cellule de la dividente contenue dans cette même base ($2n - 1$ étant impair), la troisième identité devient donc :

$$(3) \quad \frac{D_{2n-1}}{S_{2n-1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n - 2)}.$$

On notera enfin que si la solution de l'*Usage* est clairement démontrée, la justification de celle de la lettre est en revanche très incomplète. Pascal

¹² Cf. plus haut, A, § 3.

¹³ Il y a ainsi, aussi bien au numérateur qu'au dénominateur, autant de facteurs qu'il manque de parties au vainqueur de la première : $5 - 1 = 4$.

écrit à cet égard : « ce qui se démontre, mais avec beaucoup de peine, par les combinaisons telles que vous les avez imaginées » [*Œuvres* 1998, p. 148]. Pour sa démonstration, il identifie en effet la fraction $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$, soit $\frac{105}{384}$, à un quotient de combinaisons :

« La valeur de la première partie de 5 sur l'argent de l'autre est la fraction qui a pour numérateur la moitié de la combinaison de 4 sur 8 (je prends 4 parce qu'il est égal au nombre des parties qu'il manque, et 8 parce qu'il est double de 4) et pour dénominateur ce même numérateur plus toutes les combinaisons supérieures » [Pascal, *Œuvres* 1998, p. 150]. C'est-à-dire

$$\frac{\frac{1}{2}C(4, 8)}{\frac{1}{2}C(4, 8) + C(5, 8) + C(6, 8) + C(7, 8) + C(8, 8)}, \text{ soit } \frac{35}{128}.$$

« Ainsi, si j'ai une partie de 5, il m'appartient, sur l'argent de mon joueur, les $\frac{35}{128}$, c'est-à-dire que, s'il a mis 128 pistoles, j'en prends 35 et lui laisse le reste, 93. Or cette fraction $\frac{35}{128}$ est la même que celle-là : $\frac{105}{384}$. »

Mais en fait de démonstration, Fermat doit se contenter du constat précédent, l'égalité des deux fractions dans le cas particulier d'une partie en cinq points. Autrement dit, Pascal ne justifie pas de *façon générale*, pour un nombre de parties quelconque, l'identification des deux formes particulières

$$\frac{\frac{1}{2}C(4, 8)}{\frac{1}{2}C(4, 8) + C(5, 8) + C(6, 8) + C(7, 8) + C(8, 8)} \quad \text{et} \quad \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}.$$

« Vous verrez bien sans doute tout cela, si vous vous en donnez tant soit peu la peine : c'est pourquoi je trouve inutile de vous en entretenir davantage. »

Or, si l'on remplace chacune des combinaisons du quotient solution de la lettre par sa cellule correspondante — et Pascal connaît le lien du triangle aux combinaisons lorsqu'il écrit à Fermat —, on obtient exactement la solution donnée dans l'*Usage* :

$$\frac{\frac{1}{2}e}{\frac{1}{2}e + f + g + h + i}.$$

C'est dire finalement qu'à notre connaissance, la troisième identité n'a pas été entièrement justifiée par Pascal, ou du moins sa démonstration ne nous est pas parvenue. Nous reviendrons longuement sur ce point dans la seconde partie.

C. Les problèmes du recueil.

Les problèmes énoncés et résolus dans le recueil ont ceci en commun d'être toujours placés en fin de traité, comme une sorte de conclusion ou de but. On mettra ici l'accent sur les principes adoptés par Pascal pour leurs résolutions, principes qu'il indique parfois lui-même. Ce qu'on mettra en évidence tout particulièrement, c'est que si l'on considère l'ensemble des problèmes, ils se réduisent à deux uniques modes de résolution. Le *premier mode* ne surprendra pas : il s'agit de *résolutions au moyen du triangle*. Il faut néanmoins préciser ce qu'il recouvre : *ce mode consiste à lire le triangle, en prélevant les entiers contenus dans ses cellules*. Quant au second mode, il vise à résoudre les mêmes problèmes « *sans le triangle arithmétique* », comme Pascal l'invoque à plusieurs reprises. Mon but ici est double. D'abord, montrer que ce mode n'est pas secondaire : loin de former un appendice au sein du recueil, les résolutions sans triangle indiquent au contraire une véritable direction dans les travaux de Pascal. Ensuite, mettre en évidence le rôle clé des trois identités considérées, en tant qu'elles rendent possible le *renversement* du premier mode de résolution par le triangle en son mode complémentaire.

1. Les combinaisons : deux problèmes.

Problème I. « Étant donné le nombre qu'on voudra, trouver la somme de toutes les combinaisons qui peuvent se faire dans ce nombre » [*Œuvres* 1998, p. 249].

Que vaut par exemple $\sum_{k=1}^5 C(k, 5)$ — Pascal ne reconnaissant pas l'existence de $C(0, n)$ — ? Ce problème est posé à la fin de *Combinaisons* (n° 5). Et c'est le second mode de résolution qui est invoqué. « *Sans le triangle arithmétique* », ajoute en effet Pascal (*absque triang. arith.*).

Or, le *Lemme VI* du même traité donne déjà une solution du problème selon le premier mode de résolution : les différentes combinaisons possibles dans un nombre n se lisent dans les cellules de la $(n + 1)$ -ième base du triangle (sauf la première, soit $C(0, n)$). Il suffit donc d'ajouter toutes ces cellules (moins l'unité) pour résoudre le *Problème I au moyen du triangle*, selon le premier mode. Exemple :

$$\sum_{k=1}^5 C(k, 5) = (P + M + F + \omega + S + \delta) - 1.$$

Or, d'après l'identité (1), une telle somme égale une puissance de 2. Le problème se résout donc effectivement « sans le triangle arithmétique ». Exemple : $\sum_{k=1}^5 C(k, 5) = 2^5 - 1$.

Problème II : il faut trouver $C(k, n)$ le nombre de combinaisons possibles de k éléments parmi n .

Ce problème est énoncé à deux reprises dans le recueil. Et dans la version en français, il clôt les deux traités relatifs aux combinaisons : *l'usage du triangle arithmétique pour les combinaisons* (n° 2), et *Combinations* (n° 5). Or, fait remarquable, Pascal précise pour chacun des deux énoncés le principe de résolution. Dans *l'Usage*, il faut résoudre le problème « par le triangle arithmétique » (premier mode). Aussi s'agit-il de lire le triangle et de *déterminer la cellule qui convient*. Or Pascal vient de démontrer le procédé : sur le cas qu'il choisit, $C(4, 6)$, ce sera la cinquième cellule de la septième base : $C(4, 6) = \xi = 15$.

En revanche, dans *Combinations*, le mode de résolution a changé. Pascal demande à présent de le résoudre « sans le triangle arithmétique » (*absque triang. arith.*). Il s'agit donc de *calculer* $C(k, n)$. Or, il suffit de faire ici appel à l'identité (2), c'est-à-dire au quotient de deux produits, pour passer de la lecture du triangle au calcul d'une cellule. Car calculer $C(4, 6)$ par exemple, c'est trouver le nombre contenu dans la *cinquième* cellule de la *septième* base, ou aussi la cellule de la *cinquième* colonne et de la *troisième* ligne ($7 - 5 + 1 = 3$)¹⁴. On est bien ramené au *problème* final du *triangle arithmétique*. D'où :

$$C(4, 6) = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15.$$

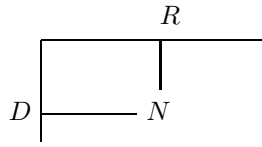
2. Les nombres figurés (ordres numériques) : quatre problèmes.

Là encore, deux traités sont consacrés à ce second domaine dans le recueil français : *l'Usage pour les ordres numériques* (n° 2) et le *Traité des ordres numériques* (n° 3).

Le premier se contente d'établir la coïncidence des nombres figurés et du *Triangle*. Et c'est seulement dans le second que Pascal énonce les quatre problèmes ; nous laisserons de côté le quatrième qui se ramène directement au premier. Les voici :

¹⁴ Cf. la fin du rappel sur le vocabulaire, dans l'introduction.

Soient N un nombre entier, D son ordre, R sa racine.



Problème I. Connaissant D et R , calculer N .

Problème II. Connaissant N et D , calculer R .

Problème III. Connaissant N et R , calculer D .

(Dans les *Problèmes* symétriques¹⁵ *II* et *III*, le nombre N donné n'est pas forcément un nombre figuré. En ce cas, dans le *Problème II* par exemple, il faut trouver la racine R du plus grand nombre figuré (appartenant à l'ordre D donné) inférieur au N donné.)

Or les résolutions de Pascal dans le second traité ne font pas appel au triangle arithmétique. Ainsi il ne procède pas par lecture des cellules. C'est même un fait remarquable que Pascal ne fasse pas allusion à la simplicité des solutions qu'il serait possible d'apporter à ces problèmes si l'on voulait les résoudre par le triangle arithmétique (premier mode de résolution). Mais c'est en fait l'*usage* qui, par la correspondance directe du triangle et des nombres figurés, incarne ce mode. Si par exemple on cherchait *au moyen du triangle* la racine du *sixième* ordre du nombre 58 (*Problème II*), il suffirait de se reporter à la *sixième* ligne du triangle. Le plus grand nombre d'ordre 6 inférieur à 58 est 56. La solution est donc 4, racine de 56.

Comment Pascal procède-t-il donc dans le second traité ? Il résout les problèmes par des calculs : sans l'écrire explicitement comme dans le cas des combinaisons, il n'a pas recours au *triangle arithmétique* (second mode).

C'est encore l'*identité (2)*, le *quotient de deux produits*, qui permet de résoudre les trois problèmes sans se servir du triangle. Car le *Problème I* traduit exactement le *Problème final* du *Traité du triangle arithmétique* en termes d'ordres numériques. Quant aux deux suivants, Pascal déploie pour leur résolution un très court algorithme qui repose précisément sur cette identité. Il écrit à ce propos : « la méthode par laquelle j'obtiens la

¹⁵ Cf. la note 16.

résolution des ordres est très générale; mais je l'ai cherchée longtemps» [Pascal, *Œuvres* 1998, p. 210]; phrase qui laisse transparaître sa volonté de connaître des résolutions qui n'ont pas recours au triangle. Tout nombre figuré s'écrit sous forme d'un *quotient de deux produits*. Mais Pascal énonce de plus dans le *Problème I* que le plus petit facteur du numérateur est toujours l'ordre de ce nombre et que le plus grand du dénominateur égale la *racine diminuée de l'unité*. Si l'on reprend le cas précédent (trouver la racine du sixième ordre du nombre 58), cela donne pour les premiers nombres de cet ordre :

$$\begin{array}{l} \text{Racine :} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad \textit{etc.} \\ \text{Ordre 6 :} \quad 1 \quad \frac{6}{1} \quad \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} \quad \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \quad \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \quad \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \quad \textit{etc.} \end{array}$$

Le problème se ramène donc pour Pascal à chercher où se situe 58 à l'intérieur de cette suite. D'où cet algorithme que je transcris ainsi :

On pose 6 et 58.

On compare $6 \cdot 7 = 42$ et $58 \cdot 2 = 116$; on trouve $42 < 116$.

$42 \cdot 8 = 336$ et $116 \cdot 3 = 348$; on trouve $336 < 348$.

$336 \cdot 9 = 3024$ et $348 \cdot 4 = 1392$; on trouve $3024 > 1392$.

Lorsque le produit de la colonne de droite devient pour la première fois inférieur à celui de gauche, *son dernier facteur 4 nous donne la racine du sixième ordre de 58*.

Pascal justifie son algorithme de la façon suivante : d'après ce qui précède, on peut écrire que

$$\begin{array}{ll} 336 = 6 \cdot 7 \cdot 8, & 348 = 58 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3, \\ 3024 = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9, & 1392 = 58 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4. \end{array}$$

Or $336 < 348$, donc $6 \cdot 7 \cdot 8 < 58 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$, et $3024 > 1392$, donc $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 > 58 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$. On en déduit que $\frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} < 58 < \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$.

Le nombre du sixième ordre *immédiatement inférieur à 58*, $\frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, a donc 3 pour plus grand facteur au dénominateur; par suite sa racine est 4 (3 augmenté de l'unité). Conclusion : 4 est la racine du sixième ordre de 58.

Par conséquent on est en présence, pour chacune des deux premières applications, de deux manières de résoudre les mêmes problèmes. L'un

des modes consiste en la lecture des entiers contenus dans le triangle, l'autre en des calculs où ces entiers n'interviennent plus. Quant aux identités (1) et (2), elles ont permis de transformer les solutions relevant du premier mode en solutions propres au second. Certes les quatre problèmes relatifs aux nombres figurés ne sont pas explicitement résolus au moyen du triangle. Il ne faut cependant pas perdre de vue que le premier mode est forcément implicite lorsque la question se pose de les résoudre sans triangle. Car de telles résolutions, on vient de le voir, reposent toujours sur un lien préalable entre triangle et nombres figurés. En somme, il faut surtout insister sur le fait que Pascal ne s'est pas contenté d'utiliser le triangle pour cette application. Il a voulu en *second lieu* des procédés de résolution qui n'y recourent plus.

On a par ailleurs décrit l'apparition, dans le recueil en français, de deux traités pour chacune des deux applications. Plus précisément, les traités en latin *Combinaciones* d'une part, *Numeri figurati seu ordines numerici* d'autre part, se sont trouvés divisés en deux parties. Or, cette coupure, dans les deux cas, rend compte de façon très précise du changement de mode de résolution. Sur le traité *Combinaciones*, elle s'effectue en effet aussitôt après le *Lemme 5*, qui devient en français le *Problème I*. Ainsi, l'*Usage II* s'achève sur la résolution de ce problème « par le triangle arithmétique » (*in triangul. arith.*, dit Pascal dans sa première version en latin), tandis que la seconde partie conservée en latin (5.) finit sur la résolution du même problème « sans le triangle arithmétique » (*absque Triang. arith.*). De façon similaire sur le traité *Numeri figurati seu ordines numerici*, la coupure a lieu lorsque finit l'exposé des rapports entre triangle et nombres figurés et que commencent les résolutions des quatre problèmes sans le triangle.

Or, et c'est un point capital, lorsqu'il procède à ce partage, Pascal ajoute, à chacun des *Usages* et en des termes similaires, une nouvelle conclusion qui annonce l'existence d'une suite :

Extrait 1 : « Ce qui fait connaître que tout ce qui a été dit des rangs et des cellules du Triangle arithmétique convient exactement aux ordres des nombres, et que les mêmes égalités et les mêmes proportions qui ont été remarquées aux uns se trouveront aussi aux autres; il ne faudra seulement que changer les énonciations, en substituant les termes qui conviennent aux ordres numériques, comme ceux de racine et d'ordre, à

ceux qui convenaient au Triangle arithmétique, comme de rang parallèle et perpendiculaire. J'en donnerai *un petit traité à part*, où quelques exemples qui y sont rapportés feront aisément apercevoir tous les autres » (fin de l'*Usage I* pour les ordres numériques).

Extrait 2 : « Par le rapport qu'il y a des cellules et des rangs du Triangle arithmétique aux combinaisons, il est aisé de voir que tout ce qui a été prouvé des unes convient aux autres suivant leur manière. C'est ce que je montrerai en peu de discours dans *un petit traité* que j'ai fait des Combinaisons » (fin de l'*Usage II* pour les combinaisons).

Ces deux « petits traités » annoncés ne sont autres que ceux qu'on a numérotés 3 et 5 et qui correspondent aux secondes parties des traités initiaux latins. Mais de quoi se composent-ils au juste ?

Comme on l'a vu, *ils s'achèvent sur des résolutions qui ne font plus appel au triangle*; ils renvoient ainsi au second mode de résolution. Mais en premier lieu, ils traduisent aussi un certain nombre de propriétés du triangle données dans le traité d'ouverture, suivant le langage propre à l'application en question : « *il ne faudra changer que les énonciations* » (extrait 1); « *suivant leur manière* » (extrait 2). Les rapports entre cellules du triangle et numéros de lignes, de colonnes et de bases deviennent par conséquent des rapports entre combinaisons d'une part, et des rapports entre nombres figurés, ordres et racines d'autre part¹⁶. Autrement dit, *une fois traduites, ces propriétés ne font plus allusion au triangle, à sa terminologie pas plus qu'à ses éléments*. En somme, la coupure pour la seconde version du recueil paraît systématiquement se produire là où *le triangle, via ses propriétés, tend à disparaître*.

¹⁶ T. Harrington [1982, p. 28–29] a clairement relevé chez Pascal cette pratique récurrente d'énoncer une même propriété de plusieurs manières, par un changement de vocabulaire notamment. C'est là, de façon plus profonde, une façon de raisonner pour Pascal, lorsqu'il inverse dans une même proposition deux *éléments réciproques*. On se limitera ici à deux exemples. Dans le premier, il est encore question des nombres figurés. Pascal se contente de renvoyer au *Problème 2* pour traiter le *Problème 3* : « ce problème n'est pas différent du précédent ; en effet, la racine et l'exposant de l'ordre s'échangent réciproquement, de telle sorte qu'étant donné un nombre, par exemple 58, et sa racine 4, on trouvera l'exposant de son ordre, 6, par la même méthode que si, étant donné ce nombre 58, et l'exposant de son ordre, 4, il fallait trouver sa racine, 6 » [*Œuvres* 1998, p. 208–209]. Cela consiste aussi à intervertir rangs parallèles et perpendiculaires. Le second exemple concerne ses travaux sur la cycloïde, il conclut le *traité des trilignes rectangles* : « Et la même chose sera véritable à l'égard de l'axe, en prenant l'axe pour base et la base pour axe » [*Œuvres* 1963, p. 151] .

Ce trait ne constitue pas la seule différence notoire entre le recueil en français et son homologue latin. Il y a en outre l'apparition d'une nouvelle application dans la seconde version : les partis entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties. Or l'*Usage III* est le seul traité qui lui soit consacré. Est-il dès lors possible, pour cette dernière application encore, d'observer la même distinction entre deux modes de résolution ?

3. *Les partis entre deux joueurs. . . : quatre problèmes.*

L'*Usage III* s'achève sur un chapitre composé de quatre problèmes et dont le titre annonce clairement le premier mode de résolution : « Méthode pour faire les partis entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties, *par le moyen du triangle arithmétique* » (je souligne). Le *Problème I* propose la résolution, rappelée plus haut, du cas général des partis ; les trois suivants en sont des cas particuliers (le *Problème III* traite de la valeur de la première partie).

Or cet *Usage* est le seul traité relatif aux partis et il ne provient pas par ailleurs, à la manière des deux précédents, du partage d'un traité antérieur. Il y a donc fort à s'étonner qu'il ait une conclusion identique quant au sens et similaire dans les termes à celles des *Usages I* et *II*, et qu'il annonce un second traité à venir :

Extrait 3 : « On peut aisément conclure, par le rapport qu'il y a du triangle arithmétique aux partis qui doivent se faire entre deux joueurs, que les proportions des cellules qui ont été données *dans le Traité du triangle* ont des conséquences qui s'étendent à la valeur des parties, qui sont bien aisées à tirer, et dont j'ai fait un *petit discours* en traitant des partis, qui donne l'intelligence et le moyen de les étendre plus avant » (fin de l'*Usage III*).

Quel est en effet ce *petit discours* en question ? S'est-il perdu, n'a-t-il jamais existé ? Je n'ai pas trouvé la moindre allusion à celui-ci dans un quelconque commentaire, et son absence même n'est jamais signalée. Mais si l'on admet que les trois extraits parallèles cités procèdent d'un même mouvement de pensée chez Pascal, si donc l'on postule que ce « petit discours » annoncé était semblable aux deux « petits traités » connus, alors peut-être est-il possible d'en retrouver le contenu. Aussi, en quoi leur similitude pouvait-elle consister ? Rappelons les deux caractéristiques communes aux deux « petits traités » :

- 1) traductions de certaines propriétés du triangle selon le vocabulaire

de l'application ;

2) problèmes résolus sans utiliser le triangle (second mode).

Or, le « petit discours » inconnu sur les partis ne peut présenter de similitudes avec les deux précédents sur le premier point : les traductions. La raison en est simple : *aucune des 19 propriétés du triangle*, aucune des « proportions des cellules », comme dit Pascal, *ne peut être traduite en termes de partis*. C'est d'ailleurs bien là la grande différence entre l'extrait 3 et les deux précédents : celui-là n'annonce pas de traductions.

Par conséquent la similitude ne peut se rapporter qu'au second point : les résolutions sans triangle. Il semble dès lors fort probable que le « petit discours » inconnu était destiné à traiter les problèmes des partis selon le second mode de résolution, sans se servir du triangle arithmétique. Encore faut-il examiner à présent la possibilité de ces secondes résolutions. Or, ici encore, comme nous allons le voir, Pascal pouvait passer du premier mode au second pour cette application¹⁷. Et nous comprendrons en quoi « les proportions des cellules qui ont été données dans le traité du triangle ont des conséquences qui s'étendent à la valeur des partis » (extrait 3). Commençons par les trois cas particuliers.

Problème 2. Il concerne la *valeur de la dernière partie*. Soit un joueur qui a gagné toutes les parties jusqu'à l'avant-dernière ; en supposant qu'il emporte la dernière aussi, quelle *fraction* de la somme mise en jeu par le perdant cette dernière partie représenterait-elle dans le gain du vainqueur ? Pascal démontre que si le jeu est en 4 parties par exemple, il suffit de se placer dans la quatrième base du triangle.

« La valeur de la dernière partie sur la seule mise du perdant est cette fraction $\frac{1}{D+B+\theta+\lambda}$ [...], laquelle a pour numérateur l'unité, et pour dénominateur la somme de toutes les cellules de la quatrième base. »

Or $\frac{1}{D+B+\theta+\lambda} = \frac{1}{8}$; dans une partie de 4, la victoire de la quatrième partie représente donc pour le joueur menant 3 à 0 un gain *supplémentaire* du huitième de la mise du perdant (il emportera les $\frac{7}{8}$ seulement de cette mise si la partie est interrompue à 3-0). Et en général, la valeur de la dernière partie de n est de la forme $\frac{1}{S_n}$ (où S_n est la somme des cellules de la n -ième base). Telle est donc la résolution de l'*Usage*, selon le premier

¹⁷ À partir de tous ces points, je propose en annexe une reconstitution partielle du « petit discours », où figure notamment une démonstration sans le triangle de la valeur de la première partie telle qu'elle est énoncée dans la lettre à Fermat.

mode.

Mais *d'après l'identité (1)*, conséquence huitième du traité du triangle arithmétique, Pascal pourrait déduire de suite que la même fraction s'écrit aussi $\frac{1}{2^{n-1}}$ (*solution sans triangle*). N'oublions pas qu'au moyen de cette identité il a effectué la même transformation sur le *Problème II* des combinaisons, le même passage d'un mode de résolution à l'autre. Aussi pourquoi ne donne-t-il pas dans l'*Usage* cette seconde solution plus simple encore ?

C'est celle-ci qu'il envoie à Fermat dans la *lettre du 29 juillet*, sous forme de propriété : « la valeur [...] de la dernière partie de deux est double de la première partie de trois et quadruple de la dernière partie de quatre et octuple de la dernière partie de cinq, etc. » [Pascal, *Œuvres* 1998, p. 148]. Or la valeur de la dernière partie de deux est $\frac{1}{2}$ (car si les joueurs jouent en deux points et que la partie s'interrompt à 1-0, il revient au vainqueur les $\frac{3}{4}$ de la mise totale, c'est-à-dire la moitié de la mise du perdant en plus de la sienne propre ; la victoire de la seconde et dernière partie correspond ainsi à l'autre moitié). Cette sorte de propriété par récurrence conduit, sans se servir du triangle, à la valeur de la dernière partie de n : on retrouve bien $\frac{1}{2^{n-1}}$.

En fait, si cette solution sans triangle n'apparaît pas dans l'*Usage*, n'est-ce pas parce que Pascal la réserve pour le « petit discours » conçu pour le second mode ? Lorsqu'il annonce que « les proportions des cellules qui ont été données dans le traité du triangle ont des conséquences qui s'étendent à la valeur des partis », il est fort probable qu'il prépare le passage de $\frac{1}{S_n}$ à $\frac{1}{2^{n-1}}$, via l'identité (1), soit la *conséquence huitième*.

Problème 3 (valeur de la première partie de n) et *Problème 4* (valeur de la seconde partie de n).

« Soit prise la valeur de la première partie par le problème précédent. Je dis qu'elle est la valeur de la seconde. »

L'*Usage III* montre en effet que ces deux problèmes ont la même solution *par le triangle*, quotient d'une cellule de la dividende par la somme des cellules de la même base, c'est-à-dire, selon mes notations, $\frac{D_{2n-1}}{S_{2n-1}}$. Or, on a vu que la *lettre du 29 juillet* donnait du *Problème III* (et du *Problème IV*¹⁸) une solution sans triangle $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)}$, et qu'elle

¹⁸ « Vous y verrez comme toujours que la valeur de la première partie est égale à celle

énonçait sans vraie démonstration l'égalité des deux solutions, que j'ai appelée l'*identité* (3). Cette solution sans triangle est elle aussi absente de l'*Usage III*. Mais il me semble qu'elle aurait été donnée en revanche dans le « petit discours ». Aux arguments déjà donnés s'ajoute le fait qu'il existe, pour l'*identité* (3), autrement dit pour le passage de $\frac{D_{2n-1}}{S_{2n-1}}$ à $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)}$, une démonstration qui se fait là encore au moyen de l'une « des proportions des cellules qui ont été données dans le triangle » (extrait 3) : *la conséquence dix-neuvième et dernière*¹⁹.

En somme, si le « petit discours » ne nous est pas parvenu, la *lettre du 29 juillet* se substitue à ce traité manquant consacré aux résolutions sans triangle, du moins en ce qui concerne les trois problèmes particuliers de l'*Usage III*. Est-ce encore le cas pour le *Problème 1* ?

Problème 1 : cas général des partis

On en a rappelé la méthode générale de résolution au moyen du triangle. Toute solution est une fraction dont le numérateur est une somme partielle des cellules d'une base et dont le dénominateur est la somme de toutes ces cellules. Par exemple $\frac{P+M+F+\omega}{P+M+F+\omega+S+\delta}$. La *lettre du 29 juillet* expose encore une méthode sans recours au triangle pour résoudre le *Problème 1*, qu'on a nommée *procédé pas à pas* et qui semble antérieure à l'emploi du triangle. Mais la pertinence du procédé, on l'a vu, est limitée puisqu'elle varie selon la complexité du cas étudié. L'*Usage III* semble confirmer cette chronologie : il détaille d'abord ce procédé sur des cas simples avant d'énoncer les résolutions par le triangle sur des cas plus complexes.

Il y aurait certes une autre manière de résoudre le *Problème 1* sans triangle : dans le quotient $\frac{P+M+F+\omega}{P+M+F+\omega+S+\delta}$ par exemple, il suffirait de remplacer chaque cellule du numérateur par le *quotient de deux produits* correspondant (selon l'*identité* (2)) et le dénominateur par une puissance de 2 (selon l'*identité* (1)). Mais il me semble falloir rejeter cette possibilité. Le calcul et l'énonciation de la solution deviendraient en effet si complexes que se passer du triangle n'aurait plus aucun intérêt, alors que les solutions sans triangle vues jusque-là conduisent toujours à des calculs élémentaires : puissances de 2, quotients de produits.

de la seconde, ce qui se trouve aisément par les combinaisons», *lettre du 29 juillet* [Pascal, *Œuvres* 1998, p. 150].

¹⁹ C'est cette démonstration dont il sera question dans la seconde partie, B, § 3.

Il nous faut plutôt constater l'impossibilité de résoudre le problème général des partis sans le triangle et par un calcul simple; considérer en conséquence que, si notre hypothèse d'une recherche systématique par Pascal de résolutions élémentaires sans triangle est juste, le *Problème 1* lui aura forcément résisté. L'absence même du « petit discours » serait liée, pourquoi pas, à cette impasse. En effet, si ce traité était bien destiné à résoudre les quatre problèmes de l'*Usage sans le moyen du triangle arithmétique*, c'était tout de même le cas général qu'il fallait résoudre en premier lieu. Quant à la présence enfin des trois problèmes particuliers dans l'*Usage*, on peut la comprendre uniquement par la possibilité de leur résolution sans triangle, selon le second mode, ce qui confirmerait encore la fonction supposée du « discours » inconnu.

4. Les puissances du binôme.

Pascal ne s'est jamais passé du triangle pour cette quatrième application. Autrement dit, il n'a jamais utilisé, pour le calcul des coefficients, l'identité (2) qui conduit à la formule du binôme, dite de Newton.

On notera tout de même que la célèbre conclusion du traité (6.), relative aux « indivisibles », énonce une règle unique et générale dont les cellules sont exclues, où le triangle disparaît : « la somme des mêmes puissances d'un certain nombre de lignes est à la puissance de degré immédiatement supérieur de la plus grande d'entre elles, comme l'unité est à l'exposant de cette puissance. » Exemple : « la somme des carrés [d'un certain nombre de] lignes est au cube de la plus grande, comme 1 est à 3 » [Pascal, *Œuvres* 1998, p. 265]²⁰. Cela dit, la confrontation des deux modes de résolution mise en évidence dans les trois premières applications du triangle ne concerne pas la quatrième. On laissera donc cet usage de côté.

En somme, à considérer les trois premières applications, tous les problèmes énoncés dans le recueil français — sauf un, le problème général des partis — ont été traités selon deux modes de résolution. Sans la *lettre du 29 juillet*, ce fait n'aurait d'ailleurs pu être perçu. Or, pour chacun de ces problèmes, c'est l'une des trois *identités* qui rend possible le passage du premier au second mode : l'identité (1) pour le *Problème 1* des combinaisons et le *Problème 2* des partis; l'identité (2) pour les quatre problèmes des ordres numériques et le problème 2 des combinaisons; l'identité (3)

²⁰ Cf. les commentaires de A. Koyré [1973, p. 369–371] sur cette conclusion.

pour les *Problèmes 3 et 4* des partis.

* * *

Au terme de cette partie, on objectera peut-être la trop grande importance accordée au mode de résolution sans triangle. Après tout, la connaissance de certains résultats relevant de cet aspect est bien antérieure aux travaux de Pascal. C'est ainsi le cas de l'identification à une puissance de 2 du nombre de combinaisons possibles dans un ensemble. Quant au *quotient de deux produits*, il appartient depuis longtemps, au XVII^e siècle, à l'histoire des mathématiques. Il suffira ici de signaler le long « *avertissement* » final du traité *Combinaciones* [Pascal, *Œuvres* 1998, p. 252–253]. Pascal lui-même y rapporte en effet « la construction facile » du « très savant M. de Gagnières » pour connaître $C(k, n)$: elle équivaut exactement au quotient de deux produits. Pour connaître le nombre de combinaisons de 2 parmi 6 par exemple, il effectue le calcul suivant : $\frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1}$.

Mais faut-il à l'inverse ne mettre l'accent que sur l'emploi du triangle, en somme sur les quatre *Usages*? Comme nous l'avons rappelé en introduction, Pascal n'a pas non plus inventé le triangle qui porte son nom. Michel Le Guern a décrit en détail les influences exercées sur Pascal par les ouvrages de Maurolico et Hérigone, et leur usage respectif du triangle pour les nombres figurés et les puissances des binômes. Les historiens ont souvent été, en conséquence, tentés de rendre compte de l'apport de Pascal en valorisant la synthèse qu'il fit de tous ces usages et l'application nouvelle aux problèmes des partis. L'un des buts de cet article est de montrer que l'intérêt de son ouvrage se situe peut-être en dehors de ces questions de genèse.

Il suffit ici de poser le problème plus simplement : Pascal connut-il les résolutions sans le triangle avant de développer l'usage de celui-ci? C'est possible, mais rien ne le prouve. Peut-on établir une chronologie, voire une hiérarchie, entre les deux modes de résolution? La question est loin d'être évidente.

D'un côté, le fait que le groupe des *Usages* ait été spécialement rédigé en français pour la seconde version inciterait à trancher en faveur des résolutions par le triangle comme phase ultime de ses travaux. D'un autre côté, ce groupe, excepté l'usage pour les partis, est déjà là, quoique non visible, dans le recueil latin. On peut même supposer que l'unique motif

de la seconde rédaction est la découverte de l'application du triangle aux partis. Par surcroît, Pascal désigne bien le *quotient de deux produits* (« sans se servir du triangle arithmétique ») comme « l'accomplissement »²¹ de son traité (1.). M. Le Guern a bien montré en outre que les ordres numériques forment le point de départ des recherches de Pascal autour du triangle. En ce cas, comment comprendre sa résolution sans triangle des problèmes qui concluent le traité et qu'il avoue avoir « cherchée longtemps ». N'est-elle pas forcément apparue en second lieu ? Quant à la valeur de la première partie, c'est bien sa solution sans triangle qui est posée comme propriété dans la lettre à Fermat, l'expression en fonction des combinaisons, c'est-à-dire des cellules, n'étant qu'une étape de la démonstration.

Quoi qu'il en soit, ce qu'il nous reste des travaux de Pascal donne constamment à voir un même fait : le second mode est toujours *déduit* du premier ; le lien entre le triangle et une application est déjà établi lorsque viennent les résolutions sans triangle des problèmes. En effet celles-ci sont toujours démontrées : 1) à partir des *Usages* ; 2) à l'aide de propriétés du triangle. *Et donc, si ce n'est au sens chronologique, c'est en tout cas du point de vue de la démonstration qu'elles forment une conclusion dans l'œuvre de Pascal.* Si bien qu'il semble soudain paradoxal d'avoir nommé « triangle de Pascal » un objet dont celui-ci visait en fait à se passer.

Dans cette première partie, il s'agissait de dégager une direction dans les travaux de Pascal : une tendance à mettre de côté le triangle comme outil de résolution pour laisser place à des solutions purement calculatoires (puissances de 2, quotients de produits). Il a fallu pour cela mettre en évidence trois identités, et plus précisément leur *fonction* : comment elles établissent le passage du premier au second mode de résolution.

Dans la seconde partie, on laissera ce dernier point momentanément de côté, pour faire apparaître une autre caractéristique commune aux trois identités : la manière dont elles furent *démontrées*. Or ce nouveau point de vue conduira à nuancer la première partie. Alors que celle-ci semblait indiquer l'abandon du triangle par Pascal comme outil de résolution, la seconde cherchera en effet à montrer sa constante présence. Mais c'est en fait un autre triangle qui prendra forme, différent aussi bien par sa fonction que par ses éléments mis en jeu.

²¹ Et dans le traité (a.), Pascal écrit déjà : « *hoc ergo problemate tanquam hujus tractatus complemento finem ipsi impono.* »

II. UNE PROCÉDURE DE DÉMONSTRATION

A. Deux générations différentes du triangle

Il existe deux expressions équivalentes, que nous noterons $[X]$ et $[Y]$, d'une cellule quelconque A du triangle en fonction d'autres cellules.

J	H	F	D	B
I	G	E	C	A

$[X]$: toute cellule est la somme de toutes les cellules qui la précèdent dans la *ligne* supérieure. Soit, sur le schéma : $A = B + D + F + H + J$.

$[Y]$: toute cellule est la somme des deux cellules de la *base* précédente qui lui sont conjointes. Soit, sur le schéma : $A = B + C$.

$[X]$ correspond à la relation qui engendre le triangle dans le traité *Triangulus arithmeticus (a.)*. Pascal en déduit comme suit $[Y]$, qui constitue la conséquence 1 (*consectarium primum*) du même traité :

« Comme $A = B + D + F + H + J$ et $C = D + F + H + J$, on a bien $A = B + C$. »

Or, dans la version en français du *Traité du triangle arithmétique*, il y a eu un renversement. C'est désormais $[Y]$ qui définit la génération du triangle. Bien entendu, à partir d'elle, on retrouve $[X]$ (qui devient la conséquence deuxième du traité n° 1) *en remontant* :

« $A = B + C$ $[Y]$ donc $A = B + D + E$, donc $A = B + D + F + G$, donc $A = B + D + F + H + I$, donc $A = B + D + F + H + J$ $[X]$. »

Comment comprendre ce changement de génération ? Il est aisé d'identifier, dans les nombres figurés, l'amorce des travaux de Pascal sur le triangle arithmétique. La première version du recueil en garde la trace. C'est d'abord une affaire de vocabulaire : Pascal donne le nom de *racines (radices)* à la fois aux exposants des colonnes du triangle et aux côtés des nombres figurés. Mais encore, la génération du *Triangulus arithmeticus*, traduite en $[X]$, coïncide exactement avec celle des nombres figurés. Le changement de génération opéré entre les deux versions marquerait dès lors un changement de priorité dans les recherches de Pascal : les nombres figurés seraient passés au second plan. Et c'est l'usage pour

les combinaisons, doublé des problèmes de partis, qui serait devenu prépondérant au cours de ses travaux. La génération du triangle renforce d'ailleurs cette hypothèse. La relation [Y] équivaut en effet exactement au lemme fondamental des combinaisons que Pascal énonce dans le traité *Combinaciones* en vue d'établir le lien entre le triangle et cette application. Le lemme peut se traduire ainsi : $C(k, n) = C(k-1, n-1) + C(k, n-1)$. De cette manière, le traité (1.) et [Y] établissent un rapport immédiat entre le triangle et les combinaisons.

La construction du triangle a donc changé. Selon la génération latine, une cellule s'obtient à partir de cellules de la *ligne* précédente. C'est dire que le remplissage du triangle s'effectue de *haut en bas*. Aussi, tant que la génération reste attachée aux nombres figurés, subsiste-t-il une dissymétrie entre lignes et colonnes (elles sont du reste nommées différemment : *series* et *radices*). Dans le traité français, leur rôle devient au contraire équivalent : toute cellule est calculée par addition de deux autres de la *base* précédente, celle de la ligne et celle de la colonne précédentes. C'est donc à présent suivant la *direction des bases* que l'on complète, du moins en principe, le triangle. La base devient en tout cas le groupe de cellules primordial. Ceci ne doit pas surprendre : c'est dans une base qu'il faut se placer, aussi bien pour calculer les *partis* entre deux joueurs que pour lire les *coefficients d'un binôme* ou l'ensemble des *combinaisons* possibles dans un nombre. Par ailleurs, pour ces trois applications, les lignes ne signifient rien. Et dans le même mouvement, le vocabulaire fait disparaître l'ancienne hétérogénéité entre lignes et colonnes et les donne désormais pour symétriques : Pascal ne parle plus que de *rangs*, *parallèles* pour les premières, *perpendiculaires* pour les secondes. Le triangle n'est plus directement lié aux nombres figurés, il est devenu un objet plus abstrait. Sa *symétrie*, dont l'axe est si bien matérialisé par la dividente, est parfaite dans le recueil en français.

Repartons une dernière fois de [Y]. Elle est l'unique clé de la démonstration des dix-neuf propriétés du triangle énoncées dans le traité (1.). Celles-ci portent donc à juste titre le nom de *conséquences*. Enfin, [Y] donne une cellule en fonction de deux autres de la base précédente : elle constitue ainsi une relation de *réurrence* suivant les bases. À cet égard, elle représente au mieux une majorité des conséquences du traité, qui énoncent le rapport existant entre deux mêmes éléments *successifs* du

triangle : deux cellules consécutives d'une base, d'une ligne, d'une colonne ou de la dividente, deux bases d'exposants consécutifs, etc. *En somme, ce sont toutes des relations de récurrence* (celles-ci sont explicitées dans le schéma ci-dessous).

On a vu dans un premier temps la fonction de trois identités. Il s'agit dans cette partie d'explicitier leur démonstration. Or ce sont précisément trois de ces relations de récurrence qui nous intéresseront à cet égard : les conséquences septième, douzième et dernière. Rappelons qu'on ne connaît de Pascal que les démonstrations des deux premières identités. Quant à la troisième, on l'a vu, sa justification reste allusive et lacunaire dans la *lettre du 29 juillet 1654*. Si l'on décrit maintenant les démonstrations de Pascal des identités (1) et (2), c'est afin de mettre en évidence, que toutes deux recourent à une relation de récurrence appropriée et suivent une démarche similaire. C'est, par ailleurs, qu'un raisonnement par analogie va nous permettre d'aboutir à une démonstration de l'identité (3). Certes, celle-ci ne figure pas dans les écrits conservés de Pascal, et cependant il est tout à fait envisageable que Pascal ait pu l'avoir produite. Elle coïncide en tout cas avec l'esquisse donnée dans la lettre à Fermat.

B. Démonstration des trois identités

1) *L'identité (1) : somme des cellules d'une base*

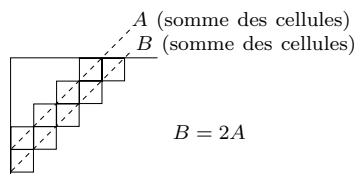
À partir de la génération du triangle $[Y]$, Pascal démontre facilement le rapport de proportionnalité entre deux sommes successives, c'est-à-dire la relation de récurrence suivante : « En tout Triangle arithmétique, la somme des cellules de chaque base est double de celles de la base précédente » $S_n = 2S_{n-1}$ (*conséquence septième*).

Et c'est au moyen de cette propriété qu'il aboutit à l'identité (1) (*conséquence huitième*), c'est-à-dire à une expression de S_n indépendante de toutes les sommes précédentes. Car de la relation $S_n = 2S_{n-1}$, on déduit aisément que $S_n = 2^{n-1}S_1$ (sans autre précision pour le moment, j'appellerai *itération* ce procédé qui consiste à transformer l'expression de S_n , sous forme de relation récurrente, en expression dépendant du premier terme S_1). Et sachant que $S_1 = 1$ (puisque la première base ne contient que la cellule G), on obtient bien la première identité : $S_n = 2^{n-1}$.

2) *L'identité (2) : le quotient de deux produits*

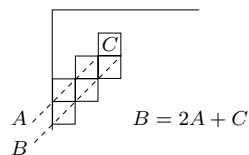
Il s'agit de connaître une cellule *quelconque* sans lire le triangle, par la seule donnée des exposants de ses ligne et colonne. Il a suffi pour cela à

Conséquence 7



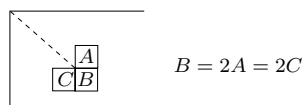
(relation entre les sommes des cellules de deux bases successives)

Conséquence 10



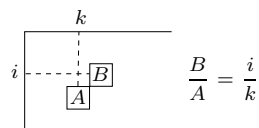
(relation entre les sommes des premières cellules de deux bases successives)

Conséquence 11



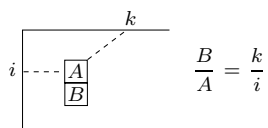
(relation entre deux cellules successives de même rang, la seconde étant sur la dividente)

Conséquence 12



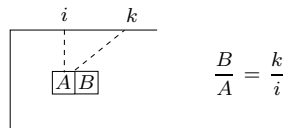
(relation entre deux cellules successives d'une même base)

Conséquence 13



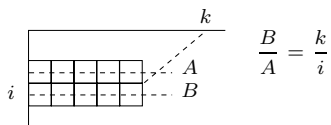
(relation entre deux cellules successives d'une même rang perpendiculaire)

Conséquence 14



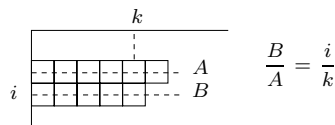
(relation entre deux cellules successives d'une même rang parallèle)

Conséquence 15

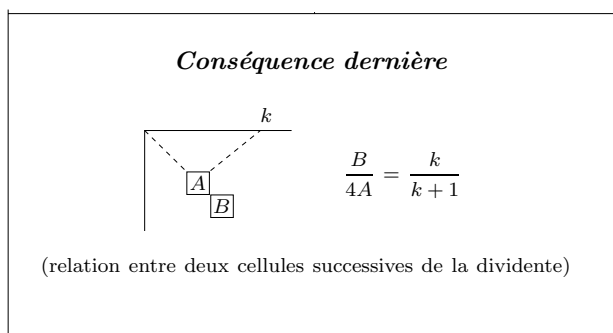


(relation entre les sommes des n premières cellules de deux rangs parallèles successifs)

Conséquence 16



(relation entre les sommes des cellules de deux rangs parallèles successifs d'un même triangle)



Traité du Triangle arithmétique. Neuf relations de récurrence.

Pascal de posséder une *relation de récurrence vraie pour toute cellule*. La *conséquence douzième* énonce précisément le rapport entre « deux cellules contiguës quelconques d'une même base ». Dans toute base, le quotient de deux cellules successives B et A (B étant au-dessus de A dans la base) est égal au quotient de l'exposant de la ligne de B par l'exposant de la colonne de A . Par exemple, $\frac{\xi}{\rho} = \frac{3}{4}$. Comme la conséquence septième, celle-ci est démontrée au moyen de la génération [Y]. Et là encore, *c'est par itération de la relation de récurrence, en remontant le long de la base jusqu'à la première cellule et en composant les fractions, que Pascal justifie l'identité* (2).

Pascal démontre dans le cas de ξ l'expression d'une cellule sous forme de quotient de deux produits (problème final du traité 1) comme suit :

$$\xi = \frac{\xi}{\rho} \cdot \frac{\rho}{K} \cdot \frac{K}{Q} \cdot \frac{Q}{V} \cdot V.$$

En appliquant la conséquence douzième à chacun des quatre quotients, et sachant que V , la première cellule de la base, égale 1, on obtient

$$x = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{1}.$$

On a bien

$$x = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Précisons maintenant dans quel sens le mot *itération* est ici employé.

a) Soit une *suite* ordonnée de grandeurs, par exemple : les bases, dont on considère la somme des cellules ; les cellules d'une même base ; etc.

b) Soit une *relation entre deux grandeurs consécutives* de la suite.

Itérer, c'est exprimer un élément quelconque de celle-ci au moyen de la relation en *remontant* jusqu'au (ou en partant du) premier terme de la suite. Le premier terme, dans les deux exemples précédents, qu'il s'agisse de la première base ou de la première cellule d'une base, vaut toujours 1.

3) *L'identité (3) : valeur de la première partie*

Valeur de la première partie de 5 (avec triangle) :

$$\frac{e}{a + b + c + d + e + f + g + h + i}.$$

Valeur de la première partie de 5 (sans triangle) :

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}.$$

Le problème, on l'a vu, est de comprendre comment Pascal pouvait passer de la première à la seconde écriture en une justification valable pour un nombre de parties quelconques et ainsi établir le saut du premier au second mode de résolution. La valeur sans le triangle a une allure si semblable au *quotient de deux produits* qu'il est tentant de supposer que Pascal la démontrait précisément au moyen de ce *quotient*. C'est une démonstration de cette nature que About et Boy [1983] ont suggérée. Elle consiste à dire que le numérateur, cellule de la dividende (e ici), est toujours un nombre de combinaisons de n parmi $2n$; nous écririons C_{2n}^n (Pascal lui-même l'énonce clairement dans sa *lettre du 29 juillet*, c'est $C(4, 8)$ dans le cas choisi : « 8 parce qu'il est double de 4 »). Or $C_{2n}^n = (2n)!/(n!)^2$. De plus, et Pascal le sait aussi, le dénominateur, somme des cellules d'une base, égale une puissance paire de 2 : c'est 2^8 dans l'exemple de la lettre et 2^{2n} en général. D'où cette démonstration, pour n quelconque :

$$\begin{aligned} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}. \end{aligned}$$

La démonstration est rapide et l'on conclurait volontiers que ce fut aussi celle de Pascal. Mais il faut bien reconnaître, nous l'avons déjà souligné,

que notre écriture aux trois factorielles et le *quotient de deux produits* de Pascal ne sont pas une seule et même chose. Car pour celui-ci, la cellule e par exemple s'écrirait selon l'identité (2) : $\frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. Aussi, s'il démontrait réellement l'*identité* (3) comme on vient de le faire, lui fallait-il d'abord compléter ce quotient ainsi : $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ (ce qu'il n'a jamais fait ailleurs à ma connaissance). Par suite, il pouvait dire effectivement

$$\begin{aligned} \frac{e}{a + b + c + d + e + f + h + g + i} &= \frac{e}{2^8} \\ &= \frac{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2^8 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}. \end{aligned}$$

Il semble très peu probable que Pascal ait procédé ainsi. On ne reconnaît pas vraiment ses démarches, ses manipulations habituelles. Mais surtout, si l'on suppose que sa démonstration fut telle, on ne prend pas du tout en compte un extrait de sa lettre, passage étonnant, qui n'a pourtant jamais été relevé par les commentaires. Or, Pascal le présente comme une étape de sa preuve. Il concerne la valeur du *dénominateur* de la solution en fonction des combinaisons (ou des cellules), *somme de toutes les combinaisons possibles* dans un nombre (ou de toutes les cellules d'une base)²².

« [...] Et voici les propositions qui y mènent²³, qui sont proprement des propositions arithmétiques touchant les combinaisons, dont j'ai d'assez belles propriétés.

Si d'un nombre quelconque de lettres, par exemple, de 8 : A, B, C, D, E, F, G, H , vous en prenez toutes les combinaisons possibles de 4 lettres et ensuite toutes les combinaisons possibles de 5 lettres, et puis 6, de 7, et de 8, etc., et qu'ainsi vous preniez toutes les combinaisons possibles depuis la multitude qui est la moitié de la toute jusqu'au tout, je dis que, si vous joignez ensemble la moitié des combinaisons de 4 avec toutes les combinaisons supérieures, la somme sera le nombre tantième de la

²² C'est plus exactement la demi-somme que Pascal considère dans sa lettre, ce qui renvoie à une fraction équivalente, comme nous l'avons vu (*cf.* p. 182–183).

²³ C'est-à-dire qui mènent à la solution comme quotient du produit des premiers impairs par le produit des premiers pairs.

progression quaternaire à commencer par le binaire, qui est la moitié de la multitude.

Par exemple, et je vous le dirai en latin, car le français n'y vaut rien.»

Dans l'exemple Pascal indique que $\frac{1}{2}C(4, 8) + C(5, 8) + C(6, 8) + C(7, 8) + C(8, 8)$ est «le quatrième nombre de la progression quaternaire d'origine 2», que nous nommerions aujourd'hui quatrième terme de la suite géométrique de raison 4 de premier terme 2, soit $2 \cdot 4^3$.

Pourquoi identifie-t-il une telle somme, *exceptionnellement*, à une puissance de 4, au lieu de la puissance de 2 habituelle (2^7 dans ce cas particulier)? Ainsi, dans notre transcription, $a + b + c + d + e + f + g + h + i$ deviendrait 4^4 au lieu de 2^8 . On a déjà relevé cette distinction des deux types de puissances lorsque Pascal dresse un tableau de combinaisons dans sa *lettre du 24 août*. On va voir à présent comment elle peut s'insérer dans une preuve de l'identité (3).

L'idée d'une démonstration chez Pascal au moyen du *quotient de deux produits* et des puissances de 2 ne semble donc pas pertinente. En premier lieu, elle ne tient pas compte de ce dernier extrait de la lettre, du dénominateur comme puissance de 4. De plus, elle nous éloigne des manières de procéder de Pascal : le *quotient de deux produits* et la *conséquence douzième* renvoient à une cellule quelconque. Or le numérateur de la valeur de la première partie selon le triangle est une cellule *particulière*. Pascal l'écrit clairement lors de sa résolution du *Problème III* de l'*Usage* : elle est celle de la base considérée qui «se rencontre dans la dividente». Par conséquent, ne faudrait-il pas revenir au mode de démonstration des deux premiers résultats, notamment de l'identité (2)? Pascal n'aurait-il pas procédé en fait de manière analogue pour cette troisième démonstration en utilisant une nouvelle propriété sur mesure : *une relation de récurrence portant sur les cellules de la dividente*? Il en existe une dans le traité, la *conséquence dix-neuvième et dernière*.

«En tout Triangle arithmétique, deux cellules continues étant dans la dividente, l'inférieure est à la supérieure prise *quatre fois*, comme l'exposant de la base de cette supérieure à un nombre plus grand de l'unité» [*Œuvres* 1998, p. 294; je souligne].

Exemples : $\frac{e}{4\rho} = \frac{7}{8}$, $\frac{\rho}{4C} = \frac{5}{6}$, etc. (Effectivement, $e = 70$, $\rho = 20$ et $C = 6$).

Cette relation de récurrence, il ne reste plus qu'à l'*itérer* : il suffit de

remonter de e jusqu'au générateur, par composition de fractions, *le long de la dividende*. Le plus convaincant, c'est que cette méthode demande d'utiliser l'énonciation du dénominateur que l'on trouve dans la lettre et qu'elle permet de rendre compte de l'introduction d'une puissance²⁴ de 4. D'où cette autre reconstitution de la démonstration de l'identité (3), qu'on peut de façon plausible attribuer à Pascal :

$$\begin{aligned} \frac{e}{a+b+c+d+e+f+g+h+i} &= \frac{e}{4^4} \\ &= \frac{1}{4^4} \cdot \frac{e}{\rho} \cdot \frac{\rho}{C} \cdot \frac{C}{\psi} \cdot \frac{\psi}{G} \cdot G \quad (\text{itération}) \\ &= \frac{e}{4\rho} \cdot \frac{\rho}{4C} \cdot \frac{C}{4\psi} \cdot \frac{\psi}{4G} \cdot G \quad (\text{or } G = 1) \\ &= \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \quad (\text{conséquence 19}) \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}. \end{aligned}$$

Cette démonstration est tout à fait générale, elle reste toujours valable pour la valeur de la première partie de n (le dénominateur devient 4^{n-1} , et il faut composer $n-1$ fractions pour remonter jusqu'à G). Pour démontrer ce résultat d'allure *similaire* au *quotient de deux produits*, Pascal n'utilisait sans doute donc pas ce dernier. Il procédait, bien plus probablement, de manière *identique*. Si tel est le cas, ce sont par conséquent trois relations de récurrence, trois conséquences différentes (la septième, la douzième et la dernière) que Pascal utilisait pour obtenir ces trois identités qui conduisent aux résolutions sans triangle.

Cette seconde partie qui visait à analyser trois démonstrations met en fin de compte en évidence que Pascal savait ou pouvait procéder d'une même façon dans les trois cas. Il faut saisir à présent comment le triangle arithmétique s'insère dans ces preuves : c'est lui qui permet de produire des relations de récurrence. Or, pour obtenir celles-ci, Pascal fait appel à une seule des caractéristiques du triangle : un de ses modes de génération — qu'on a noté $[Y]$ et qui donne une cellule comme la somme

²⁴ Par ailleurs, la *dividende n'apparaît qu'à deux reprises dans tout le recueil* : dans la conséquence 19 d'abord, dans la valeur de la première partie ensuite (usage III). Il n'est donc pas exclu que ces deux points soient liés, comme dans la démonstration suivante. Pascal n'écrit-il pas à la fin du traité (*a.*) : « j'aurais pu donner beaucoup d'autres propositions, mais j'ai exposé seulement celles qui étaient nécessaires » ? (trad. M. Le Guern).

de deux cellules de la base précédente. L'étape suivante de la démarche consiste à itérer ces relations de récurrence.

On peut en conclusion décrire la conduite des démonstrations en trois composantes :

a) *La génération (additive) du triangle.*

b) *Trois relations de récurrence.* Pascal les obtient à partir de la génération.

c) Un procédé classique qu'on a appelé *itération*. Appliquée aux trois relations précédentes, elle conduit aux trois identités.

Nous appellerons *procédure de démonstration* cette démarche unique que nous avons mise au jour.

C. Un autre triangle

De la première à la seconde partie, le rôle du triangle a donc changé. Il était d'abord un outil de résolution dans les cellules duquel on lit les entiers (premier mode de résolution). Il est devenu un élément constitutif d'une procédure de démonstration. Et l'on perçoit enfin le fait rare, le caractère le plus singulier des recherches de Pascal : lorsque le triangle disparaît comme objet de résolution, il devient un puissant outil à produire des démonstrations. Citons en ce sens un extrait de l'*Avertissement* évoqué plus haut et qui résume presque tout ce qu'on a dit jusqu'ici : « [M. de Gagnières] me montra lui-même cette excellente solution²⁵ et me proposa de la *démontrer*; pour moi, j'en ai été tout à fait admiratif, mais effrayé par la difficulté, je ne l'ai pas vraiment entrepris, et j'ai pensé qu'il fallait le laisser à l'auteur lui-même; toutefois, *avec l'aide du triangle arithmétique*, la voie en est devenue aisée de cette manière » [Pascal, *Œuvres* 1998, p. 252–253; je souligne]. Pascal distingue donc clairement la solution elle-même de sa démonstration, et conclut sur le rôle du triangle dans celle-ci. C'était d'ailleurs notre principe pour lire les problèmes du recueil : maintenir la séparation entre les solutions et leur justification²⁶. Sans cette distinction, on n'aurait jamais saisi les deux modes de résolution et l'abandon du triangle dans le second, on aurait seulement vu le triangle encore et toujours. Car, on l'a dit, le triangle n'a

²⁵ Il s'agit du calcul d'un nombre de combinaisons au moyen d'un quotient de deux produits, $(6 \cdot 5)/(2 \cdot 1)$ par exemple.

²⁶ Nous renvoyons à la première partie (A, fin du § 3), pour les problèmes de partis.

pas disparu de l'un à l'autre; il a simplement *glissé* des solutions (premier mode) aux démonstrations (second mode). Et dans ce décrochage il a changé de fonction.

Si le triangle comme *outil de preuve* est en rupture complète avec son usage classique en vue de résoudre des problèmes, c'est parce que ses éléments primordiaux ont eux aussi changé. Dans son emploi courant le triangle se constitue *d'entiers*, alors que les démonstrations des trois identités ne font appel qu'à sa *génération*, dont on tire des relations de récurrence. Or pour énoncer de telles relations et les itérer, Pascal a eu recours à des *lettres*. Le triangle du recueil a donc ceci de particulier qu'il juxtapose des lettres et des entiers, comme pour faire coexister ses deux rôles. Le *Triangulus arithmeticus* s'achève sur cet *Avertissement* : « J'ai désigné les cellules par des lettres, et non par des nombres placés dans les cellules, pour éviter la confusion qui serait née de la similitude des nombres placés dans les cellules différentes » [Pascal, *Œuvres* 1998, p. 193; trad. M. Le Guern].

Le triangle arithmétique a donc changé d'usage, il prend dans le même temps une *nouvelle forme* : sa *génération*, des *relations de récurrence*, des *lettres*. Cet usage et cette forme désormais explicités, on pourrait peut-être enfin, avec justesse et précision, parler d'un « triangle de Pascal ». Une autre étude serait bien entendu nécessaire pour déterminer jusqu'à quel point Pascal fut unique, dans cette manière de s'approprier cet objet mathématique.

Dans son étude *Pascal et l'induction mathématique* [1964], Kokiti Hara a décrit la rencontre heureuse du triangle arithmétique et de la démonstration mathématique. Selon lui, le triangle, par l'intermédiaire du problème des partis, aurait quasiment obligé Pascal à énoncer clairement, en deux lemmes, *le principe de la preuve par récurrence*. Hara s'est en fait intéressé au seul point du recueil que la suite de l'histoire banalisa et déposa dans notre pratique commune de la preuve. J'ai plutôt essayé d'explicitier, chez Pascal, une démarche *sur mesure* pour démontrer les solutions sans triangle d'un ensemble de problèmes relatifs à trois domaines. Démarche rare peut-être, datée et sans avenir, mais qui est la marque d'une pratique concrète de la preuve. Il fallait donc saisir comment Pascal forma sa propre *procédure* de démonstration.

En fait, bien au-delà du raisonnement par récurrence, se forme chez

Pascal, autour du triangle, une pensée de la récurrence. Cela apparaît plus clairement encore si l'on admet de sa part, pour chacune des trois identités, la possibilité d'une démonstration différente, *directe*, et *sans recours à une relation de récurrence*. Pascal aurait pu donner une justification directe de la première ((1) $S_n = 2^{n-1}$) en se plaçant d'emblée au rang n . Étant en effet établi que les cellules de la n -ième base donnent les coefficients du développement de $(A + B)^{n-1}$, il suffit d'appliquer cette propriété avec $A = B = 1$ pour obtenir la relation (1). Pascal fait d'ailleurs ce raisonnement dans l'*Usage IV pour les puissances des binômes*, mais il l'écrit à la manière d'une vérification et non d'une démonstration : $1 \cdot A^4 + 4 \cdot A^3 + 6 \cdot A^2 + 4 \cdot A + 1$ est « la puissance carrée-carrée du binôme $A + 1$. De sorte que si A est l'unité, et qu'ainsi le binôme $A + 1$ soit le binaire, cette puissance sera maintenant $1^4 + 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1$ [c'est-à-dire $1 + 4 + 6 + 4 + 1$, somme des cellules de la cinquième base] qui ajoutés font 16. Et en effet le carré-carré de 2 est 16 » [Pascal, *Œuvres* 1998, p. 319].

Quant à l'identité (2), du moins son application au calcul des combinaisons, Pascal avoue « la difficulté » d'en donner la démonstration. Pour ce qui nous concerne, nous procédons par un raisonnement combinatoire appliqué directement à la situation choisie, pour établir, par exemple, que $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}$: 6 possibilités pour le premier, 5 pour le second, etc. Ce raisonnement *direct* était du reste déjà possible du temps de Pascal²⁷. M. de Gagnières lui-même raisonnait-il ainsi, ou bien cette solution n'était-elle chez lui qu'une conjecture ? Toujours est-il que Pascal sut tout de même la démontrer, mais seulement « avec l'aide du Triangle arithmétique », et donc à partir d'une relation de récurrence (« la voie en est devenue aisée de cette manière »).

À propos de la troisième identité enfin, on a vu que Pascal ne l'aurait sans doute pas démontrée par calcul *direct*, en écrivant le numérateur sous forme d'un *quotient de deux produits* (démonstration par les puissances de 2), mais plus probablement au moyen d'une relation de récurrence encore (démonstration par les puissances de 4).

²⁷ Il suffit de citer le cas de Gersonide (XIV^e siècle); cf. [Chemla et Pahaut 1992, p. 158–159].

CONCLUSION

En premier lieu, nous avons voulu montrer qu'il existe, pour toute une série de problèmes du recueil, deux modes de résolution : *lectures du triangle* d'un côté, *résolutions purement calculatoires* de l'autre. De plus, il est apparu que la composition de la seconde version du recueil rend compte de la coupure entre ces deux modes et d'un mouvement vers l'abandon du triangle comme outil de résolution. Enfin, nous avons mis en évidence que le saut du premier au second mode se fait au moyen de trois identités seulement.

En second lieu, il était question de preuve mathématique. Il existe en effet une démarche unique pour démontrer ces trois identités qui partagent une même fonction ; Pascal l'a mise en œuvre sur les deux premières, et il est tout à fait envisageable qu'il l'ait également fait pour la troisième. C'est cette unicité dans la conduite de la démonstration qu'on a voulu souligner en parlant de *procédure de démonstration*. Le triangle fait partie intégrante de cette procédure. Ainsi le travail de Pascal sur cet objet mathématique ne fut pas une simple mise en commun de plusieurs applications. Il ne fut pas seulement non plus la production de résultats concernant les jeux de hasard. Le triangle est aussi devenu un outil de preuve. Et en même temps qu'il change ainsi de fonction, il prend une nouvelle forme. Nous avons dégagé ses caractéristiques primordiales en tant qu'élément de la procédure de démonstration : des *lettres* plutôt que des entiers particuliers dans ses cellules ; sa *génération* et à partir d'elle la production de tout un ensemble de *relations de récurrence*. On pourra certes objecter que ce fait est marginal lorsqu'il ne concerne que deux, voire trois démonstrations. Et pourtant il semble s'insérer dans un mouvement plus général, qui le déborde largement. Comment comprendre notamment la prolifération de ces « conséquences » dans le traité d'ouverture du recueil ((*a.*) et (*1.*)) ? Quel est leur rôle dans le recueil ? Pascal écrit à leur propos : « j'aurais pu donner beaucoup d'autres propositions, mais j'ai exposé seulement celles qui étaient nécessaires » (traité (*a.*)) ; « on peut tirer de là beaucoup d'autres propositions que je supprime parce que chacun peut facilement conclure » (traité (*1.*)) [Pascal, *Œuvres* 1998, p. 193, trad. Le Guern et p. 294]. Il en a traduit certaines en termes de nombres figurés et de combinaisons. Mais hormis ces traductions, Pascal n'en a en fin de compte employé que deux dans la suite du recueil : la conséquence 8 (identité

(1)) et la conséquence 12 (pour démontrer l'identité (2)). Par conséquent, lorsque dans le *Traité du triangle arithmétique* les relations de récurrence se généralisent, c'est, bien au-delà des démonstrations considérées, une méthode qui semble se profiler et un nouvel usage possible du triangle qui se met en place.

L'intérêt d'une partie du recueil est donc une affaire de démonstration. Pourtant Pascal est resté dans la plus stricte tradition en ce domaine : ses critères de justification sont usuels, le style même est parfois encore très proche des Grecs. Il n'a pas inventé un principe transhistorique pour faire preuve en mathématiques, tels le raisonnement par l'absurde, celui par récurrence²⁸, la méthode des descentes infinies... Aussi s'agissait-il, en introduisant cette notion de *procédure de démonstration*, de nous placer sur un autre plan : si Pascal ne met pas au point un critère nouveau de preuve, il conçoit en revanche une démarche singulière de démonstration pour répondre à un problème précis (se passer du triangle). Sa procédure consiste en un bloc de trois composantes : la *génération* du triangle, des *relations de récurrence*, un processus d'*itération*. Et si celles-ci sont des notions déjà anciennes au temps de Pascal, c'est leur jonction inédite qui fait l'innovation. Une telle procédure est donc unique dans l'histoire, non pas en tant qu'elle n'aurait eu lieu qu'une fois, mais parce qu'elle prend sa forme dans une situation particulière et ne peut plus entrer ailleurs. Elle consiste en un bloc de composantes qui la définissent et parmi lesquelles figure une singularité mathématique : le triangle arithmétique.

* * *

Nous avons plus particulièrement montré comment le triangle devenait composante d'une procédure de *démonstration*, alors qu'il ne faut pas négliger, je crois, la coexistence des deux modes de *résolution* chez Pascal. Lorsque le triangle est employé en son usage commun, comme objet de résolution dont on lit les entiers, ne faut-il pas le considérer simplement comme un *tableau*, et le premier mode de résolution comme la *lecture* de ce tableau ?

Pour préciser ce point, il suffit de revenir aux problèmes de partis. Ils font appel, à eux seuls, à trois types de tableaux dans les écrits de Pascal.

²⁸ À propos de la formation du raisonnement par récurrence, et du problème d'attribution, cf. [Hara 1964], [Vacca 1909] et [Rashed 1984, p. 7].

Le premier type renvoie à la méthode de Fermat, du moins telle qu'elle est rapportée par Pascal dans sa lettre du 24 août. Il consiste, on l'a vu, à dénombrer toutes les issues possibles des parties manquantes afin d'y *compter* le nombre de cas favorables à chacun des joueurs. Quant à la *lettre du 29 juillet*, elle garde, elle aussi, la trace d'une pratique ancienne d'un second type de tableaux particuliers pour déterminer les partis. Au moment d'explicitier la démonstration de la valeur de la première partie, Pascal conclut en effet : « vous verrez bien sans doute tout cela, si vous vous en donnez tant soit peu la peine : c'est pourquoi je trouve inutile de vous en entretenir davantage. Je vous envoie néanmoins une de mes vieilles tables ; je n'ai pas le loisir de la copier. Je la referai. » [Pascal, *Œuvres* 1998, p. 150 ; je souligne]. Et, sur ces entrefaites, il adresse le tableau suivant :

Si on joue chacun 256, en

	6 parties	5 parties	4 parties	3 parties	2 parties	1 partie	
Il m'appartient sur les 256 pistoles de mon joueur pour la	1 ^{re} partie	63	70	80	96	128	256
	2 ^e partie	63	70	80	96	128	
	3 ^e partie	56	60	64	64		
	4 ^e partie	42	40	32			
	5 ^e partie	24	16				
	6 ^e partie	8					

Le troisième cas est celui d'un tableau unique, le triangle arithmétique. C'est un tableau général par rapport aux deux types précédents : ceux-ci ne traitent que des cas particuliers, tandis que le triangle devient valable pour un nombre quelconque de parties.

Il y a donc chez Pascal un usage récurrent du tableau pour les jeux de hasard, lequel s'étend à d'autres domaines par le biais du triangle. La juxtaposition des deux modes marque-t-elle deux pratiques différentes mais également voisines : *constitution de tableaux* d'un côté, *procédés purement calculatoires* de l'autre ? Peut-on envisager d'autres confrontations *locales* semblables entre tableaux et calculs, d'autres rapports, d'autres recouvrements des uns par les autres (des premiers par les seconds comme cela peut sembler être le cas chez Pascal) ? Mais déjà la pratique des tableaux

relève d'une longue tradition en mathématiques²⁹. Elle a sans doute son histoire propre. Ce serait là l'objet d'une autre étude.

ANNEXE

En respectant du mieux possible le style de Pascal (au moyen de la *lettre du 29 juillet 1654* et de quelques traités, notamment le *Problème final* du *Traité du triangle arithmétique* et l'*Usage III*), je propose ici une reconstitution du « petit discours » annoncé en conclusion de l'*Usage du triangle arithmétique pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties*. Je reprends pour cela la dernière section de l'*Usage*, intitulée *Méthode pour faire les partis entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties, par le moyen du Triangle arithmétique*, où figurent les quatre problèmes résolus selon le premier mode. Mon hypothèse est que le « petit discours » était destiné à résoudre les mêmes problèmes selon le second mode, ceci à partir des solutions de l'*Usage* par le triangle et au moyen des identités (1) et (3). Il aurait pu à cet égard s'appeler : *Méthode pour faire les partis entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties, sans le Triangle arithmétique*. Pascal a sans doute cherché une résolution de ce type pour le *Problème 1* général, mais en vain (ce qui expliquerait l'absence du discours annoncé). Quant aux trois problèmes particuliers, ils se résolvent selon l'*Usage* de la façon suivante : la solution du *Problème 2* est une fraction qui a pour numérateur 1 et pour dénominateur la somme des cellules d'une base ; la solution des *Problèmes 3 et 4* est une fraction qui a pour numérateur une cellule de la dividende et pour dénominateur la somme des cellules d'une base. Par suite, dans le *petit discours*, ces trois problèmes auraient été résolus et justifiés comme suit (à la manière de Pascal, l'énonciation et la résolution sont en caractères romains et la justification en italiques).

²⁹ Entre autres exemples, cf. [Chemla et Pahaut 1992, p. 161–165], [Rashed 1978, p. 126; Rashed 1974, p. 156 et *sq.*] et [Ritter 1989].

MÉTHODE POUR FAIRE LES PARTIS ENTRE DEUX JOUEURS QUI JOUENT
EN PLUSIEURS PARTIES, SANS LE TRIANGLE ARITHMÉTIQUE

Problème 2

Étant proposés deux joueurs qui jouent chacun une même somme en un certain nombre de parties proposé, trouver (sans se servir du Triangle arithmétique) la valeur de la dernière partie sur l'argent du perdant.

Par exemple, que deux joueurs jouent chacun trois pistoles en quatre parties : on demande la valeur de la dernière partie sur les 3 pistoles du perdant.

Soit prise la fraction qui a l'unité pour numérateur et pour dénominateur le *quatrième terme* (puisque l'on joue en quatre parties) de la progression double commençant par l'unité³⁰ : je dis que cette fraction est la valeur de la dernière partie sur la mise du perdant.

Car d'après la Proposition 2 de l'Usage pour les partis entre deux joueurs, la valeur cherchée est la fraction qui a pour numérateur l'unité et pour dénominateur la somme des cellules de la quatrième base. Or d'après la conséquence huitième du traité du triangle, cette somme est égale au quatrième terme de la progression double d'origine 1. Donc, etc.

Problème 3

Étant proposés deux joueurs qui jouent chacun une même somme en un certain nombre de parties donné, trouver (sans se servir du Triangle arithmétique) la valeur de la première partie sur la mise du perdant.

Par exemple, que deux joueurs jouent chacun 3 pistoles en quatre parties, on demande la valeur de la première sur la mise du perdant.

Soit prise la fraction qui a pour numérateur le produit des trois premiers nombres impairs et pour dénominateur le produit des trois premiers nombres pairs (je prends 3 parce qu'il est égal au nombre de parties qu'il manque au gagnant de la première partie) : je dis que cette fraction satisfait au problème.

Car, d'après la Proposition 3 de l'Usage pour déterminer les partis, la valeur de la première partie de quatre est cette fraction :

$$\frac{\rho}{V + Q + K + \rho + \xi + N + \zeta},$$

³⁰ C'est-à-dire 2³.

dont le numérateur est la cellule de la dividente qui se rencontre dans la septième base (je dis 7 qui est le double de 4 diminué de l'unité), et dont le dénominateur est la somme des cellules de cette base. Et, d'après la conséquence huitième du *Traité du Triangle*, la somme des cellules de la septième base est le septième nombre de la progression double qui commence par l'unité³¹, ou, ce qui est la même chose, le quatrième nombre de la progression quaternaire qui commence par l'unité³². Donc la fraction $\frac{\rho}{V+Q+K+\rho+\xi+N+\zeta}$ est la même chose que ρ au quatrième nombre de la progression quaternaire qui commence par l'unité. Mais la cellule ρ du numérateur, qui se trouve dans la septième base, est aussi la quatrième cellule de la dividente, à partir de G .

Or ρ est à la première de la dividente G en raison composée de toutes les cellules d'entre-deux, c'est-à-dire, ρ est à G ,

en raison composée de ... ρ à C +³³ C à Y + Y à G .

Donc ρ est à G multiplié par le quatrième nombre de la progression quaternaire à partir de l'unité

en raison composée de ρ à $4C + C$ à $4Y + Y$ à $4G$

ou par la dernière conséq. 5 à 6, 3 à 4, 1 à 2.

Donc la fraction cherchée est à G comme 5 en 3 en 1 à 6 en 4 en 2.

Mais G est l'unité; donc la fraction $\frac{\rho}{V+Q+K+\rho+\xi+N+\zeta}$ est le quotient de la division du produit de 1 en 3 en 5 par le produit de 2 en 4 en 6. C.q.f.d.

Problème 4

Étant proposés deux joueurs qui jouent chacun une même somme en un certain nombre de parties donné, trouver (sans se servir du Triangle arithmétique) la valeur de la seconde partie sur la mise du perdant.

Soit le nombre donné des parties dans lesquelles on joue, 5; il faut trouver la valeur de la deuxième partie sur la mise du perdant.

Soit prise la fraction qui a pour numérateur le produit des quatre premiers impairs, 1, 3, 5, 7, et pour dénominateur le produit des quatre premiers pairs, 2, 4, 6, 8 (je dis 4 parce qu'il est égal au nombre de parties

³¹ C'est-à-dire 2^6 .

³² C'est-à-dire 4^3 .

³³ Pascal emploie parfois le signe + pour écrire un produit (voir notamment le *Problème final* du *Traité du Triangle arithmétique*).

qu'il manque au vainqueur de la première partie) : je dis qu'elle satisfait au problème.

Car, d'après la Proposition 4 de L'Usage des partis, la valeur de la seconde est la même que la valeur de la première. Donc, d'après le problème précédent, etc.

BIBLIOGRAPHIE

- ABOUT (Pierre-José) & BOY (Michel)
 [1983] La correspondance de Blaise Pascal et de Pierre de Fermat. La géométrie du hasard ou le début du calcul des probabilités, *Les cahiers de Fontenay* 32, sept. 1983, 92 p.
- CARDAN (Jérôme)
 [1570] *Opus novum de proportionibus numerorum*, Bâle, 1570; *Opera omnia*, Lyon, 1663, t. 4, p. 556–558.
- CHEMLA (Karine) & PAHAUT (Serge)
 [1992] Remarques sur les ouvrages de Gersonide, dans Freudenthal (G.), éd., *Studies on Gersonides*, Leiden : Brill, 1992, p. 149–191.
- COUMET (Ernest)
 [1965] Le problème des partis avant Pascal, *Archives internationales d'histoire des sciences*, 73 (1965), p. 245–272.
- DJEBBAR (Ahmed)
 [1997] *L'analyse combinatoire dans l'enseignement d'Ibn Mun'im (XII^e–XIII^e siècle)*, Université Paris Sud, 1997.
- EDWARDS (A.W.F.)
 [1987] *Pascal's Arithmetical Triangle*, London and New York : Charles Griffin and C^o, Oxford University Press, 1987.
- FERMAT (Pierre de)
 [*Œuvres*] *Œuvres complètes*, 4 tomes, Paris : Gauthier-Villars, 1922.
- HARA (Kokiti)
 [1964] Pascal et l'induction mathématique, dans Centre international de synthèse, éd., *L'œuvre scientifique de Pascal*, Paris : PUF, 1964, p. 127–144.
- HARRINGTON (Thomas)
 [1982] *Pascal philosophe*, Paris : CDU et SEDES réunis, 1982.
- KOYRÉ (Alexandre)
 [1973] Pascal savant, dans Koyré (Alexandre), *Études d'histoire de la pensée scientifique*, Paris : Gallimard, 1973, p. 362–389.
- LAM (Lay Yong)
 [1980] The chinese connection between the Pascal triangle and the solution of numerical equations of any degree, *Historia mathematica* 7 (1980), p. 407–424.
- PASCAL (Blaise)
 [*Œuvres* 1908] *Œuvres complètes*, éditées par Léon Brunschvicg et Pierre Boutroux, Paris : 1908.
 [*Œuvres* 1963] *Œuvres complètes*, éditées par Louis Lafuma, Paris : Éditions du Seuil, 1963.

- [*Œuvres* 1964] *Œuvres complètes*, éditées par Jean Mesnard, 4 tomes, Paris : Desclée de Brouwer, 1964.
- [*Œuvres* 1998] *Œuvres complètes* (tome I), éditées par Michel Le Guern, Paris : Gallimard, coll. La Pléiade, 1998.
- RASHED (Roshdi)
- [1974] Résolution des équations numériques et algèbre : Saraf-al-Din al Tusi, Viète, *Archive for History of Exact Sciences*, 12 (1974), p. 244–290; repris dans [Rashed 1984], p. 147–193. Les références à l'article renvoient à ce volume.
- [1978] L'extraction de la racine n -ième et l'invention des fractions décimales (XI^e–XII^e siècles), *Archive for History of Exact Sciences*, 18 (1978), p. 191–243; repris dans [Rashed 1984], p. 93–145. Les références à l'article renvoient à ce volume.
- [1984] *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, Paris : Les Belles Lettres, 1984.
- [1998] Analyse combinatoire, analyse numérique, analyse diophantienne et théorie des nombres, dans [Rashed 1998], p. 55–91.
- RASHED (Roshdi), éd.
- [1998] *Histoire des sciences arabes*, 3 tomes, Paris : Seuil, 1998.
- RAYMOND (Pierre)
- [1975] *De la combinatoire aux probabilités*, Paris : Maspéro, 1975.
- RITTER (James)
- [1989] Égypte et Mésopotamie : à chacun sa vérité, dans Serres (Michel), éd., *Éléments d'histoire des sciences*, Paris : Bordas, 1989, p. 39–61.
- SERRES (Michel)
- [1995] *Éloge de la philosophie en langue française*, Paris : Fayard, 1995.
- STIFEL (Michael)
- [1625] *Arithmetica integra*, Nuremberg, 1544.
- TARTAGLIA (Niccolò)
- [1560] *General trattato di numeri e misure*, 3 vol., Venise, 1556–1560.
- VACCA (G.)
- [1909] Maurolycus, the first discoverer of the principle of mathematical induction, *Bulletin of the American Mathematical Society*, XVI (1909), p. 70–73.