

L'ALGÈBRE DE NICOLAS CHUQUET DANS LE CONTEXTE FRANÇAIS DE L'ARITHMÉTIQUE COMMERCIALE

MARYVONNE SPIESSER

RÉSUMÉ. — Nicolas Chuquet est l'un des rares mathématiciens français du XV^e siècle dont la postérité a retenu le nom. Il nous a laissé un *Triparty en la science des nombres*, œuvre originale et dense qui doit beaucoup à sa lecture des traités mathématiques à l'usage des marchands, apparus en France en son siècle. Pour cette raison, après avoir brièvement décrit et situé l'œuvre de Chuquet, nous examinons la partie algébrique du *Triparty* en la replaçant dans le contexte des arithmétiques marchandes, pour y observer le statut accordé par l'auteur à sa « règle des premiers », peser l'influence de la tradition des arithmétiques commerciales sur sa conception de l'inconnue, sur ses méthodes et, plus généralement, sur l'esprit de l'œuvre.

ABSTRACT (Nicolas Chuquet's Algebra in the French Context of Commercial Arithmetic)

Nicolas Chuquet is one of the few fifteenth-century mathematicians still remembered today. He wrote the *Triparty en la science des nombres*, an important work influenced by his reading of contemporary mathematical treatises for merchants. After briefly describing and situating Chuquet's work historically, we examine the algebraic part of the *Triparty*, focusing on the commercial arithmetic context, in order to observe the mathematical status of the so called "règle des premiers", and to weigh the influence of the commercial tradition on Chuquet's concept of the unknown, on his methods, and, more generally, on the spirit of the work.

Texte reçu le 14 décembre 2004, révisé le 4 avril 2006.

M. SPIESSER, UFR MIG, Université Paul Sabatier, Toulouse III, 118, Route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 9 (France).

Courrier électronique : maryvonne.spiesser@math.ups-tlse.fr

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A40.

Mots clés : Algèbre, Chuquet, (fausse) position, inconnue, mathématiques commerciales, règle de la chose, règle des premiers.

Key words and phrases. — Algebra, Chuquet, (false) position, unknown, commercial mathematics, rule of the thing, rule of "premiers".

1. INTRODUCTION

Quand on évoque l'activité mathématique en France au XV^e siècle, on cite au mieux un ou deux noms et en priorité Nicolas Chuquet. Et c'est en tant qu'algébriste que la postérité a reconnu (tardivement) Chuquet, lorsque Michel Chasles, au XIX^e siècle, alerte l'opinion sur l'existence du mathématicien. Au cours d'un commentaire sur le traité d'arithmétique d'Étienne de la Roche paru en 1520 puis en 1538, Chasles écrit :

« [...] cette *arithmétique*, traitée d'une manière très complète et approfondie à l'usage des marchands, comprend aussi la *règle de la chose*, c'est-à-dire l'*Algèbre*. C'est donc le plus ancien Traité d'Algèbre imprimé en France ; et, circonstance remarquable à cause de l'époque, ce traité est écrit en *français*. [...] L'auteur y cite le Traité d'Algèbre de maître *Nicolas Chuquet*, parisien, autre ouvrage d'un auteur français, antérieur à 1520. Peut-être la notation des exposants s'y trouvait-elle déjà. Il est à désirer, dans l'intérêt de l'histoire, que cet ouvrage ne soit pas entièrement perdu » [Chasles 1841, n. 2, p. 752].

Le traité d'Étienne de la Roche reste actuellement le plus ancien ouvrage imprimé en français traitant d'algèbre, au sens de l'algèbre héritée des Arabes¹. Mais pour toute la partie algébrique – comme pour le reste de l'ouvrage – de la Roche a pris modèle sur le *Triparty en la science des nombres* de Nicolas Chuquet², terminé à Lyon en 1484. Voilà donc un traité en français de la fin du XV^e siècle, qui nous parle entre autres d'algèbre, de la « rigle des premiers » selon le vocabulaire de son auteur. Or, c'est chose rare en France à cette époque, contrairement à ce qui se passe en Italie où se développe dès le XIV^e siècle une tradition mathématique qui prend corps à l'extérieur de l'Université, dans le milieu des « maîtres d'abaque ». Les maîtres enseignent des mathématiques qui permettent de former les commerçants et hommes d'affaires. Pour cela, ils adoptent le calcul écrit avec les chiffres indo-arabes. Les traités qu'ils écrivent sont donc des « algorismes » même s'ils portent le nom trompeur

¹ Par algèbre, il faudra toujours entendre l'étude des équations et de leur résolution : les équations mettent en jeu des grandeurs numériques ou géométriques, les relations sont prises en tant que telles pour objet d'étude et les algorithmes établis ou simplement énoncés sont ensuite utilisés dans la résolution de problèmes.

² Il ne s'agit pas pour autant d'une copie. En particulier, de la Roche a organisé différemment son ouvrage.

de « *trattato d'abaco* »³. C'est par ce biais que l'algèbre sera le plus largement diffusée en Italie et c'est de ce milieu que sont issus nombre de grands algébristes du XVI^e siècle ([Franci & Toti Rigatelli 1985],[Franci 1988],[Giusti 1993]). Léonard de Pise, *alias* Fibonacci, qui publie le *Liber abbaci* en 1202 et le révisé en 1228, a eu un rôle majeur – bien que non exclusif – dans la transmission de l'algèbre arabe en Italie.

Rien de semblable en France. Au XIV^e siècle, le seul traité que l'on puisse citer à ce propos est l'œuvre d'un clerc, Jean de Murs, maître ès arts à la Sorbonne dès 1321. Dans le *Quadripartitum numerorum* (1343), il inclut une partie algébrique inspirée d'une traduction latine de l'algèbre d'al-Khwārizmī et du *Liber abbaci* de Fibonacci⁴.

Dans la deuxième partie du XV^e siècle, on assiste à la création de manuels de mathématiques du même type que ceux qui sont produits en Italie dans le milieu des « écoles d'abaque ». C'est un phénomène relativement éphémère, qui restera dynamique disons trois-quarts de siècle mais qui, malgré tout (et malgré le peu d'ouvrages dont nous disposons actuellement, à peine une quinzaine), permettra de faire émerger une tradition de l'arithmétique commerciale française ([Beaujouan 1956],[Beaujouan 1988],[Benoit & Lamassé 2003]). Cependant, contrairement à l'Italie, les auteurs n'ont pas recours à l'algèbre, à quelques exceptions près. Ignorent-ils la « règle de la chose » ou bien répugnent-ils à l'employer ? Même s'il est difficile de souscrire à la première éventualité, la question reste ouverte [Van Egmond 1988].

Si en France – tout comme dans les pays de la Péninsule ibérique à la même époque – l'algèbre pénètre très peu les traités affiliés à la tradition commerciale, c'est tout de même à l'intérieur de ce courant non universitaire qu'elle va s'infiltrer. À côté du *Triparty* de Chuquet, l'autre exception à signaler est un traité anonyme copié dans le nord de la France vers 1460

³ Le terme « algorithme » désigne en effet tous les traités d'arithmétique dans lesquels on enseigne la pratique des opérations à l'aide des chiffres indo-arabes, en écrivant sur des supports divers et non en utilisant une table à calculer avec jetons (abaque). Sur les mathématiques dans le milieu des maîtres d'abaque, on peut par exemple consulter [Franci 1996],[Franci 1988],[Franci & Toti Rigatelli 1982], [Ulivi 2002].

⁴ La partie algébrique du *Quadripartitum* est répartie dans plusieurs Livres du traité. Voir [L'Huillier 1990, p. 56-59]. Dans la première moitié du XV^e siècle, Roland l'Écrivain, licencié en médecine de l'Université de Paris en 1424, a écrit une *Arithmetica* quasiment identique au *Quadripartitum* [Charmasson 1978].

(Paris, BnF, fds fr. 1339)⁵. Les deux textes ne sont pas comparables. Le second entre sans ambiguïté dans la catégorie des « arithmétiques commerciales », alors que le *Triparty* est loin d'être un simple manuel destiné aux marchands. On rencontre de manière sporadique quelques résolutions algébriques dans le manuscrit fr. 1339, alors que la troisième partie du *Triparty* est un exposé complet, sur cent trente pages, de la « règle des premiers ». Toutefois, à travers l'œuvre de Chuquet on renoue comme nous le verrons avec l'arithmétique commerciale. L'un des appendices au texte principal ne porte-t-il pas le titre : « Comment la science des nombres se peut appliquer au fait de marchandise » ?

Dans les pages qui suivent, il ne s'agira pas de décrire par le menu le travail algébrique de Chuquet, plusieurs articles l'ont fait ([Lambo 1902], [Itard 1984], [Flegg 1988], [Flegg et al. 1985]), mais de le resituer dans le contexte de l'arithmétique pratique commerciale, de ses usages et de ses méthodes, puis finalement d'observer quel a pu être le poids de ce milieu mathématique sur la pratique algébrique du mathématicien et sur sa conception de l'inconnue.

2. CHUQUET ET SON ŒUVRE

Comme son nom l'indique, le *Triparty en la science des nombres* est un triptyque dont le sujet d'étude est le nombre. Le traité principal est suivi de trois appendices qui donnent à voir au lecteur comment des résultats exposés dans un cadre général peuvent être appliqués à des problèmes divers. Dans le cœur de l'ouvrage, le nombre est toujours abstrait. Au contraire, dans les applications, il pourra être flanqué d'unités de mesure, qu'elles appartiennent au domaine du négoce ou de la géométrie⁶.

La première partie de l'ouvrage est un exposé des pratiques opératoires sur les nombres entiers et rompus (les fractions) comme en traitent

⁵ Outre cette *Arithmetique* (fol. 1-84), le manuscrit contient une géométrie pratique (fol. 85-114) et un traité sur l'astrolabe (fol. 115-128), sans doute de Jean Fusoris (mort en 1436), maître ès arts et ès médecine, fabricant célèbre d'astrolabes. L'arithmétique est marquée de l'empreinte de l'*Algorismus* de Sacrobosco (XIII^e s.), en vogue à l'Université. La présence de résolutions algébriques dans l'*Arithmetique* du ms fr. 1339 m'a été indiquée par Stéphane Lamassé que je remercie.

⁶ Une table des matières a été reconstituée en annexe.

les algorismes, suivi de plusieurs règles de résolution de problèmes, illustrées par de nombreux exemples. Le plan, le contenu et le style sont très proches de ce que l'on trouve dans les arithmétiques commerciales écrites en France, surtout celles d'origine méridionale. Ces traités sont des manuels pédagogiques ; ils ne cherchent pas à innover du point de vue de la discipline, mais transmettent un savoir établi. Les termes fondamentaux sont « méthode » et « règle », plus précisément : règle explicative d'une méthode. Donc, pas de démonstration, mais des énoncés (pour des définitions ou des méthodes) expliqués et abondamment exemplifiés. Le lecteur doit d'abord s'initier à la pratique des opérations, en utilisant des jetons ou le calcul écrit avec les chiffres indo-arabes – dans le Midi, le premier procédé est abandonné en faveur du second. Le deuxième objectif est d'enseigner à résoudre tous les types de problèmes qui peuvent se présenter au marchand. Moyennant quoi, on aiguise aussi son adresse mathématique par la pratique de problèmes pseudo concrets ou récréatifs. D'où deux parties principales, opérations et « raisons », la seconde étant ordonnée en règles (c'est particulièrement évident dans les traités du Midi avec le plus souvent quatre règles), sous lesquelles prennent place des problèmes types. Comme ce sont des ouvrages tournés vers la pratique commerciale, la règle de trois vient en premier ; elle est aussi le fondement de toutes celles qui suivent⁷. On sort peu du domaine du premier degré. Le style est entièrement rhétorique, sans aucune notation⁸.

Cette description vaut globalement pour le premier volet du *Triparty*, qui reflète assez bien le cursus et la vie professionnelle de son auteur. Chuquet est parisien d'origine et bachelier en médecine, c'est lui-même qui nous l'apprend à la fin du *Triparty* : « fait par Nicolas Chuquet parisien, bachelier en médecine » ([Chuquet 1484, fol. 147], [Marre 1880a, p. 814]). À ce titre, et afin d'obtenir la maîtrise ès arts, il a dû fréquenter la Faculté du même nom et lire l'*Institution arithmétique* de Boèce. En tout cas, dans

⁷ Après la règle de trois viennent celles de simple et double fausse position, puis éventuellement la règle d'apposition et rémotion (c'est le cas dans le *Triparty*). Cette dernière règle est dénigrée, car davantage considérée comme un tâtonnement. Elle est utilisée dans la résolution de certains problèmes linéaires indéterminés à deux équations et au minimum trois inconnues [Benoit et Lamassé 2003].

⁸ Il ne faut pas penser pour autant que l'homogénéité soit parfaite entre les textes : le niveau mathématique fluctue, les problèmes ne sont pas tous élémentaires, loin de là.

le troisième chapitre il affiche ses connaissances de l'arithmétique spéculative en traitant des progressions, des différents types de proportions et de leurs propriétés. Plus loin, il cite Boèce ([Chuquet 1484, fol. 83], [Marre 1880a, p. 736]), Campanus de Novare et Euclide⁹. Cependant il reste discret sur ses lectures des Anciens.

Chuquet a également lu attentivement plusieurs arithmétiques pratiques et on retrouve dans le *Triparty* des passages de traités antérieurs, notamment d'un ouvrage écrit à Lyon quelques années auparavant, dont il cite à deux reprises l'auteur, un certain Barthélemy de Romans, maître d'algorisme dont j'ai retrouvé la trace ([Spiesser 2001; 2002], [Spiesser 2003, ch. 1]). Cet intérêt pour la science du calcul, on le comprend quand on sait que Chuquet a exercé l'activité professionnelle d'algoriste à Lyon. Il s'est installé dans la ville aux alentours de 1480, du moins apparaît-il dans les registres de taxes à partir de cette date, d'abord sous le nom de « Maître Nicolas escripvain » (c'est-à-dire copiste, ou aussi précepteur) puis, à la même adresse, de « Nicolas Chuquet, algoriste » [L'Huillier 1976] ; il a donc enseigné l'arithmétique.

Son activité professionnelle lyonnaise – sans doute comme précepteur – l'a mis inmanquablement en relation avec le milieu de la finance. À cette époque, Lyon est une ville en pleine expansion, dynamisée par la création en 1420 de foires franches annuelles. À la fin du siècle, elle est devenue un grand centre du commerce international et une des principales places financières européennes où les banquiers italiens tiennent le haut du pavé ([Brésard 1914], [Gascon 1958], [Flegg 1988]). C'est aussi à cette époque que percent les premiers grands éditeurs ; ils prennent en charge la publication de plusieurs ouvrages de mathématiques pratiques [L'Huillier 1988].

Revenons à la première partie du *Triparty*. Par rapport aux arithmétiques commerciales typiques, l'originalité de Chuquet est de séparer la science du nombre de ses applications qui seront l'objet, comme on l'a

⁹ « Campany qui fut solempnel geometre et commentateur d'Euclides cuyda que telz calcules ne se peussent faire par raison de nombre ainsi comme il appert ou comment en plusieurs lieux et mesmement ou neuf.^e livre d'Euclides a la fin de la 16^e proposition. » ([Chuquet 1484, fol. 140v], [Marre 1880a, p. 807]). Il s'agit d'une remarque qui suit la résolution du problème : trouver deux nombres dont la somme est 12 et dont le produit de l'un par 12 est égal au carré de l'autre.

dit, des appendices. Chuquet a une vision plus abstraite des mathématiques ; il écrit un traité de la science des nombres, exempt de tout aspect utilitaire ; il n'y a donc dans la présentation des savoirs élémentaires et indispensables aucune allusion à des problèmes concrets. En dehors de cela, il ne fait preuve d'aucun esprit d'invention dans ces chapitres.

En revanche, il fait figure de novateur pour les deux autres volets de son traité, consacrés respectivement au calcul sur les radicaux et à la « règle des premiers », l'équivalent de la « règle de la chose » italienne. Chuquet nous donne un exposé général et synthétique, qui dépasse de loin le niveau de tous les traités connus de l'époque, en France mais aussi en Italie. Par exemple, pour ce qui est des radicaux, il envisage et travaille sur des racines d'ordre n quelconque. Cette approche générale va de pair avec une notation très efficace (voir les illustrations *infra*). C'est grâce à ces deux parties du traité que Chuquet est passé à la postérité en tant que mathématicien.

J'en viens maintenant à la règle dite des premiers, dans la perspective annoncée en introduction. J'examinerai d'abord la composition de l'ensemble et la place de l'algèbre dans la science des nombres, puis le statut de l'inconnue et enfin l'empreinte de l'arithmétique commerciale dans les méthodes algébriques de résolution.

3. QU'EST-CE QUE LA « RÈGLE DES PREMIERS » ?

3.1. Description brève de la partie algébrique

L'exposé est ordonné en trois parties divisées en chapitres¹⁰. Les deux premières sont des préliminaires dans lesquels l'auteur met en place le vocabulaire, les notations dont il usera et les opérations sur les « différences », c'est-à-dire sur les expressions de la forme ax^p , où p est un entier relatif pouvant prendre la valeur 0 et a un réel¹¹.

« Les Anciens ont appelé chose ce que je nomme premiers [...]. Les secondz ilz les ont nommez champs [...]. Les tiers sont nommez cubicz [...]. Et les quartz ilz les appellent champs de champ [...]. Et la sont demourez ne guieres plus n'ont profondé. Telles denominacions ne sont pas souffisans pour fournir

¹⁰ Voir la table des matières reconstituée en annexe.

¹¹ Dans la terminologie des algorismes latins du XII^e siècle, une même différence (*differentia*) regroupe les nombres entiers de la forme $a10^p$ (a compris entre 1 et 9, p fixé). Le terme est ici étendu et transposé en algèbre.

a toutes différences de nombres veu qu'elles sont innumerables » [Chuquet 1484, fol. 84], [Marre 1880a, p. 737].

Dès l'introduction, le ton est donné : l'« inconnue » peut être affectée d'un exposant (la « denominacion ») aussi grand qu'on le veut. Les notations permettent une généralisation immédiate : 1^1 , 1^3 , 2^7 désignent ce que nous noterions respectivement x ou x^1 , x^3 , $2x^7$, bien que cette transposition soit gênante, car le concept actuel d'inconnue n'est pas équivalent à ce que Chuquet nomme « premier », comme nous le verrons. L'usage des notations actuelles est toutefois commode pour éclairer celles du *Triparty*. L'auteur envisage aussi toutes les expressions possibles des ax^p , selon le signe de a et de p^{12} . Cela donne, pour $|a| = 12$ et $|p| = 2$:

$$12^2 \quad (\text{pour } 12x^2); \quad m.12^2 \quad (\text{pour } -12x^2);$$

$$12^{2m}. \quad (\text{pour } 12x^{-2}); \quad m.12^{2m}. \quad (\text{pour } -12x^{-2}).$$

Il introduit également les racines n -ièmes de telles expressions. Sont reproduites ci-dessous deux illustrations correspondant aux expressions $m.12^{2m}$. et $\text{Rc } 12^2 + 3^1$, soit $-12x^{-2}$ et $\sqrt{12x^2 + 3x}$. Le soulignement indique l'expression qui est sous le radical.

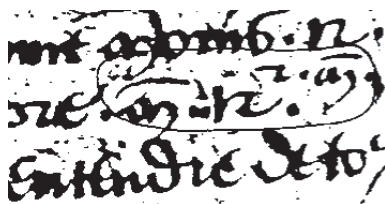


FIGURE 1. $m.12^{2m}$.

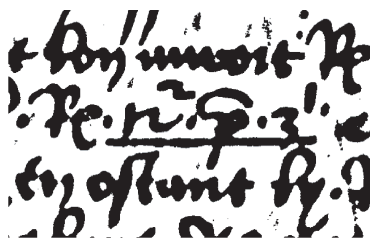


FIGURE 2. $\text{Rc } 12^2 + 3^1$

¹² Les abréviations m . et p . pour « moins » et « plus » sont surmontées d'un petit arc de cercle dans le manuscrit.

Que ce soit dans le Livre sur les irrationnels ou dans celui-ci, les notations puissantes de Chuquet sont en rupture avec ce que nous connaissons des ouvrages antérieurs de la tradition italienne de l'abaque et de bon nombre de traités postérieurs. Ce qui explique l'attitude frileuse d'Étienne de la Roche¹³ qui a préféré s'en tenir à des notations classiques, beaucoup moins performantes, renonçant pour la même raison à utiliser l'exposant 0. Comme on le sait, l'entrée en lice des exposants négatifs ou nuls dans le *Triparty* va permettre d'établir des règles uniques de multiplication et division sur des « différences » de la forme ax^p , pour tout entier relatif p .

La troisième partie de l'algèbre est l'exposition des quatre « canons », à savoir des différents types d'équations de référence, accompagnée de nombreux exemples. Ainsi, pour le premier canon, on en compte plus de cent cinquante, sur soixante pages ! L'exposé ne suit pas l'usage arabe de la liste des six équations du premier et second degré, mais se situe dans le cadre plus général de toutes les équations conduisant à un même processus de résolution. Tous les canons correspondent cependant à des cas qui se réduisent au degré 1 ou 2 et, éventuellement, à l'extraction de racines n -ièmes. Ce sont :

$$\begin{aligned} ax^m &= bx^{m+n} \\ ax^m + bx^{m+n} &= cx^{m+2n} \\ ax^m &= bx^{m+n} + cx^{m+2n} \\ ax^m + cx^{m+2n} &= bx^{m+n} \end{aligned}$$

Les exercices sont des recherches de nombres vérifiant certaines hypothèses qui conduisent à l'un des quatre canons, à l'image de cet exemple ([Chuquet 1484, fol. 128-v], [Marre 1880a, p. 791-92]) :

« Je veulx trouver deux nombres en proporcion double et telz que multiplié le subdouble en soy et icelle multiplicacion adjoustee au double, ceste addition monte autant que si le double estoit multiplié en soy et encores par le subdouble. »

En prenant le nombre subdouble comme « premier », on parvient à l'équation

$$2x + x^2 = 4x^3$$

qui appartient au second canon.

¹³ Après avoir décrit les notations choisies par Chuquet, de la Roche se cantonne le plus souvent dans les applications aux puissances inférieures à 5 et revient alors à des symboles plus communs dont le graphisme se rapproche de [La Roche 1538, fol. 29r-49r].

Les valeurs numériques sont étonnantes; Chuquet se plaît à jongler avec les racines de tous ordres et introduit délibérément des calculs horriblement compliqués. Aucune justification n'est fournie pour les algorithmes de résolution de chacune des équations types. Le style est donc toujours dans la ligne non démonstrative des ouvrages d'arithmétique pratique commerciale.

L'algèbre va permettre de résoudre des problèmes en tous genres, dont on aura des exemples dans les appendices, notamment un problème d'intérêt composé [Chuquet 1484, fol. 293v] et plusieurs problèmes de géométrie [L'Huillier 1990, p. 57-58]. Ce sont ces appendices qui mettent en lumière l'utilité et la performance de la méthode.

3.2. *Sur quelles quantités portent les calculs algébriques ?*

Dans tout le premier Livre du *Triparty*, Chuquet ne précise pas ce qu'il entend par nombre. Là où il est le plus explicite, c'est beaucoup plus loin, en introduction à la « règle des premiers » ([Chuquet 1484, fol. 83v-84], [Marre 1880a, p. 737]) :

« Nombre en tant qu'il est expedient a nostre propos est pris icy largement, non pas tant seulement en tant qu'il est collection de plusieurs unitez, mais aussi soit 1 ou partie et parties de 1 comme est tout nombre rout. Quelconque nombre que ce soit est entendu et consideré en moult de manieres. L'une et la premiere si est que l'on peult considerer ung chascun nombre comme quantité discrete ou comme nombre simplement pris sans aucune denomination ou dont sa denomination est 0 et pourtant doresnavant les nombres auront 0 dessus eulx pour leur denomination en ceste maniere 12^0 et 13^0 etc. Secondement ung chascun nombre est consideré nombre premier de quantité continue que aultrement on dit nombre linear. Telz nombres seront notez par apposition de une unité au dessus d'eulx en ceste maniere 12^1 , 13^1 , 20^1 , etc. »

Distinction est faite entre discret et continu, le discret est associé au nombre « sans dénomination », le continu aux « nombres linéaires » comme 12^1 , « aux nombres seconds » et certainement à toutes les autres « dénominations », bien que Chuquet n'emploie plus l'adjectif continu à partir de l'exposant 2.

Les auteurs italiens usent du mot « cosa » pour désigner la quantité cherchée (le *res* latin). Ici le nom a cédé la place à un adjectif, « premier », qui qualifie un nombre. L'auteur précise par la suite sa position ([Chuquet 1484, fol. 93], [Marre 1880a, p. 748]) : « Toutes differances de nombres seront considerees estre nombres et se tracteront comme

nombre ou racines de nombres ». Dans la partie II, il a défini ainsi les racines : « Racine de nombre est ung nombre qui multiplié en soy une foiz ou plusieurs selon l'exigence et nature de la racine produyt precisement le nombre dont il est racine » ([Chuquet 1484, fol. 45v], [Marre 1880a, p. 654]). Et dans la partie III, il note ([Chuquet 1484, fol. 91], [Marre 1880a, p. 746]) : « Racine de nombre quelle qu'elle soit et nombre sont equipollens et en ung mesmes gré », l'adjectif « équipollent » qualifiant des expressions « de même degré » : par exemple, la racine carrée d'un nombre sixième est équipollente à un nombre tiers.

Ainsi, pour Chuquet, entrent dans le domaine du nombre le rationnel et l'irrationnel, le discret et le continu, les quantités connues et les « différences », donc les expressions où entre une « inconnue », en bref tous les objets auxquels s'appliquent les opérations de l'arithmétique : addition, soustraction, multiplication, division et extraction de racines.

Le calcul n'est pas explicitement fondé sur des entités définies par le seul fait qu'elles sont soumises aux lois de l'arithmétique. Tout est numérique ; les équations à résoudre sont toujours le résultat de « mise en équation » d'un problème, qu'il soit une recherche de nombres vérifiant telle ou telle propriété ou de nature plus concrète dans les appendices. Notons également que dans les énoncés, les données recouvrent l'ensemble des réels positifs.

3.3. *Le statut de l'algèbre*

Voici les premières lignes de l'introduction à la partie algébrique ([Chuquet 1484, fol. 83], [Marre 1880a, p. 736]) :

« Comme dit Boece en son premier livre et ou premier chapitre, la science des nombres est moult grande et entre les sciences quadrivales c'est celle de laquelle tout homme doit estre a l'inquisition d'icelle diligent. [...] Toutes sciences ont part avec elle et de nulle a besoing. Et pourtant que c'est science de grant utilité et aussi de grant neccessité en tant qu'elle est convenable et propice a clerz et agens [de] layz, plusieurs sages y ont estudié et pour ataindre les grandes et merueilleuses subtilitez d'icelle plusieurs rigles en ont esté faictes dont l'une si est la rigle de troys qui dame et maistresse est des proporcions des nombres et de si grant recommandacion que par aulcuns philozophes a esté appelée rigle doree. Semblablement la rigle d'une position par laquelle sont faictz tant de si beaulx et delectables comptes que l'on ne pourroit extimer. Aussi la rigle de deux positions qui sert a enquerir choses profondes et de si grant subtilité que nulle des rigles dessusdictes n'y pourroit ataindre. Et semblablement y a la rigle d'apposition et remocion.

Il y a aussi la règle des nombres moyens¹⁴ de laquelle jadiz je fuz inventeur, par le moyen de laquelle j'ay fait aulcuns calcules que par deux positions je ne povoye faire. De toutes lesquelles rigles est faicte mencion en la premiere partie de ce livre. Mais sus toutes ces rigles dessusdictes, par excellence merveilleuse est ceste règle des premiers qui fait ce que les aultres font et si fait oultre et par dessus innumerables comptes de inextimable profondeur. Ceste règle est la clef, l'entree et la porte des abismes qui sont en la science des nombres. »

Après avoir évoqué les thèmes usuels dans les arithmétiques commerciales sur la primauté de l'arithmétique devant les autres sciences mathématiques et sur leur utilité dans la vie quotidienne et professionnelle, Chuquet procède à une gradation de différentes règles, parmi lesquelles celle des « premiers ». Cette introduction montre d'abord que, dans l'esprit de l'auteur, l'algèbre intervient en tant que règle de résolution tout comme la règle de trois et les autres. Ensuite, la grandeur d'une règle se mesure à sa performance : dans le *crescendo* orchestré par Chuquet, la « règle des premiers » vient en final puisque grâce à elle, non seulement on peut résoudre tous les problèmes résolubles par les règles précédentes, mais on peut en résoudre d'autres pour lesquels les règles déjà présentées échouent. On pense évidemment aux problèmes de degré supérieur à 1. D'où les images élogieuses de la fin : la « règle des premiers » est « la clef, l'entree et la porte des abismes qui sont en la science des nombres ».

De plus, ce qui ne transparait pas dans l'introduction, mais qui est clair dans les exercices du premier appendice, c'est que l'algèbre est une méthode sûre dont l'emploi permet d'affirmer la validité des résultats trouvés, même s'ils choquent le sens commun, comme lorsqu'ils sont négatifs. Voici un exemple significatif parmi d'autres. Il s'agit d'un achat de pièces de drap de deux qualités à 11 et 13 écus pièce, qui conduit algébriquement au système [Chuquet 1484, fol. 156v-157] :

$$x + y = 15 \quad \text{et} \quad 11x + 13y = 160.$$

Le calcul donne $17\frac{1}{2}$ pièces à 11 écus et moins $2\frac{1}{2}$ pièces à 13 écus. La présence d'un résultat négatif amène le mathématicien à vérifier les calculs puis motive le commentaire suivant : selon l'usage commun le problème est impossible car le prix moyen d'une pièce doit être compris

¹⁴ Cette règle exprime que la fraction $(a + c)/(b + d)$ est comprise entre les fractions a/b et c/d .

entre 11 et 13 écus alors que $160/15 = 10 \frac{2}{3}$; en revanche, selon la rigueur de la règle la solution est acceptable. Une fois ceci admis, Chuquet procède à une justification en termes de dettes :

« Neantmoins selon la rigueur de la rigle des premiers elle [la raison] se treuve possible en tant qu'il en y a $17\frac{1}{2}$ du pris de 11 escus la piece et $m. 2\frac{1}{2}$ du pris de 13 ; que l'on peult ainsi entendre que cellui marchant a achetté 17 pieces $\frac{1}{2}$ a argent contant et de 11 escus la piece qui montent 192 escus $\frac{1}{2}$ et 2 pieces $\frac{1}{2}$ [qu']il a achetté et pris a creance du pris de 13 escus qui valent 32 escus $\frac{1}{2}$. Ainsi cellui marchant n'a que 15 pieces [de] drap qui soient proprement siennes et si n'a que 160 escus, les 32 escus $\frac{1}{2}$ qu'il doit rabatuz »¹⁵.

L'algèbre appartient au domaine du nombre et la géométrie n'a pas de place dans la construction de Chuquet. Il n'y fait référence qu'en introduction lorsqu'il nomme les nombres premiers, seconds et tiers respectivement « linear », « superficiel quarré » et « cubicz ». La force de son exposé, c'est sa généralité : les « differances de nombres sont innombrables ». Dans cette infinité, les trois premières puissances n'ont pas de statut particulier et c'est pourquoi, par essence même, la géométrie est exclue¹⁶.

En résumé, à l'intérieur de l'arithmétique, l'algèbre n'est qu'un chapitre au même titre que ceux qui contiennent les règles décrites dans la première partie de l'ouvrage ; c'est une technique fiable et très performante, qui permet de résoudre davantage de problèmes que les autres règles. L'un des objectifs des appendices sera de le mettre en évidence.

Il est significatif que Chuquet n'emploie jamais d'autre mot que « rigle » pour désigner l'algèbre. Sa conception n'est pas une exception. Elle est partagée par les maîtres italiens de l'époque qui toutefois,

¹⁵ Si l'on s'appuie sur la rigueur de la « règle des premiers », le résultat est correct, à savoir qu'il y a 17 pièces $\frac{1}{2}$ au prix de 11 écus la pièce et $- 2\frac{1}{2}$ au prix de 13. On peut ainsi comprendre que le marchand a acheté 17 pièces $\frac{1}{2}$ au comptant et à 11 écus pièce, ce qui fait 192 écus $\frac{1}{2}$ et 2 pièces $\frac{1}{2}$ à crédit au prix de 13 écus pièce, qui valent 32 écus $\frac{1}{2}$. Ainsi ce marchand n'a que 15 pièces de drap qui soient vraiment à lui et n'a que 160 écus, les 32 écus $\frac{1}{2}$ qu'il doit étant retranchés de 192 $\frac{1}{2}$.

¹⁶ Un demi siècle plus tard, Cardan estime au contraire qu'il serait insensé d'aller au-delà du cube, car la nature ne le permet pas ([...] *nae utique stultum fuerit nos ultra progredi, quo naturae non licet*), aussi n'insistera-t-il pas sur la description des puissances supérieures à trois [Cardan 1570, p. 6].

contrairement au mathématicien lyonnais, font couramment référence à l'al-jabr des Arabes. Pour Pacioli, dix années plus tard, l'algèbre est :

« la partie de la science du calcul la plus nécessaire à la pratique de l'arithmétique et de la géométrie. On l'appelle vulgairement « art majeur » ou règle de la chose ou algebra et almucabala »¹⁷.

Et il ajoute que, selon lui, l'algèbre est dite « *pratica speculativa* » car elle contient des choses plus élevées que l'« art mineur » ou pratique du négoce.

Jacques Peletier du Mans, au siècle suivant, n'est plus tout à fait dans le même registre : l'algèbre est un art, une technique dont la caractéristique et en même temps la supériorité tient dans l'invention d'objets autres que les nombres usuels de l'arithmétique :

« L'algebre est un art de parfaitement et precisement nombrer et de soudre toutes questions arithmetiques et geometriques de possible solution, par nombres rationaux et irrationaux. La grande singularité d'elle consiste en l'invention de toutes sortes de lignes et superficies où l'aide des nombres rationaux nous defaut. Elle apprend à discourir, et à chercher tous les pointcs necessaires pour resoudre une difficulté et monstre qu'il n'est chose tant ardue à laquelle l'esprit ne puisse atteindre, advisant bien les moyens qui y addressent » [Peletier 1620, p. 1].

4. LE STATUT DE L'INCONNUE ET LES MÉTHODES DE RÉOLUTION : LE POIDS DE LA TRADITION COMMERCIALE FRANÇAISE

4.1. *L'inconnue : entre position et véritable quantité inconnue*

« Les anciens ont appelé chose ce que je nomme premiers » écrit Chuquet. La chose, c'est ce que l'on pose et qui va permettre, par analyse du problème, de parvenir à la solution si elle existe. Pour cela, et suivant l'énoncé, on posera « 1 premier », noté 1^1 , ou bien 2^1 , 3^1 , ... si cela peut simplifier les calculs. L'inconnue étant ce que l'on pose, a souvent été appelée « position » par les algébristes. Le maître florentin Pier Maria Calandri, dans son *Tractato d'abbacho*, écrit dans la seconde moitié du XV^e siècle, emploie toujours la même expression lorsqu'il fait choix d'une inconnue : « *Farai positione che...* » [Arrighi 1974] ; Piero della Francesca varie davantage son vocabulaire dans le *Trattato d'abaco* (vers 1480) : « *Poni che la prima parte sia 1 cosa* » (fol. 48) ou « *Di' che quello*

¹⁷ « [...] la parte maxime necessaria ala pratica de arithmetica e anche de geometria detta dal vulgo communemente Arte maggiore over La regola de la cosa over Algebra e almucabala » [Pacioli 1523, p. 111v].

numero sia I cosa » (fol. 48v), « *Mecti quello numero I cosa* » (fol. 49), etc. [Arrighi 1970, p. 114-116]. Jérôme Cardan définit l'inconnue comme « *positio seu res* », position ou bien chose [Cardan 1570, p. 6].

Dans les méthodes de fausses positions, on pose une valeur candidate à la solution recherchée et grâce à une technique connue, fondée sur la proportionnalité, on parvient au résultat cherché. Lorsque Chuquet écrit : « On suppose que la chose que l'on veult scavoit soit 1^1 », le statut de « 1 premier » est très proche de celui de la position dans les règles du même nom. Dans un problème de poursuite du premier appendice où l'on cherche en combien de jours le fuyard sera rattrapé, Chuquet [1484, fol. 188] écrit : « Ores pour scavoit en quantz jours, il convient faire sa posicion pour l'ung ou pour l'autre, ne chault pour lequel. Or faisons la posicion pour celluy qui progredist¹⁸ par 1 en posant 1^1 pour le nombre de ses journées... ».

On observe à travers ces explications un glissement du nombre connu que l'on pose comme candidat à la solution d'un problème (la position des règles de fausse position), à la quantité inconnue sur laquelle on opère grâce aux méthodes de l'algèbre. Dans l'exposé du « premier canon », à propos des problèmes qui ont une infinité de solutions, Chuquet [1484, fol. 104], fait remarquer :

« Pour plus ample declaration de ce premier canon de la rigle des premiers, l'on doit scavoit qu'ilz sont aucunes raisons ou questions esquelles il convient faire deux posicions ou plusieurs dont l'une ou les deux ou plusieurs sont de quelque nombre determiné tel que l'on veult ou de plusieurs nombres determinez et l'autre posicion doit estre de 1^1 » [Marre 1880a, p. 761].

Cette note est illustrée dans plusieurs problèmes de l'appendice, par exemple celui-ci. Deux personnes ont en poche des deniers (notons respectivement ces sommes d'argent x et y). Elles trouvent une bourse dans laquelle il y a de l'argent dont le montant n'est pas donné (a deniers). Or, la première, avec le contenu de la bourse, a trois fois plus d'argent que la seconde et dans les mêmes conditions la seconde en a 5 fois plus que la première [$x + a = 3y$ et $y + a = 5x$]. On demande de trouver les trois sommes inconnues. Le problème est indéterminé ; Chuquet le résout d'abord par une « rigle speciale » trouvée dans certaines arithmétiques commerciales qu'il a lues, puis écrit :

¹⁸ Le fuyard progresse en parcourant le premier jour une lieue, le second deux lieues, etc., selon la progression arithmétique des entiers naturels.

« Et qui voudroit faire telles raisons comme les devant dictes par la règle des premiers, il conviendrait faire deux positions, c'est assavoir une pour la bourse et l'autre position pour l'ung des hommes. La position de la bourse peut estre tel nombre que l'on veult et la seconde position doit estre 1^1 . Et par ainsi telles demandes ont infinies responses » [Chuquet 1484, app. 1, fol. 176v].

Les positions pour la bourse et pour la part du premier sont mises sur le même plan. Simplement, si l'une peut être prise « à plaisir », l'autre doit être 1^1 .

Ce rôle de l'inconnue est encore plus net dans les exemples résolus algébriquement par l'auteur du traité d'arithmétique du manuscrit français 1339 de la Bibliothèque nationale de France, copié vers 1460 en Normandie. Notons que dans ce traité, la règle de la chose n'est pas introduite, comme si elle était bien connue ou au contraire mal dominée. Seulement quatre problèmes y ont recours, éparpillés parmi d'autres, mais ils ne sont pas situés n'importe où : les deux premiers sont insérés dans le chapitre sur la règle d'une fausse position, les deux autres suivent la règle de double fausse position. L'association d'idées est claire. L'introduction au paragraphe qui suit la règle de double fausse position montre à la fois l'obscurité du texte et l'analogie faite entre « le plus et le moins s'ajoutent, le plus et le plus, le moins et le moins se soustraient » de la double fausse position¹⁹ et les règles de transposition en algèbre :

« Nous metrons cy apres quelques questions faites et fourmés par diverses manieres d'arismetique. Et dois savoir principaulment que quant veudra aegaler les pars et tu auras mains de l'un et plus de l'autre, il te fault metre le plus avecques le moins c'est a dire aegaler la chose avecques la chose, ou il te fault substraire comme il est dist par la regle des 2 posiciones » [BNF, ms fds fr. 1339, fol. 68].

Des quatre exemples proposés ensuite, deux sont résolus par choix d'une inconnue et il est noté à plusieurs reprises que l'on pourrait procéder aussi par double fausse position. Le troisième problème, un classique sur les prix respectifs de trois pièces de drap dont la seconde vaut à l'unité deux fois la première et la troisième deux fois la seconde, débute ainsi : « Posons que la premiere soit une chose ainsy escripte 1^c , la 2^e piece 2^c et la tierce soit 4^c ... » [BNF, ms fds fr. 1339, fol. 68v]. La confusion remarquée dans l'introduction se confirme dans les calculs qui viennent

¹⁹ Lorsqu'on applique la méthode de double fausse position et que les erreurs sont de même signe, on effectue des soustractions pour parvenir à la solution ; si elles sont de signes contraires, on additionne. D'où la règle.

ensuite et révèle une pensée très peu claire sur la nature de « la chose ». On remarquera les notations, dont le principe est le même que celui de Chuquet pour la puissance 1, mais qui interdisent toute généralisation en utilisant « c » pour la chose au lieu du « 1 » de « premier »²⁰.

4.2. Les méthodes de résolution

Le premier paragraphe de l'appendice I au *Triparty en la science des nombres* est intitulé « S'ensuyvent plusieurs aultres invencions de nombres en general lesquelles par la rigle des premiers se treuvent » [Chuquet 1484, app. 1, fol. 148]. C'est en effet dans les annexes au traité proprement dit que l'on peut observer comment Chuquet applique sa règle à des problèmes parfois abstraits, parfois concrets. Parmi ceux-ci, beaucoup figurent dans les traités d'arithmétique commerciale, avec des méthodes de résolution fondées sur la règle de trois, associées à des règles dites « spéciales » ou « extraordinaires ». Chuquet adopte plusieurs attitudes : soit il résout le problème exclusivement « par la rigle des premiers », soit il reprend les méthodes arithmétiques qu'il connaît, soit il mêle les deux. Quel que soit son choix, sa démarche reste imprégnée de ses lectures des traités commerciaux, comme le montre cet exemple où l'on veut trouver deux nombres dont les deux tiers de l'un sont égaux aux trois quarts de l'autre et dont le produit est égal à la somme (trouver deux nombres x et y tels que $\frac{2}{3}x = \frac{3}{4}y$ et $xy = x + y$).

« Pour ce faire reduiz premierement $\frac{2}{3}$ contre $\frac{3}{4}$ si auras $\frac{8}{12}$ et $\frac{9}{12}$. Or prens 8 et 9 car les $\frac{2}{3}$ de 9 sont egaulx aux $\frac{3}{4}$ de 8. Et pourtant posons 9^1 et 8^1 qui multipliez l'ung par l'aultre montent 72^2 egaulx a 17^1 qui sont 8^1 et 9^1 adjoustez ensemble²¹. Maintenant divise 17 par 72 si auras $\frac{17}{72}$ qu'il convient multiplier par 9 qui est la posicion et l'on aura $2\frac{1}{8}$ pour le premier nombre. L'aultre se peult trouver par la rigle de troys en disant : se 9 demandent 8, que demanderont $2\frac{1}{8}$? Multiplie et partiz, si trouveras $1\frac{8}{9}$ pour l'aultre nombre » [Chuquet 1484, app. 1, fol. 151-v].

La méthode appelle plusieurs remarques. Le choix de 9 et 8 est à rattacher au souci fréquent en arithmétique pratique de réduire les fractions au même dénominateur de façon à travailler sur des entiers et non plus

²⁰ Voir [Lamassé 2005] pour une présentation plus détaillée des résolutions algébriques dans ce traité. Nos conclusions sur le statut de l'« inconnue » concordent.

²¹ $9^1 \times 8^1 = 72^2$ et $8^1 + 9^1 = 17^1$. Comme $xy = x + y$, $72^2 = 17^1$.

sur des nombres « rompus »²². Les nombres 9 et 8 répondent à la première condition. On peut considérer chacun d'eux comme « position » et c'est bien ce que Chuquet pense quand il écrit, un peu plus loin : « qu'il convient multiplier par 9 qui est la position ». Et il sait que la solution cherchée sera proportionnelle à 8 et 9. Poser 9^1 et 8^1 revient en quelque sorte à introduire un coefficient de proportionnalité qui sera déterminé par la deuxième condition – c'est $17/72$ – et qui, multiplié par 9, donne la valeur du second nombre. Pour trouver le premier nombre, on aurait pu penser que Chuquet procéderait de même en multipliant $17/72$ par 8. Mais non, c'est encore la règle de trois qu'il fait opérer, accompagnée de la question traditionnelle : si 9 demandent 8, que demanderont $21/8$? Le fait d'utiliser la règle de trois, réflexe premier et outil essentiel dans les arithmétiques pratiques, montre bien que cette méthode est hybride, qu'elle n'appartient pas totalement à la « règle des premiers ». Dans cette résolution, 9^1 n'est pas l'équivalent de notre $9x$. D'ailleurs, Chuquet propose ensuite une deuxième méthode, cette fois purement algébrique, introduite par « vel ».

« Vel sic je pose 1^1 pour le majeur nombre, ainsi le moindre sera $\frac{8^1}{9}$ qui multipliez l'ung par l'autre montent $\frac{8^2}{9}$ et adjoustez ensemble sont $1^1 \frac{8}{9}$ egaulx a $\frac{8^2}{9}$. Partiz doncques $1^1 \frac{8}{9}$ par $\frac{8}{9}$ si auras $2 \frac{1}{8}$ comme dessus » [Chuquet 1484, app. 1, fol. 151 v.]²³.

On pourrait citer beaucoup d'autres exemples montrant que Chuquet est imprégné des réflexes de raisonnement qu'il a intégrés via ses lectures d'arithmétiques commerciales. La règle de trois, on ne s'en étonnera pas, est omniprésente. Ainsi, pour trouver deux nombres proportionnels à 5 et 7 tels que le produit du second par le carré du premier soit égal à 40 [$x/y = 5/7$ et $x^2y = 40$], il prend comme « premier » le plus petit des deux nombres, que je noterai x pour plus de clarté. Le second est alors $(1 + 2/5)x$. On trouve que x est la racine cubique de $78 + 2/5$. Chuquet pourrait calculer le second nombre à partir de l'expression $(1 + 2/5)x$;

²² Barthélemy de Romans [1476, fol. 157], dans le *Compendy de la pratique des nombres*, écrit pour les mêmes fractions : « 9 sont $3/4$ de leur entier » ; « 8 sont $2/3$ de leur entier ». L'entier, c'est 12, le dénominateur commun à 4 et à 3.

²³ Utilisons (abusivement) nos notations algébriques pour éclairer le texte. Les deux nombres cherchés sont x et $\frac{8}{9}x$. Leur produit est $\frac{8}{9}x^2$, leur somme est $(1 + \frac{8}{9})x$, égaux par hypothèse à $\frac{8}{9}x^2$. D'où la valeur (non nulle) de x en divisant $1 + \frac{8}{9}$ par $\frac{8}{9}$.

il préfère recourir à la règle de trois ([Chuquet 1484, fol. 99v], [Marre 1880a, p. 756]) :

L'autre nombre se peut investiguer par la règle de troys ainsi : se $5/7/R^3 28\frac{4}{7}$, puis multiplier et partir ainsi que la règle de troys requiert et l'on trouvera $R^3 78\frac{2}{5}$ pour l'autre nombre »²⁴.

Enfin, la pertinence du choix de l'inconnue, dans certains problèmes difficiles, est guidée par une bonne connaissance des procédures de résolution fournies par le modèle de l'arithmétique pratique. Un exemple caractéristique est celui d'un problème où une compagnie de trois hommes s'échange de l'argent [Chuquet 1484, app. 1, fol. 164v] et dont la traduction algébrique actuelle est :

$$x_1 + 7 = 5(x_2 + x_3 - 7)$$

$$x_2 + 9 = 6(x_3 + x_1 - 9)$$

$$x_3 + 11 = 7(x_1 + x_2 - 11)$$

La méthode choisie dans les traités marchands franco-occitans consiste à exprimer le problème en fonction de la somme S des inconnues, soit ici :

$$x_1 + 7 = \frac{5}{6}S; \quad x_2 + 9 = \frac{6}{7}S; \quad x_3 + 11 = \frac{7}{8}S.$$

Chuquet pose que cette somme est 1¹. Et le raisonnement qu'il suit pour exprimer ensuite les x_i en fonction de S (voir le système ci-dessus) est calqué sur ces mêmes traités. Le système ci-dessus permet de déduire des équations précédentes

$$S + 27 = \left(\frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \frac{7}{8} \right) S,$$

donc de calculer S puis les trois nombres cherchés. Cette méthode est pertinente puisqu'elle permet de réduire le système à la recherche d'une seule inconnue. Travailler avec les données initiales est plus difficile. Chuquet sait le faire ; il utilise alors plusieurs méthodes. Il combine parfois la règle de la chose avec la méthode de double fausse position ou bien il introduit plusieurs inconnues. Ainsi, dans un problème voisin du précédent

²⁴ Si les trois premiers nombres de la proportion, c'est-à-dire les trois nombres connus de la règle de trois, sont 5, 7, $\sqrt[3]{28 + \frac{4}{7}}$, le quatrième est obtenu en multipliant et divisant par les nombres adéquats suivant le procédé de la règle de trois.

que l'on exprime algébriquement par le système :

$$\begin{aligned}x_1 + 7 &= 5(x_2 + x_3 - 7) + 1 \\x_2 + 9 &= 6(x_3 + x_1 - 9) + 2 \\x_3 + 11 &= 7(x_1 + x_2 - 11) + 3\end{aligned}$$

il propose deux méthodes [Chuquet 1484, app. 1, fol. 169-170]. Tout d'abord « on peut proceder [...] par le moyen de ces deux rigles, c'est assavoir de deux posicions et de la rigle des premiers ». L'utilisation simultanée des deux règles permet, d'une part d'alléger la procédure de fausse position qui devient très lourde à partir de trois inconnues (ici la méthode algébrique intervient dans un calcul intermédiaire), d'autre part d'éviter de poser plus d'une inconnue. Vient ensuite un « autre stile de faire telles raisons et ce par la rigle des premiers tant seulement ». C'est là que Chuquet s'émerveille devant les prouesses de l'algèbre. Il a posé 1¹ pour la première inconnue. « Ores pour avoir la porcion du second et ce par voye singuliere et fort exquisite je pose pour sa part 1² ». En marge et d'une autre main, probablement celle d'Étienne de la Roche, il est écrit « Ceste regle est appelee la regle de la quantité », appellation commune à plusieurs algébristes. Lorsqu'il y a au moins trois nombres à déterminer, la « quantité » est utilisée tour à tour pour désigner la seconde, la troisième inconnue, etc.²⁵. Chuquet choisit à plusieurs reprises cette méthode par la suite. Mais, comme on l'a vu, le mélange des genres lui permet aussi de l'éviter.

4.3. L'importance de la règle et de l'expérience acquise

Dans les arithmétiques pratiques, la maîtrise des sujets passe par celle des méthodes, donc des règles, donc aussi par l'entraînement qui tient une place fondamentale et qui apporte l'expérience. Chuquet le fait remarquer à plusieurs reprises : si la « règle des premiers » est encensée

²⁵ C'est une méthode ancienne déjà utilisée dans le monde arabe par Abū Kāmil par exemple (décédé en 930). Cardan [1570, p. 42] emploie *res* pour la première inconnue et *quantita* pour la seconde dans un problème à trois inconnues du chapitre IX de l'*Ars magna*. Antonio Mazzinghi, maître d'abaque florentin du XIV^e siècle, serait le premier auteur de traités en vernaculaire à utiliser deux inconnues aux noms différents, *cosa* et *quantita* [Franci & Toti Rigatelli 1985, p. 42].

puisqu'il lui consacre une bonne partie du premier appendice²⁶, il ne rejette pas pour autant les règles acquises par l'expérience, qualifiées de « spéciales » ou « extraordinaires ». Ce sont des instructions qui ne sont accompagnées d'aucune preuve mathématique et le lecteur moderne a parfois de la difficulté à en percevoir l'origine et à suivre le cheminement logique qui y conduit. Chuquet nous en dit quelques mots, car il en débat dans un paragraphe de l'appendice I intitulé « Le stile de trouver et sercher les rigles speciales devant dictes et autres semblables » [Chuquet 1484, app. 1, fol. 195]. Il a résolu auparavant quelques problèmes pour lesquels il a appliqué un algorithme. Ils sont du genre de celui-ci : trouver deux nombres connaissant leur somme et sachant que le premier plus 2 est égal au double (ou au triple) du second plus 7. Il aurait très bien pu recourir à sa « règle des premiers ». Et, bien que celle-ci soit parfois d'usage simple, Chuquet insiste sur le fait que les règles spéciales sont souvent « plus faciles que les generales » et nécessaires car elles permettent, une fois établies, de résoudre des questions difficiles. Il poursuit ainsi :

« Le stile et maniere de cercher et faire telles rigles speciales si est que l'on doit faire par la rigle des premiers ou par aultre <rigle> deux ou troys raisons de semblable condicion en divers nombres et puis sillogizer et contempler par les nombres congneuz commant ilz se pourroient trouver s'ilz estoient incongneuz [...] tant par speculation des proprietiez des nombres que aussi par experience faicte en plusieurs et divers nombres jusqu'a ce que l'on ayt trouvé ung moyen par lequel on puisse ataindre les nombres ja congneuz et aussi les incongneuz en semblable proporcion constituez » [Chuquet 1484, app. 1, fol. 195].

L'algèbre devient donc ici un moyen heuristique parmi d'autres pour conjecturer la forme de l'algorithme cherché pour un type donné de problème. C'est en partie la répétition de problèmes semblables qui donne la solution de manière inductive. L'expérience joue donc un rôle important, tout comme dans les traités commerciaux où elle est sans cesse prônée et Chuquet y insiste : « Telz nombres [...] se tiennent par experience faicte en plusieurs raisons » ; « lesquelz [nombres] j'ai trouvé par experience » [Chuquet 1484, app. 1, fol. 194].

²⁶ Voici quelques exemples de titres : « S'ensuyvent plusieurs autres invencions de nombres en general lesquelz par la rigle des premiers se treuvent » [Chuquet 1484, fol. 148] ; « Comant la rigle des premiers peult estre appliquee en especial et en maintes manieres » (à des problèmes d'énoncé concret, [Chuquet 1484, fol. 154]).

L'algèbre est une règle merveilleuse, mais le choix final de la méthode est avant tout soumis au critère de performance. Dans un contexte où la règle est prédominante, les méthodes spécifiques à un genre de problème prévalent souvent par rapport à des méthodes transversales comme la « règle des premiers ».

5. CONCLUSION

La conception de l'algèbre qui émerge d'une analyse des règles et des résolutions de problèmes présentées dans le *Triparty en la science des nombres* n'est certes pas propre à Chuquet. Parmi les constatations qui viennent d'être faites, certaines valent pour bien des traités d'abaque du même siècle écrits par les maîtres italiens, proches eux aussi du milieu du commerce et de la finance. Pour la France, c'est le seul texte sur lequel nous pouvons actuellement nous appuyer. Les quelques problèmes résolus par la « règle de la chose » dans le manuscrit français 1339 de la BnF sont trop rares pour en tirer des informations fiables et il n'y a aucun commentaire sur la règle elle-même. Ce que ce manuscrit laisse tout de même filtrer, c'est une orientation qui conforte celle qui ressort du *Triparty*, notamment pour le statut de « la chose », plus proche d'une « position » que d'une inconnue au sens où nous l'entendons maintenant.

La formation de Chuquet et sa place dans la société de son temps l'ont amené à produire une œuvre composite, réunissant des sources et des mathématiques d'origine plurielle. En particulier, l'empreinte des mathématiques pratiques demeure très forte. Les règles sont expliquées mais ne sont pas démontrées – ce qui n'est pas le cas dans les traités d'abaque italiens les plus réputés –, les résolutions algébriques sont souvent calquées sur des techniques rencontrées dans les arithmétiques commerciales franco-occitanes. Avec son algèbre, Chuquet exhibe un procédé en action sur des exemples numériques uniquement, une règle « merveilleuse », qu'il ne privilégie toutefois pas au point de négliger des méthodes spécifiques à certaines catégories de problèmes.

L'exposition de la « règle des premiers » révèle une vision d'avant-garde par rapport aux traités connus. Pour la première fois, tous les cas se ramenant au premier et second degrés sont regroupés en quatre canons seulement, point de vue synthétique qui va de pair avec des notations puissantes. Car l'invention d'une notation, qui permet d'écrire toutes les

puissances de l'inconnue *ad infinitum* et de généraliser des résultats jusqu'ici limités à des coefficients et des exposants entiers, ne peut aller sans une compréhension générale des calculs algébriques et *vice versa*. Est-ce l'invention de Chuquet ? Nul ne peut l'affirmer. On a repéré des sources d'inspiration possibles²⁷, mais aucun traité antérieur actuellement connu n'offre un exposé de si haut niveau.

BIBLIOGRAPHIE

Sources manuscrites, imprimées et éditions modernes commentées

ANONYME

[ca 1460] *Arismetique*, ca 1460, BNF, fds fr. 1339.

ARRIGHI (Gino), éd.

[1970] *Piero della Francesca. Trattato d'abaco dal Codice Ashburnhamiano 280 (329*-291*) della Biblioteca Medicea laurenziana di Firenze*, a cura e con introduzione di Gino Arrighi, coll. *Testimonianze di storia della scienza* 6, Pisa : Domus galileana, 1970.

ARRIGHI (Gino)

[1974] *Pier Maria Calandri. Tractato d'abbacho dal codice Acq. e doni 154 (sec. XV) della Biblioteca Medicea laurenziana di Firenze*, coll. *Testimonianze di storia della scienza* 6 ; , Pisa : Domus galileana, 1974.

BARTHÉLEMY DE ROMANS

[1476] *Compendy de la praticque des nombres*, 1476 ; Cesena, Bibl. Malatestiana, S-XXVI-6, fol. 149-268v.

BONCOMPAGNI (Baldassarre)

[1857] *Scritti di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo, vol. 1 : Il Liber Abbaci di Leonardo Pisano, pubblicato secondo la lezione del codice Magliabechiano C. I, 2616, Badia Fiorentina, no. 73*, Roma : Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1857.

CARDAN (Jérôme)

[1570] *Ars magna*, (1545), 2^e éd. : Basel 1570.

CHUQUET (Nicolas)

[1484] *Triparty en la science des nombres*, Paris BNF, ms fds fr. 1346, Lyon, 1484.

L'HUILLIER (Ghislaine)

[1990] *Le Quadripartitum numerorum de Jean de Murs*, Genève : Droz, 1990.

²⁷ Raffaella Franci et Laura Toti Rigatelli [1985, p.48-51] notent des similitudes dans la classification des différents types d'équations entre le *Triparty* et un manuscrit anonyme contemporain originaire de l'Italie du Nord, copie d'un ouvrage antérieur.

- L'HUILLIER (Hervé)
 [1979] *Nicolas Chuquet, la Géométrie, première géométrie algébrique en langue française, 1484*, coll. L'Histoire des sciences, textes et études, Paris : Vrin, 1979.
- LA ROCHE (Étienne de)
 [1538] *Arismetique & geometrie*, Lyon : Huguetan frères, 1538; 1^e éd. : Lyon, 1520.
- MARRE (Aristide)
 [1880a] Le *Triparty en la science des nombres* par Maistre Nicolas Chuquet parisien, d'après le manuscrit fonds français n° 1346 de la Bibliothèque nationale, *Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, 13 (1880), p. 593-659 (1^e partie) et p. 693-814 (2^e et 3^e parties).
- PACIOLI (Luca)
 [1523] *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalita*, Venezia : Paganino de Paganini, 1523; 1^{ère} éd. Venezia, 1494.
- PELETIER DU MANS (Jacques)
 [1620] *L'algebre departie en deux livres*, Genève : Jean de Tournes, 1620.
- SIGLER (Laurence E.)
 [2002] *Fibonacci's Liber abaci, Leonardo Pisano's Book of Calculation*, coll. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, New York : Springer, 2002.
- SPIESSER (Maryvonne)
 [2003] *Une arithmétique commerciale du XV^e siècle, le Compendy de la pratique des nombres de Barthélemy de Romans*, Coll. De diversis artibus 70, Turnhout : Brepols, 2003.

Références

- BEAUJOUAN (Guy)
 [1956] Les Arithmétiques françaises des XIV^e et XV^e siècles, dans *Actes du VIII^e congrès international d'Histoire des Sciences, Florence 3-9 Septembre 1956*, Paris : Hermann, 1956, p. 84–87.
 [1988] The place of Nicolas Chuquet in a typology of fifteenth-century French arithmetics, dans Hay (Cynthia), éd., *Mathematics from Manuscript to Print : 1300-1600*, Oxford : Clarendon Press, 1988, p. 73–88.
- BENOIT (Paul)
 [1992] Marchands et mathématiques : le cas français, dans *Le marchand au Moyen Age, Actes du XIX^e congrès de la Société des historiens médiévistes de l'Enseignement supérieur public, Reims, 1988*, Paris : SHMES-CID, 1992, p. 195–210.
- BENOIT (Paul) & LAMASSÉ (Stéphane)
 [2003] Apposition et rémotion : une spécificité française, dans Spiesser (Maryvonne), Guillemot (Michel), éd., *De la Chine à l'Occitanie, chemins*

entre arithmétique et algèbre. Actes du colloque internationale de Toulouse, 22-24 sept. 2000, Toulouse : CIHSO, 2003, p. 1-14.

BRÉSARD (Marc)

[1914] *Les foires de Lyon aux XV^e et XVI^e siècles*, Paris : Picard, 1914.

CHARMASSON (Thérèse)

[1978] L'Arithmétique de Roland l'Ecrivain et le *Quadripartitum numerorum* de Jean de Murs, *Revue d'histoire des sciences*, 31 (1978), p. 173–176.

CHASLES (Michel)

[1841] Histoire de l'algèbre, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 12 (1841).

EGMOND (Warren van)

[1988] How Algebra came to France? dans Hay (Cynthia), éd., *Mathematics from Manuscript to Print, 1300-1600*, Oxford : Clarendon Press, 1988, p. 127-144.

FLEGG (Graham)

[1988] Nicolas Chuquet – an introduction, dans Hay (Cynthia), éd., *Mathematics from Manuscript to Print : 1300-1600*, Oxford : Clarendon Press, 1988, p. 59–72.

FLEGG (Graham), HAY (Cynthia), & MOSS (Barbara)

[1985] *Nicolas Chuquet, Renaissance Mathematician*, Dordrecht : D. Reidel, 1985.

FRANCI (Raffaella) & TOTI RIGATELLI (Laura)

[1982] *Introduzione all'aritmetica mercantile del medioevo e del rinascimento*, Siena : Quattro Venti, 1982.

[1985] Towards a history of algebra from Leonardo Pisano to Luca Pacioli, *Janus*, 73 (1985), p. 17–82.

[1988] Fourteenth-century Italian algebra dans Hay (Cynthia), éd., *Mathematics from Manuscript to Print : 1300-1600*, Oxford : Clarendon Press, 1988, p. 11–29.

FRANCI (Raffaella)

[1988] L'Insegnamento della matematica in Italia nel Tre-Quattrocento, *Archimede* 4(1988), p. 182–194.

[1996] L'Insegnamento dell' aritmetica nel medioevo, dans Franci (Raffaella), Pagli (Paolo) et Toti Rigatelli (Laura), éd., *Itinera matematica, studi in onore di Gino Arrighi per il suo 90^o compleanno*, Siena : Centro studi sulla matematica medioevale, 1996, p. 1–22.

GASCON (R.-F.)

[1958] Les Italiens dans la Renaissance économique lyonnaise au XVI^e siècle, *Revue des études italiennes*, 5 (1958), p. 167–181.

GIUSTI (Enrico)

[1993] Fonti medievali dell'Algebra di Piero della Francesca, *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, 13 (1993), p. 199–250.

ITARD (Jean)

[1984] Chuquet (Nicolas), 2^e partie du XV^e siècle, dans Rashed (Roshdi), éd., *Essais d'histoire des mathématiques*, Paris : Blanchard, 1984, p. 169–179.

- L'HUILLIER (Hervé)
- [1976] Éléments nouveaux pour la biographie de Nicolas Chuquet, *Revue d'histoire des sciences*, 29 (1976), p. 347–350.
 - [1988] Les mathématiques à Lyon à travers l'arithmétique commerciale d'Étienne de la Roche (1480-1520), dans *Lyon, cité de savants, Actes du 112^e congrès national des Sociétés savantes, Lyon, 1987*, Paris : éditions du C.T.H.S., 1988, t. 1, p. 31–41.
- LAMASSÉ (Stéphane)
- [2005] Une utilisation précoce de l'algèbre en France au XV^e siècle. Note sur le manuscrit français 1339 de la Bibliothèque nationale, *Revue d'histoire des mathématiques*, 11 (2005), p. 239-255
- LAMBO (Charles)
- [1902] Une algèbre française de 1484, Nicolas Chuquet, *Revue des questions scientifiques* 3^es., 2 (1902), p. 443–472.
- MARRE (Aristide)
- [1880b] Notice sur Nicolas Chuquet et son *Triparty en la science des nombres*, *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, 13 (1880), p. 555–592.
 - [1881] Appendice au *Triparty en la science des nombres* de Nicolas Chuquet parisien, *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, t. 14 (1881), p. 413–460.
- SPIESSER (Maryvonne)
- [2001] Le *Compendy de la pratique des nombres*, une arithmétique du XV^e siècle à mi-chemin entre théorie et pratique commerciale, dans *Actes du colloque international du CIHSO, Commerce et mathématiques du Moyen Âge à la Renaissance autour de la Méditerranée, 13-16 mai 1999*, Toulouse : CIHSO, 2001.
 - [2002] Barthélemy de Romans et l'arithmétique commerciale au XV^e siècle, *Histoire littéraire de la France*, 42 (2002), p. 297–315.
- ULIVI (Elisabetta)
- [2002] Benedetto da Firenze (1429-1479) un maestro d'abaco del XV secolo, *Bollettino di Storia delle Scienze matematiche*, 22 (2002), p. 3–243.

ANNEXE

Table des matières du *Triparty en la science des nombres*²⁸*Partie 1* (fol. 2-45)

- (1) Traité des nombres entiers (numération, opérations)
- (2) Traité des nombres rompus (réduction, opérations)
- (3) Progressions, nombres parfaits, nombres proportionnels
- (4) Règle de trois et ses applications
- (5) Règle d'une position
- (6) Règle de deux positions

²⁸ Reconstitution. Les titres originaux de Chuquet sont en italiques.

(7) Règle d'apposition et rémotion

(8) Règle des nombres moyens

Partie 2 : Des racines. Racines simples, composees, lyees (fol 45v-81v)

(1) Réduire des racines « dissemblans a un semblant »

(2) Extraire et simplifier les racines

(3) Addition

(4) Soustraction

(5) Multiplication

(6) Division

Partie 3 : Rigle des premiers (fol. 83-147)

(1) Première partie principale : mise en place (vocabulaire, notations, opérations sur les « différences »)

(2) Deuxième partie principale : travail préparatoire (mise en équation, transformation et réduction des équations, énoncé des 4 canons)

(3) Troisième partie principale : exposition des quatre canons et exemples d'application (voir p. 15)

Appendices au Triparty

Appendice 1 : Applications des règles du Triparty (surtout de la « règle des premiers ») à des problèmes d'arithmétique (fol. 148-210)

Appendice 2 : Comment la science des nombres se peult appliquer aux mesures de géométrie (fol. 211-262)

Appendice 3 : Comment la science des nombres se peult appliquer au fait de marchandise (fol. 264-324)

