*Revue d'histoire des mathématiques*
11 (2005), p. 205–238

# LA MÉTHODE DE CHOLESKY

Claude Brezinski

Résumé. — L'objet de cet article est de présenter le manuscrit original, jusqu'alors inconnu, de Cholesky où il explique sa méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires. Le contexte historique est précisé après une brève biographie. La méthode des moindres carrés et son application à la topographie, ainsi que les diverses méthodes directes de résolution des systèmes linéaires sont discutées. Ensuite, la diffusion de la méthode de Cholesky est retracée et l'on donne une analyse détaillée du manuscrit de Cholesky (qui est entièrement reproduit). Les autres travaux du fonds A. Cholesky de l'École polytechnique sont énumérés.

Abstract (The Method of Cholesky). — The purpose of this paper is to present the original manuscript, unknown until now, of Cholesky where he explains his method for solving systems of linear equations. After a brief biography, the historical context is specified. The method of least squares and its application to topography, and the various methods for the solution of linear systems are discussed. Then, the spreading of Cholesky's method is reported, and a detailed analysis of Cholesky's manuscript (entirely reproduced) is given. The other works in the fonds A. Cholesky of the École polytechnique are enumerated.

Texte reçu le 4 novembre 2004, révisé le 11 mai 2005.

C. Brezinski, Laboratoire Paul Painlevé, UMR CNRS 8524, UFR de Mathématiques pures et appliquées, Université des Sciences et Technologies de Lille, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex (France).
Courrier électronique : `claude.brezinski@univ-lille1.fr`

Classification mathématique par sujets (2000) : 01-08, 01-99, 01A55, 01A60, 01A70, 65F05.

Mots clefs : Méthode de Cholesky, systèmes linéaires, moindres carrés, topographie.

Key words and phrases. — Cholesky method, linear systems, least squares, topography.

Le nom de Cholesky est passé à la postérité grâce à sa méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires. Elle est toujours intensément utilisée de nos jours.

Jusqu'à ces derniers temps, cette méthode n'était connue que de seconde main puisque Cholesky n'en a rien publié lui-même. Sa famille vient de déposer aux archives de l'École polytechnique, où Cholesky fut élève, les papiers en sa possession. Ils forment le fonds A. Cholesky. Parmi ces pièces se trouve un manuscrit de Cholesky où il expose sa méthode. C'est donc un document scientifique de première importance. Nous allons le replacer ici dans son contexte historique et l'analyser. Nous donnerons aussi une brève biographie de son auteur et des indications sur ses autres travaux[1].

## 1. ANDRÉ CHOLESKY

André-Louis Cholesky naquit le 15 octobre 1875 à Montguyon, petite commune de l'arrondissement de Jonzac (Charente-Maritime). Il était le fils d'André Cholesky, maître d'hôtel, et de Marie Garnier. André avait de nombreux frères et sœurs.

Il obtint la première partie de son baccalauréat à Bordeaux en 1892 et sa seconde partie, avec la mention assez bien, l'année suivante. Le 15 octobre 1895, il entre à l'École polytechnique, 87$^{e}$ sur 223. Deux ans plus tard, il est admis à l'École d'application de l'artillerie et du génie de Fontainebleau. Il en sort en 1899, 5$^{e}$ sur 86.

Nommé lieutenant en 1899, Cholesky effectue diverses missions en Tunisie et en Algérie entre 1902 et 1904. En juin 1905, il est affecté au service géographique de l'état-major de l'armée. À cette époque, suite à la révision de la méridienne de Paris, une nouvelle triangulation cadastrale de la France venait d'être décidée, ainsi que la mesure de la méridienne de Lyon. Cholesky prendra part à ces campagnes de mesure dans la vallée du Rhône, le Dauphiné, l'Isère et les Cévennes.

Le 10 mai 1907, il épouse sa cousine germaine Anne-Henriette Brunet. Ils auront deux fils, dont un posthume, et deux filles : René (né en 1908), Françoise (née en 1909), Hélène (née en 1911) et André (né en 1919), tous décédés.

---

[1] Pour de plus amples détails, voir [Brezinski 2005] et [Brezinski & Gross-Cholesky 2005].

De novembre 1907 à juin 1908, Cholesky effectue une mission en Crète, alors occupée par les troupes internationales. Nommé capitaine en 1909, il est maintenu au service géographique. En août 1909, il est rayé des contrôles du service géographique et doit rejoindre le 13e régiment d'artillerie afin d'y effectuer le temps légal de deux ans qu'il devait accomplir comme commandant de batterie. C'est à cette époque qu'il rédige le manuscrit, conservé dans le fonds A. Cholesky, sur sa méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires, la fameuse *méthode de Cholesky*. En septembre 1911, il est affecté à l'état-major de l'artillerie, puis de nouveau au service géographique de l'armée.

En mai 1913, Cholesky est nommé chef du service topographique de la régence de Tunis. La direction du nivellement en Algérie et en Tunisie lui est confiée. Il y reste jusqu'au 2 août 1914, date de la mobilisation. Il rejoint le 16e régiment d'artillerie basé à Issoire.

À partir de décembre 1909 (et peut-être avant) jusqu'à, au moins, janvier 1914, Cholesky participe à l'enseignement par correspondance de l'École spéciale des travaux publics, du bâtiment et de l'industrie, fondée par Léon Eyrolles. Pour les étudiants, il rédigera de nombreux documents sur la topographie et les instruments de mesure, ainsi qu'un traité de topographie [Cholesky 1937].

En septembre 1914, Cholesky est nommé commandant de la 9e batterie. Le 3 janvier 1915, il est détaché auprès du général commandant l'artillerie du 17e corps d'armée pour l'organisation du tir. En février, il est affecté au service géographique de l'armée pour être employé à un groupe de canevas de tir du détachement de l'armée des Vosges. Il devient chef du groupe des canevas de tir de la VIIe armée en juillet 1916.

De septembre 1916 à février 1918, Cholesky est affecté à la mission militaire en Roumanie. Il y exerce les fonctions de directeur technique du service géographique et est promu chef d'escadron.

Le 5 juin 1918, il est affecté au 202e régiment d'artillerie de campagne. Entre le 15 août et le 26 septembre, ce régiment participera à l'offensive sur la ligne Hindenburg. En particulier, il sera engagé dans les combats sur l'Ailette du 23 août et dans ceux de Courson.

Le 31 août 1918, Cholesky décède à 5 heures du matin dans une carrière au nord de Bagneux (dans l'Aisne, à environ 10 km au nord de Soissons) des suites de blessures reçues sur le champ de bataille. Il fut inhumé au cimetière militaire de Chevillecourt près d'Autrèches dans l'Oise, puis son corps fut transféré au cimetière de Cuts (dans l'Oise, à 10 km au sud-est de Noyon), tombe 348, carré A.

FIGURE 1. A.-L. Cholesky, élève à l'École polytechnique (Reproduit avec la gracieuse autorisation des Archives de l'École polytechnique)

## 2. LE CONTEXTE HISTORIQUE DE LA MÉTHODE DE CHOLESKY

La méthode de Cholesky est bien connue en analyse numérique. Soit à résoudre le système d'équations linéaires $Ax = b$, où la matrice $A$ est carrée, symétrique et définie positive. Cette méthode consiste à décomposer la matrice $A$ en un produit $A = LL^T$, où $L$ est une matrice triangulaire inférieure (c'est-à-dire dont tous les éléments au-dessus de la diagonale sont nuls) avec des termes diagonaux strictement positifs. Le système devient alors $LL^Tx = b$. On pose $L^Tx = y$. On résout donc d'abord $Ly = b$, ce qui fournit le vecteur $y$. Puis on résout $L^Tx = y$. Les éléments de la matrice $L$ s'obtiennent en identifiant les éléments correspondants dans les matrices $A$ et $LL^T$.

Nous allons maintenant replacer la méthode de Cholesky dans le cadre historique des méthodes de résolution des systèmes d'équations linéaires.

***La méthode des moindres carrés***

Soit à résoudre le système d'équations linéaires $Mx = c$, où $M$ est une matrice rectangulaire ayant $m$ lignes et $n$ colonnes. Si $m > n$, ce système n'a pas de solution $x$ qui vérifie exactement les équations. On cherche alors à les résoudre *au mieux*, c'est-à-dire à minimiser la norme euclidienne du résidu $r = c - Mx$. En écrivant que les dérivées partielles de $\|r\|_2^2$ par rapport aux $x_i$ doivent être nulles, on obtient les *équations normales* $M^T Mx = M^T c$. La matrice $A = M^T M$ est symétrique et, si les colonnes de $M$ sont linéairement indépendantes, définie positive. On dit que le vecteur $x$, solution unique des équations normales $Ax = b$, avec $b = M^T c$, est solution du système $Mx = c$ *au sens des moindres carrés*. Cette méthode est liée à la réduction des formes quadratiques, sujet d'un article de Joseph-Louis Lagrange [1759]. À cette occasion, Lagrange donne des formules d'élimination semblables à celles de la méthode de Gauss dont nous parlerons plus loin. Il semble que l'interprétation matricielle de cette méthode de réduction soit due à Carl Gustav Jacob Jacobi [1857] dans un article posthume.

La méthode des moindres carrés fut publiée pour la première fois par Adrien-Marie Legendre [1806, Appendice]. Sa justification comme procédure statistique fut donnée par Carl Friedrich Gauss en 1809 [Gauss 1809], puis en 1810 dans son mémoire sur l'astéroïde Pallas découvert par Heinrich Wilhelm Olbers le 28 mars 1802 [Gauss 1810]. Selon Gauss, la méthode des moindres carrés conduit à la meilleure combinaison possible des observations quelle que soit la loi de probabilité des erreurs [Gauss 1823]. Elle fut immédiatement reconnue comme une contribution majeure. Gauss affirma l'avoir déjà utilisée dès 1795. Il est certain qu'il s'en servit en 1801 pour déterminer l'orbite de la comète Cérès découverte par Giuseppe Piazzi le 1er janvier 1801 (*cf.* [Björck 1996], [Goldstine 1977]). Résoudre les équations normales $Ax = b$ revient à rechercher le vecteur $x$ tel que

$$\|b - Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[b_i - (Ax)_i\right]^2 = 0.$$

Gauss réécrit cette somme comme une autre somme de carrés en éliminant l'un d'entre eux à chaque étape. Exprimée en termes d'algèbre linéaire, c'est la méthode d'*élimination* de Gauss, sa méthode du *pivot* pour résoudre un système d'équations linéaires[2].

Signalons que le mathématicien américain d'origine irlandaise Robert Adrain[3] avait, à l'occasion d'une question de topographie, publié un article daté de 1808 (mais paru en 1809) dans lequel il exposait également la méthode des moindres carrés [Adrain 1808]. Ce travail passa totalement inaperçu en Europe. En 1818, Adrain appliqua encore cette méthode à la détermination de l'aplatissement de la Terre à partir de mesures du méridien [Adrain 1818a] et en tira une estimation des axes de l'ellipsoïde terrestre [Adrain 1818b][4].

***Application à la topographie***

Lorsque $m < n$, c'est-à-dire lorsque le nombre d'équations est inférieur au nombre d'inconnues, le système $Mx = c$ a une infinité de solutions. Parmi toutes les solutions possibles, on peut rechercher celle qui minimise la somme des carrés des inconnues. C'est exactement ce second cas que l'on rencontre dans les questions de compensation des réseaux géodésiques dont Cholesky eut à s'occuper.

Pour établir une carte, le topographe doit réaliser une triangulation du terrain. Selon l'échelle de la carte, il est nécessaire de tenir compte de la forme exacte de la terre. Les angles et les longueurs sont astreints à vérifier des équations de condition qui expriment le fait que la somme des angles d'un triangle doit être égale à une valeur connue (supérieure à 180 degrés pour tenir compte de la sphéricité de la terre), qu'en chaque point la somme des angles doit valoir 360 degrés et que les longueurs doivent

[2] Voir [Chabert et al. 1994, p. 324–333]. Les travaux de Gauss sont analysés en détail dans [Sheynin 1979] et [Stewart 1994]. Pour sa contribution à la géodésie, consulter [Sheynin 1994].

[3] Carrickfergus, Irlande, 30 septembre 1775 – New Brunswick, NJ, USA, 10 août 1843.

[4] Sur ces questions, voir [Kolmogorov & Yushkevich 1992]. Sur la dissémination, les transformations et les conditions d'application de la méthode des moindres carrés, voir [Jozeau 1997].

rester les mêmes quel que soit l'ordre dans lequel les mesures sont effectuées[5]. Enfin, certains points géodésiques ne peuvent être observés qu'à distance et ne sont pas accessibles directement pour y installer les instruments de mesure. C'est, par exemple, le cas des clochers, des faîtes des constructions élevées ou des cheminées. Ainsi que l'écrit Cholesky :

> « Toutes les fois que l'on fait une triangulation calculée, il y a avantage à faire également une *compensation par le calcul*. On est alors amené à écrire un certain nombre d'équations représentant les relations géométriques entre les divers éléments des figures de la triangulation et comme il y a généralement plus d'inconnues que d'équations, on lève l'indétermination en écrivant que la somme des carrés des corrections est minima » [Cholesky 1937, p. 264].

On arrive alors à un système linéaire ayant plus d'inconnues que d'équations. On peut donc toujours modifier la valeur des angles de façon que ces équations de condition soient satisfaites au mieux. C'est ce que Gauss appelle la *compensation*. Si l'on a $n$ compensations $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ qui doivent satisfaire $m$ équations de condition, avec $m < n$, on est alors conduit à un système $r = Mx - c = 0$ où les lignes de $M$ sont linéairement indépendantes. On va choisir, comme Gauss, les compensations les plus plausibles, c'est-à-dire celles qui minimisent la somme des carrés $\|x\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Pour résoudre ce problème, Lagrange introduit $m$ nouvelles variables $y = (y_1, \ldots, y_m)^T$, les *multiplicateurs de Lagrange*, puis cherche à annuler les dérivées partielles de la fonction $f(x) = \|x\|_2^2 - 2(y, r)$ par rapport aux inconnues $x_i$. On a $\partial f(x)/\partial x_i = 2x_i - 2(y, M_i^T) = 0$ où $M_i^T$ désigne la $i$-ième ligne de la matrice $M^T$, ce qui conduit à $x = M^T y$. En effectuant le remplacement de $x$ dans le premier système, on obtient $MM^T y = c$. On dit que l'on a résolu le système $Mx = c$ au sens des moindres carrés. La matrice $A = MM^T$ est symétrique et définie positive. Comme nous le verrons plus loin, Cholesky va rechercher une autre matrice, $L$, triangulaire inférieure, telle que les équations de condition s'écrivent $LL^T y = c$. En posant $z = L^T y$, ce système devient $Lz = c$. Sa résolution, simple puisque $L$ est triangulaire, fournit le vecteur $z$. Ce vecteur $z$ étant calculé, on résout le système $L^T y = z$, ce qui donne $y$. Il ne reste plus ensuite qu'à calculer $x$ par la formule $x = M^T y$.

---

[5] Voir par exemple [Eyrolles, Prévot & Quanon 1909], [Pizzetti & Noirel 1916] et [Merlin 1964].

La méthode des moindres carrés, également très utilisée en astronomie, conduit donc à la résolution d'un système d'équations linéaires dont la matrice est symétrique définie positive. Naturellement, les formules de Cramer en donnent la solution, mais une solution toute théorique puisque le volume des calculs nécessaires rend vite ceux-ci impraticables. Rapidement, les scientifiques se sont donc intéressé aux méthodes d'élimination comme celle de Gauss.

***Les méthodes de résolution des systèmes linéaires***

Il est bien connu que certains résultats sont redécouverts indépendamment par plusieurs scientifiques et cela, parfois, à plusieurs années et des milliers de kilomètres de distance. C'est le cas des méthodes de résolution des systèmes d'équations linéaires.

L'algèbre matricielle fut développée par Arthur Cayley dans les années 1850. Du point de vue théorique, la méthode de Gauss revient à décomposer la matrice $A$ en un produit $A = LU$, où $L$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité (c'est-à-dire que tous les éléments au-dessus de la diagonale sont nuls et que ceux de la diagonale sont égaux à 1) et où $U$ est une matrice triangulaire supérieure (c'est-à-dire que tous les éléments en dessous de la diagonale sont nuls). Le système s'écrit alors $LUx = b$, c'est-à-dire $Ly = b$ si l'on pose $y = Ux$. La résolution du système $Ly = b$ fournit le vecteur $y$ qui sert ensuite de second membre au système $Ux = y$ et l'on obtient la solution cherchée $x$.

Une variante de la méthode de Gauss, dans laquelle on transforme le système en un système diagonal, est due au topographe allemand Wilhelm Jordan[6] qui l'exposa en 1888 dans la troisième édition d'un de ses livres [Jordan 1888]. Il ne faut pas le confondre, comme c'est souvent le cas, avec Camille Jordan dont Cholesky fut l'élève à l'École polytechnique et qui fut, avec Eugenio Beltrami, à l'origine de la décomposition en valeurs singulières d'une matrice. Remarquons aussi que certains auteurs attribuent la méthode de Gauss-Jordan à l'abbé Bernard-Isidore Clasen [1888], professeur à Luxembourg.

[6] Ellwangen, 1er mars 1842 – Hanovre, 17 avril 1899.

Le 9 novembre 1878, Myrick H. Doolittle[7], un mathématicien de la *Computing Division* de l'*U.S. Coast and Geodetic Survey* de Washington, présente une méthode de résolution des équations normales provenant de problèmes de triangulation [Doolittle 1878]. Sa méthode consiste à annuler pas à pas les éléments de la matrice pour la transformer en une matrice triangulaire supérieure. Elle revient en fait à décomposer $A$ en un produit $A = LU$ à l'aide d'une succession de $n$ étapes intermédiaires pour obtenir ces matrices sous la forme $L = L_1 + \cdots + L_n$ et $U = U_1 + \cdots + U_n$. La matrice $L$ est triangulaire inférieure et la matrice $U$ est triangulaire supérieure, mais c'est elle qui, contrairement à la méthode de Gauss, est à diagonale unité. Doolittle montre également comment l'on peut rajouter de nouvelles équations et de nouvelles inconnues au système sans être obligé de recommencer tous les calculs. Cette technique s'apparente donc à notre méthode de *bordage*. Cette possibilité était, selon lui, l'un des principaux avantages de sa méthode. Doolittle n'avait pas de machine à calculer à sa disposition et il utilisait simplement des tables de multiplication. Il dit avoir résolu, avec l'aide de J.G. Porter, un système de 41 équations en cinq jours et demi. La méthode de Doolittle eut un succès certain et fut utilisée, avec des variantes, pendant de nombreuses années en géodésie. Par exemple, une telle méthode est décrite en 1912 dans le livre de Charles Lallemand[8] [1912], membre de l'Institut et directeur du Service du nivellement général de la France. Cholesky en possédait un exemplaire.

En 1907, Otto Toeplitz démontre qu'une matrice hermitienne définie positive peut être factorisée en un produit $LL^*$ avec $L$ triangulaire inférieure, mais il ne donne aucun procédé pour obtenir cette matrice $L$ [Toeplitz 1907]. C'est ce que fera Cholesky en 1910.

En 1915, l'astronome Willem De Sitter[9] détaille une méthode de résolution des équations normales [De Sitter 1915, Appendix]. Développée indépendamment du travail de Friedrich Robert Helmert[10] [1872], De Sitter l'avait déjà exposée dans sa leçon inaugurale à l'université de Leiden en 1908 et elle était utilisée depuis au laboratoire astronomique

[7] Addison, Vermont, USA, 17 mars 1830 – 27 juin 1913.

[8] Saint-Aubin-sur-Aire, Meuse, 7 mars 1857 – Bussy, Haute-Marne, 1er février 1938.

[9] Sneek, Pays-Bas, 6 mai 1872 – Leiden, 19 novembre 1934.

[10] Freiberg, 31 juillet 1843 – Potsdam, 15 juin 1917.

de Groningen. Cette méthode était en effet d'un emploi simple même pour des personnes inexpérimentées en calcul numérique. Moins de trois heures de calcul étaient nécessaires pour un système de dimension 6. Elle semble consister essentiellement en une disposition pratique pour mettre en œuvre la méthode de Gauss. De Sitter donne également une procédure de vérification de la solution obtenue.

Une forme simplifiée de la méthode de Doolittle est due à Frederick Vail Waugh[11] [1935]. Des variantes de la méthode d'élimination de Gauss furent également étudiées par Alexander Craig Aitken [1932], Prescott Durand Crout [1941a] et [1941b], Harold Hotelling [1943] et enfin Paul Summer Dwyer [1944].

En 1938, l'astronome polonais Tadeusz Banachiewicz[12] proposa une *méthode de la racine carrée* [Banachiewicz 1938a] tout à fait similaire à celle de Cholesky[13]. Cependant le langage utilisé était celui des *cracoviens*, des objets que Banachiewicz avait inventés et qui étaient similaires aux matrices, mais avec une loi de multiplication différente. C'est lui qui, le premier, formula le fait que les méthodes d'élimination correspondent, en fait, à la factorisation de la matrice $A$ en un produit de deux matrices. Mais nous verrons qu'il avait été également précédé par Cholesky dans cette interprétation.

En 1941, Dwyer fournit une version abrégée de la méthode de Doolittle et la relie aux autres méthodes de résolution [Dwyer 1941b]. En 1944, il donne l'interprétation matricielle de la méthode de Doolittle [Dwyer 1944]. Il montre aussi que $L = DU^T$, où $D$ est une matrice diagonale, et fait la remarque qu'il serait plus intéressant que les matrices $L$ et $U^T$ soient les mêmes afin d'effectuer deux fois moins de calculs. Pour cela, il suffirait de prendre les racines carrées des termes diagonaux, c'est-à-dire de la matrice $D$, et il note que la méthode ainsi obtenue s'apparenterait à celle de Banachiewicz. Sur la chronologie de ces divers travaux, on pourra consulter [Dwyer 1951].

[11] 1898–1974.

[12] Varsovie, 13 février 1882–17 novembre 1954.

[13] Voir aussi [Banachiewicz 1938b] où une méthode de décomposition d'une matrice quelconque est formulée.

Aucune de ces contributions, à part celle de Banachiewicz en 1938, ne ressemblait à la méthode de Cholesky. De plus, elles lui étaient toutes postérieures.

## 3. LA CONTRIBUTION DE CHOLESKY

Cholesky ne publia jamais ses travaux bien qu'il ait rédigé lui-même des rapports sur les opérations de nivellement de précision qu'il dirigeait en Algérie et en Tunisie. Une méthode nouvelle pour le calcul de la correction de mire y est donnée, mais il est bien difficile d'y voir les prémices de sa méthode de factorisation.

### *Diffusion de la méthode de Cholesky*

La méthode de Cholesky fut, en fait, exposée pour la première fois dans une note de 1924 [Benoît 1924], soit six ans après la mort de son auteur, par le commandant Benoît, de l'artillerie coloniale, ancien officier géodésien au service géographique de l'armée et au service géographique de l'Indochine, membre du Comité national français de géodésie et de géophysique (il n'a pas été possible de trouver des renseignements biographiques plus précis sur lui). Dans son article, Benoît commence par expliquer que, dans les problèmes de compensation des réseaux, on doit résoudre un système linéaire avec plus d'inconnues que d'équations (les équations de condition) et que, pour déformer le moins possible les triangles observés, on doit rechercher la solution de norme euclidienne minimale. Comme nous l'avons vu, ce problème de minimisation est résolu en annulant les dérivées partielles d'une certaine fonction qui s'exprime à l'aide des multiplicateurs de Lagrange. On arrive ainsi à la méthode des moindres carrés de Legendre et aux équations normales dont les multiplicateurs de Lagrange sont les inconnues. Benoît explique comment, pour résoudre ces équations normales, Cholesky factorise la matrice en un produit d'une matrice triangulaire inférieure par sa transposée. En identifiant les termes correspondants, il retrouve les formules de Cholesky, mais sa présentation est quelque peu différente. Puis Benoît précise la manière de disposer les calculs dans un unique tableau afin de faciliter les calculs. Il passe enfin à la description de l'achèvement des calculs et de la vérification des résultats tels qu'ils avaient été exposés par Cholesky, puis illustre la méthode par un exemple numérique complet.

La méthode de Cholesky semble avoir été connue des topographes, qui l'utilisaient comme en témoigne Henry Jensen[14] [1944] citant l'article de Benoît. Mais son essor est dû à John Todd[15] qui l'exposa dans son cours d'analyse numérique au King's College de Londres dès 1946 [Todd 1990] et la fit ainsi connaître. Avec sa femme, la mathématicienne Olga Taussky[16], ils racontent (traduction personnelle de [Taussky-Todd &Todd à paraître]) :

> « En 1946 l'un de nous [John Todd] donna un cours au King's College de Londres (KCL) sur les mathématiques numériques. Bien que nous ayons quelque expérience du temps de guerre en mathématiques numériques, incluant les valeurs propres de matrices, nous n'avions eu que peu affaire à la résolution des systèmes d'équations linéaires. Afin de voir comment ce sujet pouvait être présenté, nous fîmes un examen de *Math. Review* (facile à cette époque !) et trouvâmes une analyse (MR 7 (1944), 488) d'un article de Henry Jensen, écrite par E. Bodewig. Jensen déclarait : 'la méthode de Cholesky semble posséder tous les avantages'. Ainsi il fut décidé de suivre Cholesky et, puisque la méthode était clairement exposée, nous n'essayâmes pas de trouver l'article original.
>
> Leslie Fox, alors dans la Division de mathématiques nouvellement créée du (British) National Physical Laboratory (NPL), suivit le cours et apparemment trouva la méthode de Cholesky attractive puisqu'il la rapporta au NPL, où il l'étudia en profondeur avec ses collègues. À partir de ces articles, la méthode de Cholesky (ou parfois Choleski) fit son chemin dans les boîtes à outils des algébristes numériques linéaires via les manuels des années 1950. »

Dans les examens du *B.A. Honours* et du *B.Sc. Special* en *Mathematics, Advanced Subjects – Numerical Methods* pour les étudiants internes au King's College en 1947, Todd donna un exercice sur l'application de la méthode de Cholesky à une matrice de Hilbert $4 \times 4$. Comme il le raconte, Todd porta cette méthode à l'attention de Leslie Fox[17], Harry Douglas Huskey[18] et James Hardy Wilkinson[19], qui en firent la première analyse [Fox et al. 1948]. Sa stabilité numérique fut simultanément étudiée par Alan

[14] Né le 7 octobre 1915 à Copenhague.

[15] Né le 16 mai 1911.

[16] Olmütz, Empire Austro-Hongrois, 30 août 1906 – Pasadena, USA, 7 octobre 1995.

[17] Yorkshire, 1918 – Oxford, 1992.

[18] Né en 1916 à Bryson City, NC, USA.

[19] Strood, 27 septembre 1919 – Londres, 5 octobre 1986.

Mathison Turing [1948], l'un des pionniers de l'informatique et des ordinateurs[20].

Plus récemment, c'est encore à partir de l'article du commandant Benoît que les travaux de Cholesky ont été analysés en détail dans [Chabert et al. 1994, p. 324–333]. Ainsi, jusqu'à présent, la seule trace de la méthode de Cholesky qui existait dans la littérature scientifique était cet article du commandant Benoît. Dans le fonds A. Cholesky, déposé par sa famille à l'École polytechnique en 2004, il existe un manuscrit de Cholesky, de huit pages 21.8 cm $\times$ 32 cm, où cette méthode est parfaitement exposée (cote B4). Il est intitulé *Sur la résolution numérique des systèmes d'équations linéaires* et porte la date du 2 décembre 1910. Ce manuscrit, contrairement aux autres textes de sa main, ne comporte presque pas de ratures. Seuls quelques mots sont rayés et remplacés par d'autres. On peut donc supposer qu'il ne s'agit pas là d'une première rédaction, mais nous n'avons aucune indication sur la date exacte à laquelle Cholesky inventa sa méthode. Le manuscrit de Cholesky est reproduit ci-après dans la section 4.

### *Analyse du manuscrit de Cholesky*

Nous allons donc voir maintenant, à la lumière du manuscrit original de Cholesky, comment il a lui-même exposé sa méthode. Il n'est pas possible de savoir si le commandant Benoît a pu consulter cette note manuscrite de Cholesky mais, en tous les cas, les deux hommes se sont connus vers 1905, à l'occasion de la mesure de la méridienne de Lyon.

Nous allons maintenant suivre pas à pas l'exposé de Cholesky. Il commence par considérer le système linéaire carré I : $\alpha\gamma + C = 0$, où $\alpha$ est une matrice $n \times n$, $\gamma$ et $C$ des vecteurs de dimension $n$. Puis il pose II : $\gamma = \alpha^T \lambda$. Ainsi I devient III : $A\lambda + C = 0$. Il donne ensuite les formules IV qui permettent de calculer les éléments de la matrice $A$ : l'élément de $A$ qui se trouve dans la colonne $p$ et la ligne $q$ est le produit scalaire des lignes $p$ et $q$ de la matrice $\alpha$ du système I. Il remarque que $A = \alpha\alpha^T$ et que, l'ordre des facteurs pouvant être inversé dans un produit, $A$ est symétrique.

Cholesky se propose donc de résoudre un système de la forme III. Il remarque que si $\gamma$ est connu alors II est un système équivalent à III,

[20] Voir [Meinguet 1983] pour un travail plus récent et plus complet sur cette question.

mais avec $\lambda$ comme inconnue. On peut donc résoudre III si l'on trouve un système I permettant de calculer facilement $\gamma$.

C'est ce qu'il se passe si la matrice $\alpha$ du système I est triangulaire inférieure. En effet, la première équation ne contient que $\gamma_1$, la seconde ne contient que $\gamma_1$ et $\gamma_2$, et ainsi de suite. Il faut donc trouver un système V : $\alpha\gamma + C = 0$, avec $\alpha$ triangulaire inférieure. Une fois trouvé $\gamma$, le système II devient le système VI : $\alpha^T\lambda - \gamma = 0$, qui se résout de proche en proche à partir de $\lambda_n$ puisque $\alpha^T$ est triangulaire inférieure.

Il reste maintenant à calculer les éléments de la matrice triangulaire inférieure $\alpha$. Il suffit pour cela d'utiliser les formules IV qui donnent les éléments de $A$ en fonction de ceux de $\alpha$ en identifiant les éléments correspondants des matrices $A$ et $\alpha\alpha^T$. On obtient alors les formules de base de la méthode de Cholesky telles qu'on les trouve dans tous les livres d'analyse numérique. Ces formules contiennent un calcul de racine carrée, ce qui explique l'autre nom donné ultérieurement à la méthode. En passant, Cholesky démontre que sa technique revient à décomposer une matrice $A$ symétrique en un produit $A = \alpha\alpha^T$ avec $\alpha$ triangulaire inférieure. Il faut remarquer qu'à aucun moment il ne se préoccupe de savoir si les quantités dont il doit prendre la racine carrée sont positives. Mais il est vrai que, dans le cas qui l'intéresse, elles le sont toujours.

Enfin, Cholesky donne les formules permettant de résoudre le système V : $\alpha\gamma + C = 0$, et dit que la résolution du système VI : $\alpha^T\lambda - \gamma = 0$ est similaire.

Cholesky s'intéresse ensuite à la mise en œuvre de sa méthode. Puisque $A$ est symétrique, seule la moitié de la matrice est nécessaire, la seconde moitié pouvant être utilisée pour y placer la matrice $\alpha$. Le calcul des éléments de $\alpha$ nécessite une somme algébrique de produits. Cette somme s'effectue automatiquement sur une machine à calculer du type *Dactyle* dont on utilise les pleines capacités. D'autre part, cette machine met l'opérateur à l'abri des erreurs de signe en indiquant le résultat avec des chiffres blancs ou rouges suivant son signe. Ces machines *Dactyle* furent construites par l'entreprise Château jusqu'au début des années 1950. Ce sont celles dont le corps est formé par un quart de cylindre sur lequel coulissent des index que l'on place en face des chiffres décimaux et qui comportent une manivelle sur la droite de l'appareil. Ces machines avaient été inventées par l'ingénieur suédois Willgodt-Theophil Odhner[21] vers 1878. Le brevet étant tombé dans le domaine public en 1906, de nombreuses copies en furent alors fabriquées dans le monde entier, certaines avec des améliorations [Ocagne 1922].

Puis Cholesky discute les avantages de sa méthode du point de vue de la précision numérique. Il considère un système général $A\lambda + C = 0$. Il le remplace par la résolution successive de $\beta\varepsilon + C = 0$, où la matrice $\beta$ est triangulaire inférieure, et de $\delta\lambda - \varepsilon = 0$, où la matrice $\delta$ est triangulaire supérieure. On a donc $A = \beta\delta$, d'où, par identification, les formules qui fournissent les éléments de ces matrices. Le produit des éléments de $\beta$ et $\delta$ situés ligne $p$ et colonne $q$ est égal au carré de l'élément correspondant de $\alpha$, c'est-à-dire $\beta_{pq}\delta_{pq} = \alpha_{pq}^2$. Les calculs s'effectuent forcément avec une précision limitée. Donc ces nombres sont entachés d'une erreur $\eta$. Le calcul de $\alpha_{pq}^2$ introduit, en première approximation, une erreur $2\alpha_{pq}\eta$ et celui de $\beta_{pq}\delta_{pq}$ une erreur de $(\beta_{pq} + \delta_{pq})\eta$. Puisque $\beta_{pq}\delta_{pq} = \alpha_{pq}^2$, on a donc $(\beta_{pq} + \delta_{pq})\eta = (\beta_{pq} + \alpha_{pq}^2/\beta_{pq})\eta$. En dérivant cette expression par rapport à $\beta_{pq}$ on voit que cette erreur est minimale lorsque $\beta_{pq} = \alpha_{pq}$. On doit donc avoir $\delta_{pq} = \beta_{pq}$ et Cholesky en conclut que sa méthode, où les deux matrices sont transposées l'une de l'autre, est celle qui conduit à l'erreur numérique la plus faible. On voit qu'il fait là un véritable travail d'analyse numérique.

Mais ses réflexions continuent. Sa méthode réclame l'extraction de racines carrées. Il indique alors un procédé différent de ceux prônés par les constructeurs de machines à calculer. Soit à calculer $r = \sqrt{N}$ et soit $n$ une valeur approchée de cette racine carrée. On pose $r = n + \varepsilon$, d'où

$$N = r^2 = (n + \varepsilon)^2 = n^2 + 2n\varepsilon + \varepsilon^2 \simeq n(n + 2\varepsilon)$$

en se limitant aux termes du premier ordre. Cholesky en déduit que

$$\varepsilon \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{N}{n} - n\right)$$

et que l'on obtient une meilleure approximation de $r$ en ajoutant cette valeur à $n$. Si l'on effectue cette opération on obtient

$$r \simeq n + \frac{1}{2}\left(\frac{N}{n} - n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{n} + n\right),$$

[21] 1845–1905.

procédé qui peut être itéré et n'est autre que la méthode d'Héron d'Alexandrie.

Cholesky discute ensuite la vitesse de convergence de cette méthode d'extraction de la racine carrée : supposons que l'on dispose d'une table numérique donnant les valeurs des racines carrées avec 3 chiffres significatifs exacts. $\varepsilon/n$ est alors inférieur à $10^{-2}$ et son carré est inférieur à $10^{-4}$. La première itération fournit par conséquent 5 chiffres significatifs. $(\varepsilon/n)^2$ est plus petit que $10^{-8}$ et la seconde itération donne donc 9 chiffres exacts. Cholesky en conclut que si la table numérique dont on est parti donne la racine carrée avec un chiffre exact, alors on double le nombre de chiffres exacts à chaque itération. La procédure est d'ordre 2, elle est à convergence quadratique.

Il expose ensuite une méthode pour vérifier si aucune erreur ne s'est glissée dans les calculs. Pour ce faire, il considère le système $A\lambda' - V = 0$, où $V = Ae + C$ et où $e$ est le vecteur dont toutes les composantes valent 1. Si l'on résout ce nouveau système par la même méthode on aura $\alpha\gamma' - V = 0$, dont la résolution fournit le vecteur $\gamma'$, puis on obtiendra $\lambda'$ comme solution du système $\alpha^T\lambda' = \gamma'$. Cholesky exprime cette propriété en écrivant que « cette relation linéaire se maintiendra et sera encore vraie pour les coefficients $\alpha$ ». On a donc $A\lambda' - V = A\lambda' - Ae - C = A(\lambda' - e) - C = 0$, ce qui montre, en comparant avec le système initial $A\lambda + C = 0$, que, pour tout $p$, $\lambda_p + \lambda'_p = 1$. On a donc là un moyen pour vérifier les calculs au fur et à mesure de leur avancement. Comme le fait remarquer le commandant Benoît, « on ne passe ainsi au calcul d'une colonne qu'après vérification certaine de la précédente ».

Cholesky termine son travail en faisant état du temps de calcul nécessaire pour résoudre divers systèmes par sa méthode.

Dans tous les travaux de Cholesky, comme d'ailleurs dans ceux de nombreux militaires, on voit le souci constant, non seulement de proposer de bonnes solutions, souvent même originales, mais aussi celui de les rendre facilement utilisables et vérifiables par des hommes sans grande formation mathématique, grâce à des tableaux simples ou à des machines à calculer dont il se préoccupe également d'améliorer l'emploi.

Pour conclure, on peut dire que cette note manuscrite de Cholesky constitue un travail d'analyse numérique complet et tout à fait remarquable pour l'époque (et même pour la nôtre) : présentation et justification théorique d'un algorithme, étude de la disposition pratique des calculs sur une feuille de papier, discussion des problèmes posés par la mise en œuvre sur machine à calculer, étude des erreurs numériques dues à la précision finie des calculs, procédure de vérification des résultats et commentaires sur les essais numériques. De nos jours, la méthode de Cholesky est toujours d'une importance majeure.

## 4. LE MANUSCRIT DE CHOLESKY

Voici le texte exact de Cholesky concernant sa méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires. La mise en page originale a été conservée le plus possible.

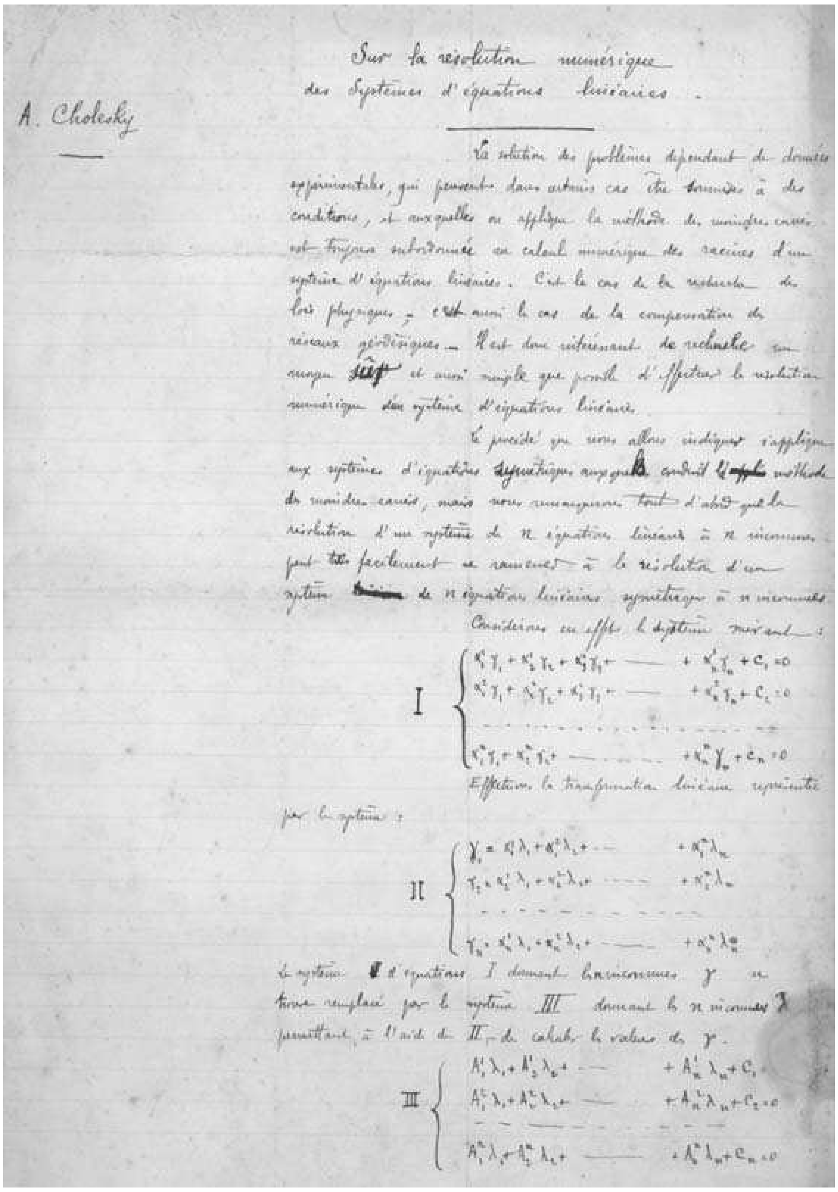
### Sur la résolution numérique des systèmes d'équations linéaires
### A. Cholesky

*La solution des problèmes dépendant de données expérimentales, qui peuvent dans certains cas être soumises à des conditions, et auxquelles on applique la méthode des moindres carrés, est toujours subordonnée au calcul numérique des racines d'un système d'équations linéaires. C'est le cas de la recherche des lois physiques ; c'est aussi le cas de la compensation des réseaux géodésiques. Il est donc intéressant de rechercher un moyen sûr et aussi simple que possible d'effectuer la résolution numérique d'un système d'équations linéaires.*

*Le procédé que nous allons indiquer s'applique aux systèmes d'équations symétriques auxquels conduit la méthode des moindres carrés ; mais nous remarquerons tout d'abord que la résolution d'un système de* $n$ *équations linéaires à* $n$ *inconnues peut très facilement se ramener à la résolution d'un système de* $n$ *équations linéaires symétriques à* $n$ *inconnues.*

*Considérons en effet le système suivant :*

$$I \begin{cases} \alpha_1^1\gamma_1 + \alpha_2^1\gamma_2 + \alpha_3^1\gamma_3 + \cdots + \alpha_n^1\gamma_n + C_1 = 0 \\ \alpha_1^2\gamma_1 + \alpha_2^2\gamma_2 + \alpha_3^2\gamma_3 + \cdots + \alpha_n^2\gamma_n + C_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1^n\gamma_1 + \alpha_2^n\gamma_2 + \cdots\cdots\cdots + \alpha_n^n\gamma_n + C_n = 0. \end{cases}$$


A. Cholesky

Sur la résolution numérique des systèmes d'équations linéaires.

FIGURE 2. Première page du manuscrit de Cholesky (Fonds A. Cholesky de l'École polytechnique) reproduite avec la gracieuse autorisation des Archives de l'École polytechnique

*Effectuons la transformation linéaire représentée par le système :*

$$II \begin{cases} \gamma_1 = \alpha_1^1\lambda_1 + \alpha_1^2\lambda_2 + \cdots + \alpha_1^n\lambda_n \\ \gamma_2 = \alpha_2^1\lambda_1 + \alpha_2^2\lambda_2 + \cdots + \alpha_2^n\lambda_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_n = \alpha_n^1\lambda_1 + \alpha_n^2\lambda_2 + \cdots + \alpha_n^n\lambda_n. \end{cases}$$

*Le système d'équations I donnant les $n$ inconnues $\gamma$ se trouve remplacé par le système III donnant les $n$ inconnues $\lambda$ permettant, à l'aide de II, de calculer les valeurs des $\gamma$.*

$$III \begin{cases} A_1^1\lambda_1 + A_2^1\lambda_2 + \cdots + A_n^1\lambda_n + C_1 = 0 \\ A_1^2\lambda_1 + A_2^2\lambda_2 + \cdots + A_n^2\lambda_n + C_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_1^n\lambda_1 + A_2^n\lambda_2 + \cdots + A_n^n\lambda_n + C_n = 0. \end{cases}$$

*On a d'une façon générale*

$$IV) \quad \begin{aligned} A_p^p &= \sum_{k=1}^{k=n} (\alpha_k^p)^2 \\ A_p^q &= \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k^p \alpha_k^q. \end{aligned}$$

*Le coefficient $A_p^q$ est obtenu en faisant le produit des coefficients des lignes $p$ et $q$ du système I qui se trouvent dans la même colonne et en faisant la somme des produits ainsi obtenus dans les $n$ colonnes, ce qu'on peut exprimer symboliquement en disant que $A_p^q$ est le produit de la ligne $p$ par la ligne $q$.*

*L'ordre des facteurs pouvant être inversé dans chaque produit, on voit immédiatement que*

$$A_p^q = A_q^p$$

*dans le déterminant du système III les termes symétriques par rapport à la diagonale sont égaux, autrement dit le système d'équations aux $\lambda$ est symétrique.*

---

*Proposons-nous donc de résoudre un système d'équations de la forme III.*

*Remarquons d'après ce qui précède que le système d'équations II si l'on y supposait les $\gamma$ connus serait un système d'équations aux $\lambda$ équivalent au système III. On aurait donc un moyen de résoudre le système III si l'on pouvait trouver un système I permettant de calculer facilement les $\gamma$.*

*C'est ce qui arrive si dans le système I*

*la première équation contient seulement* $\gamma_1$

*la 2ème* $\gamma_1$ *et* $\gamma_2$

*la 3ème* $\gamma_1, \gamma_2$ *et* $\gamma_3$

*ainsi de suite. On peut en effet calculer ainsi tous les* $\gamma$ *successivement à partir de* $\gamma_1$.

*Le problème est donc ramené à la recherche du système*

$$V)\ \begin{cases} \alpha_1^1\gamma_1 & +C_1 = 0 \\ \alpha_1^2\gamma_1 + \alpha_2^2\gamma_2 & +C_2 = 0 \\ \alpha_1^3\gamma_1 + \alpha_2^3\gamma_2 + \alpha_3^3\gamma_3 & +C_3 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \alpha_1^n\gamma_1 + \alpha_2^n\gamma_2 + \alpha_3^n\gamma_3 + \cdots + \alpha_n^n\gamma_n & +C_n = 0. \end{cases}$$

*Ce système étant en effet trouvé le problème devient très facile, puisque le système II est remplacé par le système VI qui permet de calculer les* $\lambda$ *de proche en proche à partir de* $\lambda_n$.

$$VI)\ \begin{cases} \alpha_1^1\lambda_1 + \alpha_1^2\lambda_2 + \cdots \quad \cdots + \alpha_1^n\lambda_n - \gamma_1 = 0 \\ \qquad \alpha_2^2\lambda_2 + \alpha_2^3\lambda_3 \cdots + \alpha_2^n\lambda_n - \gamma_2 = 0 \\ \qquad\qquad \alpha_3^3\lambda_3 \cdots + \alpha_3^n\lambda_n - \gamma_3 = 0 \\ \qquad\qquad \cdots \quad \cdots \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad \alpha_n^n\lambda_n - \gamma_n = 0. \end{cases}$$

*Nous calculerons facilement les coefficients* $\alpha$ *en partant des coefficients* $A$ *du système III, en appliquant les relations générales IV) au système V. On voit ainsi qu'on peut calculer ligne par ligne tous les coefficients du système VI*

$$1^{\text{ère}}\ \textit{ligne} \qquad \begin{cases} A_1^1 = (\alpha_1^1)^2 & \textit{d'où} \quad \alpha_1^1 = \sqrt{A_1^1} \\ A_2^1 = \alpha_1^1\alpha_1^2 & \qquad \alpha_1^2 = \dfrac{A_2^1}{\alpha_1^1} \\ \cdots\cdots\cdots & \\ A_p^1 = \alpha_1^1\alpha_1^p & \qquad \alpha_1^p = \dfrac{A_p^1}{\alpha_1^1} \\ A_n^1 = \alpha_1^1\alpha_1^n & \qquad \alpha_1^n = \dfrac{A_n^1}{\alpha_1^1} \end{cases}$$

*$2^{\text{ème}}$ ligne*
*les $\alpha_1$ sont déjà connus par le calcul de la $1^{\text{ère}}$ ligne*

$$\begin{cases} A_2^2 = (\alpha_1^2)^2 + (\alpha_2^2)^2 & \alpha_2^2 = \sqrt{A_2^2 - (\alpha_1^2)^2} \\[2ex] A_3^2 = \alpha_1^2\alpha_1^3 + \alpha_2^2\alpha_2^3 & \alpha_2^3 = \dfrac{A_3^2 - \alpha_1^2\alpha_1^3}{\alpha_2^2} \\[2ex] A_p^2 = \alpha_1^2\alpha_1^p + \alpha_2^2\alpha_2^p & \alpha_2^p = \dfrac{A_p^2 - \alpha_1^2\alpha_1^p}{\alpha_2^2} \end{cases}$$

*$p^{\text{ème}}$ ligne*
*Tous les $\alpha$ dont l'indice inférieur est plus petit que $p$ sont connus par le calcul des lignes précédentes.*

$$\begin{cases} A_p^p = (\alpha_1^p)^2 + (\alpha_2^p)^2 + (\alpha_3^p)^2 + \cdots + (\alpha_{p-1}^p)^2 + (\alpha_p^p)^2 \\[1ex] \qquad \alpha_p^p = \sqrt{A_p^p - (\alpha_1^p)^2 - (\alpha_2^p)^2 - (\alpha_3^p)^2 - \cdots - (\alpha_{p-1}^p)^2} \\[1ex] A_p^q = \alpha_1^p\alpha_1^q + \alpha_2^p\alpha_2^q + \alpha_3^p\alpha_3^q + \cdots + \alpha_{p-1}^p\alpha_{p-1}^q + \alpha_p^p\alpha_p^q \\[1ex] \qquad \alpha_p^q = \dfrac{A_p^q - \alpha_1^p\alpha_1^q - \alpha_2^p\alpha_2^q - \cdots - \alpha_{p-1}^p\alpha_{q-1}^q}{\alpha_p^p} \\[1ex] q > p \end{cases}$$

*Quant au calcul des $\gamma$ il s'effectue facilement à l'aide des équations V. On obtient*

$$\begin{aligned} (-\gamma_1) &= \frac{C_1}{\alpha_1^1} \\ (-\gamma_2) &= \frac{C_2 - \alpha_1^2(-\gamma_1)}{\alpha_2^2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (-\gamma_p) &= \frac{C_p - \alpha_1^p(-\gamma_1) - \alpha_2^p(-\gamma_2) - \cdots}{\alpha_p^p} \end{aligned}$$

*ce qui montre que les coefficients $(-\gamma)$ qui figurent dans le tableau des équations VI) se calculent par rapport aux termes constants $C$ du tableau III exactement de la même façon que les coefficients $\alpha$ par rapport aux $A$.*

---

*Les calculs peuvent être disposés d'une façon commode en un seul tableau. Les équations données étant symétriques, il suffit d'écrire dans le tableau les coefficients d'un seul côté de la diagonale, en-dessus par exemple.*

*Les équations transformées du système VI peuvent alors être disposées en dessous de la diagonale symétriquement placées par rapport aux équations données, chaque nouvelle équation occupant une colonne en dessous de la diagonale.*

*Les écritures se bornent à la transcription des coefficients* $\alpha$ *; en effet le calcul d'un coefficient* $\alpha$ *de la forme* $\frac{\sum mn}{K}$ *est effectué sur la machine à calculer à l'aide d'une série de multiplications qui s'ajoutent automatiquement et algébriquement sur la machine, la somme algébrique étant immédiatement divisée par* $K$. *On utilise ainsi l'opération la plus compliquée que puisse faire la machine à calculer, par suite on obtient le rendement maximum de cette machine, tout en se mettant autant que possible à l'abri des erreurs* [rayé et remplacé par « fautes » ] *fréquentes dans les transcriptions de chiffres lus.*

*On trouve, tant dans la disposition des calculs, que dans l'emploi de la machine à calculer, des simplifications pour l'application des formules ou des indications précieuses. Donnons un seul exemple : les machines à calculer du genre « Dactyle » enregistrent le quotient en chiffres blancs ou rouges suivant que la division est faite en tournant dans le sens de l'addition ou de la soustraction, il s'ensuit que tout coefficient* $\alpha$ *étant le résultat d'une division sur la machine, son signe est indiqué par la couleur des chiffres qui le composent ; les erreurs de signe sont ainsi facilement évitées.*

*Il paraît inutile d'insister sur le reste de la résolution, c'est-à-dire sur le calcul des* $\lambda$ *à l'aide du système VI). On voit en effet immédiatement comment on peut remonter successivement de* $\lambda_n$ *à* $\lambda_{n-1}$, *puis à* $\lambda_{n-2}$ *et ainsi de suite jusqu'à* $\lambda_1$.

*On peut mettre en évidence les avantages de cette méthode de résolution des systèmes linéaires, au point de vue de l'approximation avec laquelle les résultats sont obtenus.*

*Toute méthode de résolution doit nécessairement conduire à un système d'équations du genre du système VI permettant d'obtenir directement une des inconnues et de déterminer successivement toutes les autres. Supposons qu'on ait été conduit au système :*

$$\mathit{VII}\ \left\{\begin{array}{r} \delta_1^1\lambda_1 + \delta_1^2\lambda_2 + \cdots + \delta_1^n\lambda_n - \varepsilon_1 = 0 \\ \delta_2^2\lambda_2 + \cdots + \delta_2^n\lambda_n - \varepsilon_2 = 0 \\ \cdots\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta_n^n\lambda_n - \varepsilon_n = 0 \end{array}\right.$$

*on peut faire correspondre à ce système un second système fournissant les valeurs des* $\varepsilon$, *soit :*

$$\mathit{VIII}\ \left\{\begin{array}{ll} \beta_1^1\varepsilon_1 & +C_1 = 0 \\ \beta_1^2\varepsilon_1 + \beta_2^2\varepsilon_2 & +C_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \beta_1^n\varepsilon_1 + \beta_2^n\varepsilon_2 + \cdots + \beta_n^n\varepsilon_n & +C_n = 0. \end{array}\right.$$

*Les formules IV sont alors remplacées par les suivantes :*

$$A_p^p = \sum_{k=1}^{k=p} (\beta_k^p \delta_k^p)$$

$$A_p^q = \sum_{k=1}^{k=p} (\beta_k^p \delta_k^q).$$

*D'où l'on peut conclure que le système unique des coefficients* $\alpha$ *que l'on a employé précédemment est remplacé dans tous les autres modes de résolution par un double système de coefficients* $\beta$ *et* $\delta$ *tels que l'on a toujours* $\beta_p^q \delta_p^q = (\alpha_p^q)^2$.

*Or les calculs s'effectuent nécessairement avec une précision limitée et on est amené pour éviter des erreurs* [rayé et remplacé par « fautes » ] *et rendre le calcul aussi simple que possible, à calculer tous les nombres employés avec un nombre de décimales fixe. Il en résulte que les nombres* $\alpha, \beta, \delta$ *sont affectés d'une erreur* $\eta$ *dépendant des décimales négligées et indépendante de la grandeur du nombre calculé.*

*L'emploi de la quantité* $(\alpha_p^q)^2$ *dans les calculs correspond à l'introduction d'une erreur* $2\alpha_p^q \eta$.

*L'emploi de la quantité égale* $(\beta_p^q \delta_p^q)$ *correspond à l'introduction de l'erreur* $(\beta_p^q + \delta_p^q)\eta$.

*On sait que le produit* $\beta_p^q \delta_p^q$ *étant constant la somme de ses deux facteurs atteint son minimum lorsqu'ils sont égaux. L'erreur la plus faible que l'on puisse introduire est donc*

$$2\alpha_p^q \eta.$$

*Il en résulte que le mode de résolution des systèmes linéaires qui vient d'être exposé apparaît comme celui qui fournit la meilleure approximation des calculs.*

*Cette propriété qui permet de réduire au strict minimum le nombre de décimales à employer dans les calculs, compense largement le petit inconvénient d'employer la racine carrée dans la résolution d'équations linéaires.*

*D'autant plus que la racine carrée peut être obtenue facilement et rapidement à l'aide de la machine à calculer par le procédé suivant complètement différent des procédés généralement indiqués par les fabriquants de machines à calculer.*

*Soit à extraire la racine carrée d'un nombre* $N$.

*Supposons qu'on connaisse un nombre* $n$ *voisin de la racine* $r$ *cherchée.*

*Soit pour fixer les idées*

$$r = n + \varepsilon$$
$$N = r^2 = (n + \varepsilon)^2 = n^2 + 2n\varepsilon + \varepsilon^2.$$

*Si* $\varepsilon^2$ *est d'un ordre inférieur à la dernière décimale que l'on veut calculer, on a le droit d'écrire*

$$N = n^2 + 2n\varepsilon = n(n + 2\varepsilon)$$

*c'est-à-dire qu'en divisant* $N$ *par* $n$ *on a pour quotient*

$$n + 2\varepsilon.$$

$2\varepsilon$ *représente l'excès de ce quotient sur le diviseur* $n$ *et l'on obtient* $r$ *en ajoutant à* $n$ *la moitié de cet excès.*

*Pratiquement, il est avantageux d'avoir à sa disposition une table de carrés qui donne à première vue la racine carrée d'un nombre quelconque avec 3 chiffres significatifs exacts.*

$\dfrac{\varepsilon}{n}$ *est alors inférieur à* $\dfrac{1}{10^2}$

$\dfrac{\varepsilon^2}{n^2}$ $\dfrac{1}{10^4}$.

*La première division donne la racine carrée avec 5 chiffres significatifs.*

$\dfrac{\varepsilon^4}{n^4}$ *est inférieur à* $\dfrac{1}{10^8}$

*donc la* $2^{\text{ème}}$ *division faite avec la racine à 5 chiffres exacts donnerait 9 chiffres significatifs exacts et ainsi de suite.*

*On peut énoncer une règle simple en supposant que le nombre comporte une virgule placée à la droite du premier chiffre de gauche. Dans ces conditions chaque division double le nombre de décimales de la racine.*

*À l'aide de ce procédé, un opérateur exercé obtient en quelques secondes la racine carrée d'un nombre de 5 chiffres avec le même nombre de chiffres exacts.*

---

*La méthode de résolution des systèmes linéaires qui vient d'être exposée a été complétée par l'adaptation du système de vérification indiqué par Gauss sous le nom de preuve par sommes.*

*La vérification est obtenue de la façon suivante : On juxtapose au terme constant* $C_p$ *de l'équation de rang* $p$ *un terme* $V_p$ *donné par la relation* $-V_p = A_1^p + A_2^p + \cdots + A_n^p + C_p$.

*Dans ces conditions la somme des nombres inscrits dans la ligne* $p$ *du système des équations est nulle. Si l'on traite* $V_p$ *dans la résolution de la même façon que* $C_p$, *cette relation linéaire se maintiendra et sera encore vraie pour les coefficients* $\alpha$.

*De plus il sera encore possible de vérifier le calcul des* $\lambda$ *à partir du système des équations VI), car si l'on remplace dans les équations III les termes constants C par les termes de vérification V, l'opération équivaut à changer* $\lambda$ *en* $(1-\lambda)$ *; le calcul des inconnues fait avec les V donne donc des valeurs* $\lambda'$ *telles que* $\lambda_p + \lambda'_p = 1$.

---

*On peut en opérant comme il vient d'être dit réussir à coup sûr et en peu de temps la résolution de systèmes d'équations très complexes.*

*La résolution d'un système de 10 équations à 10 inconnues peut être faite avec 5 chiffres exacts, en 4 à 5 heures, y compris la vérification des équations et le calcul des résidus.*

*On a résolu par cette méthode plusieurs systèmes dépassant 30 équations, et en particulier un système de 56 équations. Ce dernier cas fait partie d'un calcul de compensation des altitudes des chaînes primordiales de la triangulation de l'Algérie. En raison de l'importance des calculs et pour éviter l'encombrement, on a dû adopter une disposition spéciale, mais les calculs ont été conduits exactement comme il vient d'être dit.*

*Vincennes le 2 Décembre 1910*
*Signature*

## APPENDICE 1 : AUTRES DOCUMENTS DU FONDS A. CHOLESKY

On trouve dans le fonds A. Cholesky de nombreux documents à caractère scientifique rédigés par Cholesky à l'occasion de ses activités pendant la guerre. Certains sont manuscrits et d'autres tapés à la machine. Ils montrent que leur auteur mit sa culture scientifique au service de l'armée. Pour plus de détails, voir [Brezinski & Gross-Cholesky 2005].

***Manuscrits***

– Canevas de tir pour situer le plus exactement possible la ligne de combat (2 p.).
– Surveillance des aéronefs (1 p.).
– Protection contre les incursions des aéronefs (1 p.).
– Lieu du point apparent d'émission du claquement pour une pièce de 77 du Grafen Wald pour la Section B, quand on fait varier le plan de tir de la pièce (1 p. et 3 p. de brouillon).
– Tenue à jour du programme de la photo aérienne (2 p.).
– Appareil de pointage pour mitrailleuse sur avion Nieuport (3 p.).

– But du groupe de canevas de tir (2 p.).

– Canevas de tir pendant la marche en avant (5 p.).

– Instructions particulières à l'artillerie pour l'emploi des contrebatteries (complément à l'ordre général n° 12).

– Instructions pour la surveillance des aéronefs (1 p.).

– Étude d'artillerie (1 p.).

– Projet de répartition du travail dans le Groupe de Canevas de Tir de l'Artillerie (3 p.).

– Manuscrit sans titre sur le travail de l'officier géographe (5 p.).

– Manuscrit sans titre sur les repérages par avions (3 p.).

– Manuscrit sans titre avec des calculs numériques sur les arrangements (1 grande double page).

– Sur le combat aérien (10 p.).

– Organisation du tir de l'artillerie (36 pages dactylographiées). Il s'agit des conférences faites par Cholesky et le capitaine de Fontanges en mai 1915.

***Documents imprimés***

– Étude sur le tir d'artillerie contre les batteries masquées (envoyé le 5 novembre 1914 depuis Somme-Suippe au chef d'escadron Girard, commandant le 3e groupe du 23e régiment d'artillerie).

– Projet d'organisation de l'observation et du tir d'artillerie sur un front de corps d'armée (24 décembre 1914).

– Opérations topographiques effectuées par l'artillerie pour relever les batteries et leurs repères.

– Notes sur le tir avec observateurs latéraux et aériens (avril 1915).

***Cours de l'École spéciale des travaux publics***

Divers manuscrits relatifs au travail de Cholesky comme professeur à l'École spéciale des travaux publics, du bâtiment et de l'industrie (ESTP) se trouvent dans le fonds A. Cholesky.

*Complément de topographie*

C'est un cours manuscrit de 239 pages intitulé *Complément de topographie* et écrit sur des feuilles de 15.5 cm × 20 cm. Nous en possédons également une version en caractères d'imprimerie calligraphiés avec des corrections de la main de Cholesky.

*Cours de calcul graphique*

C'est un cours manuscrit de 83 pages, sur des pages de 15.5 cm × 20 cm.

*Cours de topographie*

Nous possédons les pages 44 à 218 du manuscrit d'un livre de Cholesky intitulé *Cours de topographie* et publié par l'ESTP à une date inconnue. Ce livre connut un succès certain puisqu'il eut au moins sept éditions. La septième édition, qui date de 1937 (Bibliothèque nationale de France, cote 4-V-15365 (2)), fut revue par Henri-Albert Noirel, répétiteur à l'École polytechnique. Elle contient 442 pages, 100 figures et 18 planches ou photographies d'instruments.

Le nom de Cholesky se retrouve dans certains ouvrages actuels de topographie. Sa méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires y est citée en rapport avec la méthode des moindres carrés. Il est également fait mention du *cheminement double de Cholesky* dans [Goix 2001] et dans d'autres sources. Cette méthode semble dater de 1910 et elle consiste à mener simultanément deux cheminements distincts en plaçant la mire de nivellement successivement en deux points distincts situés en arrière puis en deux points situés à l'avant et ainsi de suite. On calcule ensuite séparément les deux cheminements et l'on compare les résultats obtenus. Pour un apercu historique sur le développement de la géodésie, de la topographie et de la cartographie, voir [Brezinski 2005].

***Manuscrits divers***

Le fonds A. Cholesky renferme également :

– Trois pages intitulées *Sur la détermination des fractions de secondes de temps.*

– Un manuscrit de 15 pages avec le titre *Instructions pour l'exécution des nivellements de précision.*

– Un manuscrit de 8 pages intitulé *Équation de l'ellipsoïde terrestre rapportée à Ox tangente au parallèle vers l'Est, Oy tangente au méridien vers le Nord, Oz verticale vers le zénith.* Il en existe également un exemplaire dactylographié dans lequel les formules mathématiques sont insérées à la main.

– Un manuscrit de 16 pages, *Étude du développement conique conforme de la carte de Roumanie.* On en possède aussi un exemplaire tapé à la machine où les formules mathématiques sont insérées à la main.

– Un manuscrit de 3 pages, *Instructions sur l'héliotrope-alidade (modèle d'étude 1905),* écrit à La Charpenne, le 18 août 1905.

– Cinq pages de description de l'alidade holométrique.

– Cinq pages de description de la boussole-éclimètre.

– Trois pages et trois plans sur la construction de lignes de chemin de fer.

– Trois pages intitulées *Remarque au sujet du calcul de correction de mire.*

– Divers cours et feuilles d'exercices destinés aux élèves par correspondance de l'ESTP.

– Deux feuilles avec le titre *Compléments de topographie. Levés d'études à la planchette. 5 séries et 2 exercices pratiques. Tâches à remplir.*

## APPENDICE 2 : LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS EN TOPOGRAPHIE

Expliquons comment se présente la méthode des moindres carrés dans son application à la compensation des réseaux (voir [Duquenne 1986] et, pour des détails mathématiques plus poussés, [Serre 2000]).

Supposons que l'on ait effectué $n$ mesures $\ell_1, \ldots, \ell_n$, éventuellement réduites à la représentation plane. Ce sont, en général, des mesures d'angle ou de distance. On veut compenser ces mesures, c'est-à-dire corriger les erreurs dont elles peuvent être affectées à cause de la précision des instruments et des inexactitudes expérimentales. Les inconnues $X_1, \ldots, X_N$ sont les coordonnées Lambert des nouveaux points. Les mesures $\ell_i$ sont, en l'absence d'erreurs, reliées aux inconnues par des relations de la forme

$$\ell_i = f_i(X_1, \ldots, X_N), \quad i = 1, \ldots, n,$$

où les $f_i$ sont les fonctions non linéaires. Soit $v_i$ l'estimation de l'erreur sur la mesure $\ell_i$. Ce sont des variables aléatoires qui suivent une loi de Gauss normale centrée. On a donc, en fait, les *relations d'observation*

$$(1) \qquad \ell_i + v_i = f_i(X_1, \ldots, X_N), \quad i = 1, \ldots, n.$$

C'est un système non linéaire de $n$ équations à $N + n$ inconnues $X_1, \ldots, X_N$ et $v_1, \ldots, v_n$. Il faut commencer par le rendre linéaire.

Soient $\ell_i^* = f_i(X_1^*, \ldots, X_N^*)$ les mesures calculées pour des valeurs approchées $X_i^*$ des inconnues. Ces valeurs approchées sont obtenues par un moyen adéquat quelconque, en utilisant seulement une partie des mesures. Par exemple, pour compenser un réseau de cinq points, on n'utilisera que trois mesures et la solution obtenue servira de solution approchée. Pour linéariser le système (1), on effectue un développement de Taylor au premier ordre des fonctions $f_i$, ce qui donne

$$(2) \quad \ell_i - \ell_i^* + v_i = \frac{\partial f_i}{\partial X_1^*}(X_1 - X_1^*) + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial X_N^*}(X_N - X_N^*), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Soit $x_i = X_i - X_i^*$ la *correction de compensation*. En notant $A$ la matrice de coefficients $a_{ij} = \partial f_i / \partial X_j^*$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, N$, $b$ le vecteur de composantes $b_i = \ell_i - \ell_i^*$ pour $i = 1, \ldots, n$, $x$ celui de composantes $x_i$ pour $i = 1, \ldots, N$ et $v$ celui de composantes $v_i$ pour $i = 1, \ldots, n$, le système (2) s'écrit

$$(3) \qquad Ax = b + v.$$

Nous allons voir comment le résoudre par la *méthode des moindres carrés.*

Chaque mesure $\ell_i$ est une variable aléatoire caractérisée par son *écart-type* $\sigma_i$. Le nombre $p_i = 1/\sigma_i^2$ est le *poids* de cette mesure. On démontre que les résidus $v_i$ sont des variables aléatoires normales centrées et indépendantes. La solution la plus probable du système des relations d'observation (3) est celle qui minimise la quantité

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2.$$

C'est la condition des *moindres carrés.*

Cette quantité est la plus petite possible quand ses dérivées partielles par rapport aux $x_j$ sont toutes nulles. On a

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j}.$$

Or $\partial v_i^2/\partial x_j = 2v_i\ \partial v_i/\partial x_j$. D'après (3), on a $\partial v_i/\partial x_j = a_{ij}$ et la condition des moindres carrés entraîne donc

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i v_i = 0, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Si l'on appelle $P$ la matrice diagonale d'éléments $p_1, \ldots, p_n$, cette condition s'écrit

$$A^T P v = 0.$$

C'est un système de $N$ équations à $n$ inconnues et l'on obtient donc finalement un système de $N + n$ équations avec autant d'inconnues

$$\begin{cases} A^T P v = 0 \\ Ax - v = b. \end{cases}$$

Mais $v = Ax - b$ et, en remplaçant dans le premier système, on trouve

$$A^T P A x = A^T P\, b.$$

Ce système, dit des *équations normales,* ne contient plus que les inconnues $x$. Il est de dimension $N$ et sa matrice est symétrique définie positive puisque les poids $p_i$ sont strictement positifs. C'est ce système que l'on résout par la méthode de Cholesky.

*Remerciements*

Je tiens, en premier lieu, à exprimer ma gratitude à Michel Gross-Cholesky pour m'avoir demandé de classer avec lui les papiers de son grand-père. Je suis reconnaissant à Alain Vienne qui m'a procuré l'article de Banachiewicz. Je remercie Roger Serre pour les documents qu'il m'a transmis et les indications qu'il m'a données. Je dois des remerciements très sincères à Olga Taussky-Todd et à John Todd pour les échanges que nous avons eus au cours des années et pour avoir bien voulu me communiquer tous les renseignements en leur possession. Je tiens à remercier particulièrement Claudine Billoux, archiviste de l'École polytechnique, pour son aide précieuse et son efficacité dans la recherche des documents ainsi que François Brunet. Dominique Tournès m'a fait connaître la thèse de M.-F. Jozeau ; je l'en remercie ainsi que de ses encouragements dans la préparation de ce travail. Je n'oublierai pas non plus Yves Dumont. Sans la maîtrise de Michela Redivo Zaglia il m'aurait été impossible de dénicher certaines informations sur le web ; qu'elle en soit remerciée. Enfin, je ne saurai oublier les trois rapporteurs de cet article pour leurs remarques pertinentes et les nombreuses corrections qu'ils m'ont suggérées.

## BIBLIOGRAPHIE

ADRAIN (Robert)

[1808] Research concerning the probabilities of the errors which happen in making observations, *The Analyst or Mathematical Museum*, 1 (1808), p. 93–108.

[1818a] Investigation of the figure of the earth and of the gravity in different latitudes, *Transactions of the American Philosophical Society (n.s.)*, 1 (1818), p. 119–135.

[1818b] Research concerning the mean diameter of the earth, *Transactions of the American Philosophical Society (n.s.)*, 1 (1818), p. 353–366.

AITKEN (Alexander Craig)

[1932] On the evaluation of determinants, the formation of their adjugates and the practical solution of simultaneous linear equations, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2)*, 3 (1932), p. 207–219.

BANACHIEWICZ (Tadeusz)

[1938a] Principes d'une nouvelle technique de la méthode des moindres carrés. Méthode de résolution numérique des équations linéaires, du calcul des déterminants et des inverses, et de réduction des formes quadratiques, *Bulletin international de l'Académie polonaise des sciences et des lettres, Classe des sciences mathématiques, Série A*, (1938), p. 134–135, 393–404.

[1938b] *Études d'analyse pratique*, Cracow Observatory Reprint, vol. 22, University of Cracow, 1938.

BENOÎT (Cdt.)

[1924] Note sur une méthode de résolution des équations normales provenant de l'application de la méthode des moindres carrés à un système d'équations linéaires en nombre inférieur à celui des inconnues (procédé du commandant Cholesky), *Bulletin géodésique*, 2 (1924), p. 67–77.

BJÖRCK (Åke)

[1996] *Numerical Methods for Least Squares Problems*, Philadelphia, PA : SIAM, 1996.

BREZINSKI (Claude)

[2005] Géodésie, topographie et cartographie, *Bulletin de la Société des amis de la bibliothèque de l'École polytechnique*, 39 (2005), p. 33–66.

BREZINSKI (Claude) & GROSS-CHOLESKY (Michel)

[2005] La vie et les travaux d'André-Louis Cholesky, *Bulletin de la Société des amis de la bibliothèque de l'École polytechnique*, (2005), p. 7–31.

CHABERT (Jean-Luc) et al.

[1994] *Histoires d'algorithmes. Du caillou à la puce*, Paris : Belin, 1994, Trad. angl. par Chris Weeks, *A History of Algorithms. From the Pebble to the Microship*, Berlin-New York : Springer, 1999.

CHOLESKY (André Louis)

[1937] *Cours de topographie. 2e partie : Topographie générale*, Paris : École spéciale des travaux publics, 7e édition, 1937.

CLASEN (Bernard-Isidore)

[1888] Sur une nouvelle méthode de résolution des équations linéaires et sur l'application de cette méthode au calcul des déterminants, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles (2)*, 12 (1888), p. 251–281, rééd., *Mathesis*, 9 (1889), suppl. 2, p. 1–31.

CROUT (Prescott Durand)

[1941a] A short method for evaluating determinants and solving systems of linear equations with real or complex coefficients, *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 60 (1941), p. 1235–1240.

[1941b] *A short method for evaluating determinants and solving systems of linear equations with real or complex coefficients, Marchant Methods MM-182, Sept. 1941*, Oakland, California : Marchant Calculating Machine Co., 1941.

DE SITTER (Willem)

[1915] Determination of the mass of Jupiter and elements of the orbits of its satellites from observations made with the Cape heliometer by Sir David Gill, K.C.B., and W.H. Finlay, M.A., part I, *Annals of the Cape Observatory*, 12 (1915).

DOOLITTLE (Myrick H.)

[1878] Method employed in the solution of normal equations and the adjustment of a triangulation, dans *U.S. Coast and Geodetic Survey Report*, 1878, p. 115–120.

DUQUENNE (Henri)

[1986] *Méthode des moindres carrés. Application aux travaux de géodésie, cours polycopié*, Institut géographique national, École nationale des sciences géographiques, 1986.

DWYER (Paul Summer)

[1941a] The Doolittle technique, *Annals of Mathematical Statistics*, 12 (1941), p. 449–458.

[1941b] The solution of simultaneous equations, *Psychometrika*, 6 (1941), p. 101–129.

[1944] A matrix presentation of least squares and correlation theory with matrix justification of improved methods of solution, *Annals of Mathematical Statistics*, 15 (1944), p. 82–89.

[1951] *Linear Computations*, New York : Wiley, 1951.

EYROLLES (Léon), PRÉVOT (Eugène) & QUANON (Édouard)

[1909] *Cours de topographie. Livre I : Topométrie*, Paris : Eyrolles, 1909.

FOX (Leslie), HUSKEY (Harry Douglas) & WILKINSON (James Hardy)

[1948] Notes on the solution of algebraic linear simultaneous equations, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1 (1948), p. 149–173.

GAUSS (Carl Friedrich)

[*Werke*] *Werke*, hg. von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Göttingen, 1863-1933, 12 vol., rééd. Hildesheim-New York : Olms, 1981.

[1809] *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus solem ambientium*, Hamburg : Perthes & Besser, 1809, trad. fr. par Edmond Dubois, *Théorie des corps célestes parcourant des sections coniques autour du soleil*, éd. par Jacques Bertrand, Paris, 1864 ; [Gauss, *Werke*], vol. 7.

[1810] Disquisitio de elementis ellipticis Palladis ex oppositionibus annorum 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809, *Commentationes societatis regiæ scientiarum Gottingensis recentiores*, 1 (1811), p. 1–24, [Gauss, *Werke*], vol. 6, p. 3–24.

[1823] Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, deuxième partie, *Commentationes societatis regiæ scientiarum Gottingensis recentiores*, 5 (1823), p. 313–318, [Gauss, *Werke*], vol. 4, 1873, p. 1–108, trad. fr. par Jacques Bertrand, *Méthode des moindres carrés : mémoires sur la combinaison des observations*, Paris : Mallet-Bachelier, 1855.

GOLDSTINE (Herman Heine)

[1977] *A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century*, New York-Heidelberg-Berlin : Springer, 1977.

GOIX (Pierre)

[2001] *Topographie*, Grenoble : CRDP de l'Académie de Grenoble, 2001.

HELMERT (Friedrich Robert)

[1872] *Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendung auf die Geodäsie, die Physik und die Theorie der Messinstrumente*, Leipzig : Teubner, 1872, 2^e^ éd. 1907, 3^e^ éd., 1924.

HOTELLING (Harold)

[1943] Some new methods in matrix calculations, *Annals of Mathematical Statistics*, 14 (1943), p. 1–34.

JACOBI (Carl Gustav Jacob)
[1857] Über eine elementare Transformation eines in Bezug jedes von zwei Variablen-Systemen linearen und homogenen Ausdrucks, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 53 (1857), p. 265–270.

JENSEN (Henry)
[1944] *An Attempt at a Systematic Classification of some Methods for the Solution of Normal Equations*, Geodætisk Institut København, Meddelelse No. 18, 45 p., København : Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S, 1944.

JORDAN (Wilhelm)
[1888] *Handbuch der Vermessungskunde. Bd. 1 : Ausgleichungs-Rechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate*, 3e éd., Stuttgart : Metzler, 1888.

JOZEAU (Marie-Françoise)
[1997] *Géodésie au XIXe siècle. De l'hégémonie française à l'hégémonie allemande. Regards belges. Compensation et méthode des moindres carrés*, Thèse, Université Paris 7, 1997.

KOLMOGOROV (Andrei Nikolaevich) & YUSHKEVICH (Adolf-Andrei Pavlovich), éd.
[1992] *Mathematics of the 19th Century. Mathematical Logic, Algebra, Number Theory, Probability Theory*, Basel : Birkhäuser, 1992.

LAGRANGE (Joseph-Louis)
[1759] Recherches sur la méthode des maximis et minimis, *Miscellanea philosophico-mathematica societatis privatæ Taurinensis*, 1 (1759), p. 18–32, *Œuvres complètes*, vol. 1, Paris : Gauthier-Villars 1867, p. 1–20.

LALLEMAND (Charles)
[1912] *Compensation d'un réseau de nivellements par la méthode des coefficients indéterminés*, Paris & Liège : Béranger, 1912.

LEGENDRE (Adrien-Marie)
[1806] *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, Paris : Courcier, 1806.

MEINGUET (Jean)
[1983] Refined error analysis of Cholesky factorization, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 20 (1983), p. 1243–1250.

MERLIN (Pierre)
[1964] *La Topographie*, Que-Sais-Je ?, vol. 744, Paris : Presses universitaires de France, 1964, 2e éd., 1972.

OCAGNE (Maurice d')
[1922] *Vue d'ensemble sur les machines à calculer*, Paris : Gauthier-Villars, 1922.

PIZZETTI (Paolo) & NOIREL (Henri Albert)
[1916] Géodésie, dans *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, vol. VI.1, Paris : Gauthier-Villars, 1916, rééd., Paris : Jacques Gabay, 1993.

SERRE (Roger)
[2000] *Compensation par moindres carrés*, cours polycopié, Institut géographique national, École nationale des sciences géographiques, 2000.

SHEYNIN (Oscar Borisovich)
[1979] C.F. Gauss and the theory of errors, *Archive for History of Exact Sciences*,

20 (1979), p. 21–72.

[1994] C.F. Gauss and geodetic observation, *Archive for History of Exact Sciences*, 46 (1994), p. 253–283.

STEWART (Gilbert W.)

[1994] Gauss, statistics, and Gaussian elimination, dans Sall (John) & Lehman (Ann), éd., *Computing Science and Statistics*, vol. 26 : Computationally Intensive Statistical Methods, Fairfax Station, VA : Interface Foundation of North America, 1994, p. 1–7.

TAUSSKY-TODD (Olga) & TODD (John)

[à paraître] Cholesky, Toeplitz and the triangular factorization of symmetric matrices, communication privée d'un manuscrit à paraître dans *Numerical Algorithms*.

TODD (John)

[1990] The prehistory and early history of computation at the U.S. National Bureau of Standards, dans Nash (Stephen G.), éd., *A History of Scientific Computing*, New York : ACM Press, 1990, p. 251–268.

TOEPLITZ (Otto)

[1907] Die Jacobische Transformation der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen, *Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen. II. Mathematisch-Physikalische Klasse*, (1907), p. 101–110.

TURING (Alan Mathison)

[1948] Rounding-off errors in matrix processes, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1 (1948), p. 287–308.

WAUGH (Frederick Vail)

[1935] A simplified method of determining multiple regression constants, *Journal of the American Statistical Association*, 30 (1935), p. 694–700.